

MÁS DE
1600
ACTIVIDADES

Entre números

III

Actividades de Matemática



Libro digital

Jaller, Ariel R.

Entre números III / Ariel R. Jaller ; Martín Pérez. - 1a ed . - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Santillana, 2017.

Libro digital, HTML - (Entre números)

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-950-46-5182-6

1. Matemática. 2. Escuela Secundaria. I. Pérez, Martín II. Título

CDD 510

El visor digital reproduce íntegramente a la obra papel, por lo que al pasar las páginas podría verse su ISBN.

Entre números



III

Actividades de Matemática

ENTRE NÚMEROS III - Actividades de Matemática

es una obra colectiva, creada, diseñada y realizada
en el Departamento Editorial de Ediciones Santillana,
bajo la dirección de Mónica Pavicich,
por el siguiente equipo:

Ariel R. Jaller
Martín M. Pérez

Editora: Ana V. Veltri
Jefa de edición: María Laura Latorre
Gerencia de gestión editorial: Patricia S. Granieri

La realización artística y gráfica de este libro ha sido efectuada por el siguiente equipo:

Jefa de arte: Silvina Gretel Espil.

Diseño de maqueta: Lorena Selvanovich y Silvina Gretel Espil.

Diseño de tapa: Lorena Selvanovich y Silvina Gretel Espil.

Diagramación: Alejandro Pescatore.

Corrección: Héctor Daniel Álvarez.

Ilustración: Archivo Santillana, Alejandro Pescatore (gráficos matemáticos).

Documentación fotográfica: Carolina S. Álvarez Páramo, Cynthia R. Maldonado y Noelia Rivera.

Fotografía: Archivo Santillana, Javier Jaime Sánchez, Klaus Eppele—Fotolia, Baldas—Fotolia.

Preimpresión: Marcelo Fernández, Gustavo Ramírez y Maximiliano Rodríguez.

Gerencia de producción: Gregorio Branca.

Este libro no puede ser reproducido total ni parcialmente en ninguna forma, ni por ningún medio o procedimiento, sea reprográfico, fotocopia, microfilmación, mimeógrafo o cualquier otro sistema mecánico, fotoquímico, electrónico, informático, magnético, electroóptico, etcétera. Cualquier reproducción sin permiso de la editorial viola derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

© 2016, EDICIONES SANTILLANA S.A.
Av. Leandro N. Alem 720 (C1001AAP),
Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.

ISBN: 978-950-46-5137-6
Queda hecho el depósito que dispone la Ley 11.723.
Impreso en Argentina. *Printed in Argentina*.
Primera edición: noviembre de 2016.

Jaller, Ariel R.
Entre números III / Ariel R. Jaller ; Martín Pérez.- 1a ed .-
Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Santillana, 2016.
160 p. ; 28 x 22 cm.- (Entre números)
ISBN 978-950-46-5137-6
1. Matemática. 2. Escuela Secundaria. I. Pérez, Martín II.
Título
CDD 510

Este libro se terminó de imprimir en el mes de noviembre de 2016, en
Arcángel Maggio – división libros, Lafayette 1695, Ciudad Autónoma de
Buenos Aires, República Argentina.



1 Divisibilidad de enteros. Números racionales

Esto ya lo sabía...	5
Matemundo	5
Números naturales y números enteros.	
Divisibilidad	6
Descomposición en factores primos	7
Múltiplos y divisores comunes	8
Números racionales	10
Pasaje de decimal a fracción	11
Racionales en la recta numérica	13
A ver cómo voy	
Repaso de páginas 5 a 14	15
Operaciones con números racionales	16
Potencias y raíces con racionales	20
Notación científica	22
A ver cómo voy	
Repaso de páginas 16 a 23	24
Repasso todo	25
Saquen una hoja	28

2 Lenguaje algebraico

Esto ya lo sabía...	29
Matemundo	29
Expresiones algebraicas	30
Operaciones con expresiones algebraicas	31
Propiedad distributiva y factor común	34
A ver cómo voy	
Repaso de páginas 29 a 35	36
Productos especiales	37
Ecuaciones	40
Inecuaciones	43
A ver cómo voy	
Repaso de páginas 37 a 44	45
Repasso todo	46
Saquen una hoja	48

3 Números reales

Esto ya lo sabía...	49
Matemundo	49
Números irracionales	50
Algunas representaciones	51
Operaciones con radicales	52
A ver cómo voy	
Repaso de páginas 49 a 53	54
Aproximaciones	55
Intervalos reales	57
A ver cómo voy	
Repaso de páginas 55 a 58	59
Repasso todo	60
Saquen una hoja	62

4 Funciones. Sistemas de ecuaciones

Esto ya lo sabía...	63
Matemundo	63
Funciones. Análisis de gráficos	64
Funciones y rectas	66
Paralelas y perpendiculares	69
A ver cómo voy	
Repaso de páginas 63 a 70	71
Sistemas de ecuaciones	72
Función cuadrática	76
A ver cómo voy	
Repaso de páginas 72 a 78	79
Repasso todo	80
Saquen una hoja	82

5 Figuras geométricas

Esto ya lo sabía...	83
Matemundo	83
Cuadriláteros	84
Propiedades de los polígonos	87
Teorema de Pitágoras	89
Perímetro y área de polígonos	90
A ver cómo voy	
Repaso de páginas 83 a 91	92
Circunferencias y rectas	93
Ángulos en la circunferencia	94
Puntos notables de un triángulo	97
A ver cómo voy	
Repaso de páginas 93 a 98	99
Repasso todo	100
Saquen una hoja	102

6 Movimientos

Esto ya lo sabía...	103
Matemundo	103
Simetrías	104
Rotación	107
A ver cómo voy	
Repaso de páginas 103 a 109	110
Traslaciones	111
Composición de movimientos	114
A ver cómo voy	
Repaso de páginas 111 a 116	117
Repasso todo	118
Saquen una hoja	120

7 Proporcionalidad, semejanza y trigonometría

Esto ya lo sabía...	121
Matemundo	121
Razones y proporciones	122
Relaciones proporcionales	123
Proporcionalidad de segmentos.	
Teorema de Thales	126
Figuras semejantes	128
A ver cómo voy	
Reparso de páginas 121 a 131	132
Razones trigonométricas	133
Resolución de triángulos rectángulos	135
A ver cómo voy	
Reparso de páginas 133 a 137	138
Reparso todo	139
Saquen una hoja	142

8 Estadística, combinatoria y probabilidad

Esto ya lo sabía...	143
Matemundo	143
Variables, tablas y gráficos estadísticos	144
Parámetros centrales	147
A ver cómo voy	
Reparso de páginas 143 a 149	150
Combinatoria	151
Probabilidad	153
A ver cómo voy	
Reparso de páginas 151 a 154	155
Reparso todo	156
Saquen una hoja	158
Respuestas de Saquen una hoja	159

Qué hay en cada capítulo

Esto ya lo sabía... y **Matemundo** para entrar en tema.



Explicaciones con ejemplos para estudiar.



Fijate bien

Alertas para no equivocarte.

En las actividades encontrarás...



Estrategias para ayudarte a resolverlas.



Hacé de profe para descubrir errores.



para usar la calculadora.



Tengo tarea para hacer en casa.



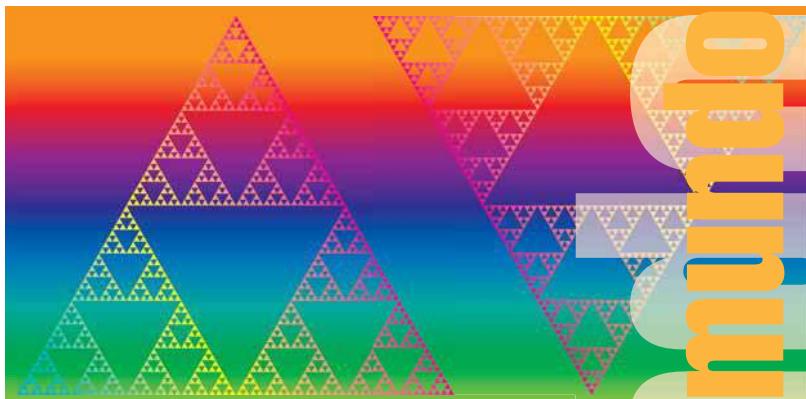
para sugerir el uso de GeoGebra.

Además, podés seguir practicando en **ver cómo voy** y **Reparso todo**.

Los capítulos finalizan con **Saquen una hoja**, para que te tomes una prueba. Las respuestas de estas actividades están en las páginas 159 y 160.

Esto ya lo sabía...

1. Martina, la profe de Educación Física, tiene 520 caramelos y quiere repartirlos por partes iguales entre sus alumnos.
 - a. En el turno mañana tiene 120 alumnos. ¿Podrá armar paquetes iguales sin que le sobre ningún caramelo?
 - b. Si en vez de repartirlos entre los alumnos del turno mañana, lo hiciera entre los del turno tarde, en el que tiene 130 alumnos, ¿podría armar los paquetes sin que le sobren caramelos?
 - c. Martina lo pensó mejor y decidió repartirlos entre los alumnos de uno solo de sus cursos, para que no les toquen tan poquitos caramelos a cada uno. La próxima semana les llevará a los restantes cursos. ¿En cuáles de estos podría repartirlos por partes iguales, sin que le sobren?
 - 3.º año A: 25 alumnos.
 - 3.º año B: 26 alumnos.
 - 3.º año C: 30 alumnos.
 - 3.º año D: 40 alumnos.
 - d. Considerá los cursos que seleccionaste en la actividad anterior. ¿Qué cantidad de caramelos le correspondería a cada uno de los alumnos de esos cursos?



Un fractal es una imagen que surge de la repetición de un proceso de construcción. En 1919, el matemático polaco Waclaw Sierpinski (1882-1969) construyó uno a partir de triángulos equiláteros, de esta forma: primero dibujó un triángulo equilátero (figura inicial). Luego unió los puntos medios de sus lados, formando cuatro triángulos equiláteros más pequeños, y quitó el central, dejando ese espacio vacío (figura 1). Después repitió el procedimiento en cada triángulo de la figura 1, obteniendo la figura 2, y así sucesivamente.

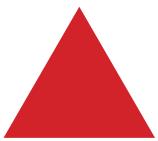


Figura inicial

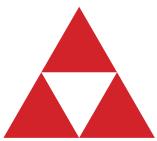


Figura 1



Figura 2

Considerá que el lado de la figura inicial mide 1 cm y respondé.

- ¿Cuál es la longitud de los lados de los triángulos de la figura 1? ¿Y de la figura 2?

Figura 1:

Figura 2:

- Si construyéramos las figuras 3 y 4, ¿cuáles serían las longitudes de los lados de los triángulos que las conforman?

Figura 3:

Figura 4:

Números naturales y números enteros. Divisibilidad



Los naturales y los enteros

- Los números naturales, 0, 1, 2, 3..., se representan con \mathbb{N} , y los enteros, 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3..., se representan con \mathbb{Z} . Como puede verse, todos los números naturales son también enteros, pero no al revés. Entre los números enteros, un número **a** es divisible por **b**, si puede escribirse como el producto entre **b** y otro número entero: 28 es divisible por 7 porque $28 = 7 \cdot 4$. También se dice que 7 y 4 son **divisores** de 28.

Primos y compuestos

- Entre los naturales, un número es **primo** cuando tiene dos divisores naturales: el propio número y 1. Por ejemplo, 3 es un número primo, ya que sus divisores son 3 y 1. En cambio, si tiene más de dos divisores naturales, es un **número compuesto**. Por ejemplo, 8 es un número compuesto porque tiene 4 divisores: 1, 2, 4 y 8. Los números **0** y **1** no son primos ni compuestos.
- Al trabajar con enteros, se dice que un número es **primo** cuando tiene cuatro divisores enteros: el propio número, su opuesto, 1 y -1. Por ejemplo, 3 también es un entero primo, ya que sus divisores enteros son 3, -3, 1 y -1. En este caso, también -3 es un primo (tiene los mismos divisores que 3). Y si tiene más de cuatro divisores enteros, es un **número compuesto**. Los números **0**, **1** y **-1** no son primos ni compuestos.

2. Se pueden encontrar los primos naturales menores que 100 a partir de la criba de Eratóstenes, un cuadro de números en el que se tachan los compuestos.

El 1 lo tacho porque no es primo ni compuesto.
El 2 es primo; no se tacha. Si salto en la tabla de dos en dos, todos esos números son compuestos porque son múltiplos de 2: los tacho a todos. Después, el primero que queda sin tachar es el 3, que también es primo; si ahora salto de tres en tres, todos serán múltiplos de 3 y también los tacho.

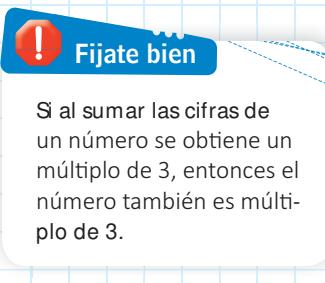


1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- a. Hacé como Eratóstenes y tachá los números que corresponde. ¿Cuál es el primero que queda sin tachar? ¿Es primo o compuesto? ¿Cómo te das cuenta? ¿Cada cuántos lugares tendrías que saltar ahora?
- b. Continuá con ese procedimiento hasta encontrar todos los números naturales primos menores que 100. Luego indicá, mirando el cuadro, cuáles son los enteros primos entre -100 y 100.
3. Ubicá estos números en la tabla, según sean primos o compuestos.

137 -3.261 525 -31 4.532 -51 -131 121 450

Primos	
Compuestos	



Si al sumar las cifras de un número se obtiene un múltiplo de 3, entonces el número también es múltiplo de 3.

Descomposición en factores primos



Expresando como producto

- Todo número compuesto positivo puede descomponerse en factores primos y escribirse como producto de dichos factores. Cuando se expresa de esta forma, se dice que el número está **factorizado**.

Por ejemplo, el número 60 puede expresarse a partir de diferentes productos. Algunos pueden ser:

$$60 = 30 \cdot 2$$

$$60 = 10 \cdot 6$$

$$60 = 15 \cdot 4$$

$$60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Sin embargo, solo en la última descomposición todos los factores son primos. En ese caso, se dice que el 60 está factorizado. También puede escribirse así: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ (**2**, **3** y **5** son sus factores primos).

- Sí el número es negativo, se factoriza como si fuese positivo y se multiplica por -1 . Por ejemplo, $-60 = (-1) \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

- Dani cocinó 54 galletitas y las quiere colocar en bolsitas, de manera que todas tengan la misma cantidad, sin que sobre ninguna.
 - Escribí todas las formas en que puede hacerlo.
 - ¿Y si las galletitas fueran 55?
 - ¿Y si fueran 53? ¿Tiene muchas formas?
- Factorizá estos números, es decir, expresalos como producto con todos los factores primos.
 - $74 =$
 - $576 =$
 - $408 =$
 - $101 =$
- Escribí un número de tres cifras que cumpla con lo que se pide en cada caso.
 - Un múltiplo de 6 y de 10, pero no de 4.
 - Un múltiplo de 23 y de 3, par y menor que 200.
- Hacé de prófe Mirá lo que dicen estos amigos. Explicá en qué se equivocan.

Para que un número sea primo, no puede ser par.

Y si es divisible por 5, es compuesto.

El 9 es primo: no es par y no es divisible por 5.



Lourdes



Esteban



Pilar



Fijate bien

Para no olvidarte de ningún divisor, te puede ayudar disponerlos así:

Divisores de 12
1 2 3 4 6 12

Todos los productos dan 12.



Tengo tarea

- Escribí todos los divisores de cada uno de estos números. Después factorizalos.

a. 70

b. 700

c. 350

Múltiplos y divisores comunes



Mínimo común múltiplo

- El **mínimo común múltiplo (m.c.m.)** entre dos o más números enteros es el menor de los múltiplos naturales que esos números tienen en común (sin considerar el 0).

Por ejemplo, el mínimo común múltiplo entre -12 y 15 es 60, ya que:

Múltiplos naturales de -12: 12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96; 108; 120; 132... } Entre los múltiplos de ambos se repiten 60, 120, y otros mayores. El menor es 60.
Múltiplos naturales de 30: 30; 60; 90; 120; 150...

Una forma más práctica de encontrar el m.c.m. consiste en hallar el producto entre los factores comunes y no comunes de la factorización de los números en cuestión, con su mayor exponente. Es decir:

$$\left. \begin{array}{l} -12 = (-1) \cdot 2^2 \cdot 3 \\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array} \right\} \text{m.c.m. } (-12; 30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Máximo común divisor

- El **máximo común divisor (m.c.d.)** entre dos o más números enteros es el mayor de los divisores que esos números tienen en común.

Por ejemplo, el máximo común divisor entre 48 y 60 es 12, ya que:

Divisores de 48: 1, 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48 } Los divisores que se repiten son 1, 2, 3, 4, 6 y 12. El más grande es 12.
Divisores de 60: 1, 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60

Una forma más práctica de obtener el m.c.d. es hallar el producto entre los factores comunes a la factorización de ambos, con su menor exponente, todos positivos. Es decir:

$$\left. \begin{array}{l} 48 = 2^4 \cdot 3 \\ 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array} \right\} \text{m.c.d. } (48; 60) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

- Todos los números tienen al menos un divisor común natural: 1. Si no tienen otros, se dice que los números son **coprimos** (no tienen primos en común).

9. Factorizá estos números. Despues hallá el m.c.m. y el m.c.d. que se indica en cada caso.

a. 120 y 84

b. 160 y 175

c. 180 y 840

$$120 =$$

$$160 =$$

$$180 =$$

$$84 =$$

$$175 =$$

$$840 =$$

$$\text{m.c.m. } (120; 84) =$$

$$\text{m.c.m. } (160; 175) =$$

$$\text{m.c.m. } (180; 840) =$$

$$\text{m.c.d. } (120; 84) =$$

$$\text{m.c.d. } (160; 175) =$$

$$\text{m.c.d. } (180; 840) =$$

10. **Hacé de profe** Juli dice que el m.c.m. entre dos o más números naturales siempre va a ser igual o mayor al mayor de ellos, mientras que el m.c.d. va a ser igual o menor al menor de ellos. ¿Tiene razón? ¿Cómo te das cuenta?

11. Leé atentamente estas situaciones y resolvelas usando múltiplos o divisores comunes.

- a. Cuatro barcos salen del mismo puerto. Uno de ellos sale cada 15 días; el segundo, cada 12; el tercero, cada 18 y el cuarto, cada 20 días. ¿Cada cuántos días salen los cuatro barcos a la vez?

b. En un supermercado mayorista hay 162 latas de puré de tomate, 270 botellas de aceite y 324 paquetes de fideos, con los que quieren lanzar una oferta de cajas que contengan los tres productos. Si desean armar la mayor cantidad de cajas posible, todas iguales, ¿cuántas podrán armar? ¿Cuántas unidades de cada artículo tendrá cada una?

c. ¿Cuál es el menor número mayor que 3 que dividido por 28 y 42 da como resto 3?

d. Ale quiere colocar cerámicas cuadradas en el piso de una habitación de 7 metros de largo y 5,4 metros de ancho. Desea usar la menor cantidad de cerámicas posible y no quiere cortarlas. ¿Qué dimensiones deben tener las cerámicas que tiene que comprar? ¿Cuántas serán necesarias?

e. Un carpintero quiere cortar trozos de madera de la misma medida, haciendo la menor cantidad de cortes posible. Para eso va a utilizar tres listones: uno de 101 cm; el otro de 129 cm y el restante de 157 cm. Entre los cortes y las irregularidades de los extremos se pierden 3 cm por listón. ¿De qué medida debe ser cada corte? ¿Cuántos trozos salen por listón?

12. ¿Cuántos años puede tener Flor? ¿Cómo te diste cuenta?



 Tengo tarea

13. ¿Verdadero o falso?

- a. m.c.m. (75; 150; 300) = 300
 - b. m.c.d. (7; 96; 240) = 12
 - c. Si el m.c.d. entre dos números es uno, entonces el m.c.m. se puede obtener multiplicando directamente los números.

Números racionales



Números que se escriben como fracción

- Los **números racionales** (que se representan con \mathbb{Q}) son los que pueden expresarse como una razón (división) entre dos números enteros, es decir, como una **fracción**.

Por ejemplo, 2, que es natural y entero, también es un número racional, ya que puede expresarse como $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{6}{3}$, etc. Lo mismo ocurre con cualquier otro natural (\mathbb{N}) o entero (\mathbb{Z}).

- Los racionales pueden expresarse, indistintamente, como fracción o a partir de su **expresión decimal**.

Por ejemplo, la fracción $\frac{1}{2}$ puede expresarse como decimal efectuando el cociente entre 1 y 2. Es decir, $\frac{1}{2} = 0,5$. Estas expresiones decimales pueden ser **exactas** (con una cantidad finita de cifras decimales, por ejemplo 1,85) o **periódicas** (cuando una o más cifras decimales se repiten indefinidamente).

A su vez, las expresiones decimales periódicas pueden ser **periódicas puras** (todas sus cifras decimales se repiten, por ejemplo $1,\overline{35} = 1,353535\dots$) o **periódicas mixtas** (algunas cifras decimales se repiten y otras, no. Por ejemplo $1,\overline{3}\overline{12} = 1,3121212\dots$).

- Entre dos números racionales siempre hay otro número racional. Por ejemplo, entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$, está $\frac{5}{12}$. Este es el número que está justo en la mitad, pero hay otros. Y entre $\frac{5}{12}$ y $\frac{1}{2}$ está $\frac{11}{24}$, entre otros. De esta manera se podría encontrar siempre un número racional entre otros dos. Por este motivo, se dice que los números racionales forman un **conjunto denso**.



14. Escribí la expresión decimal de cada una de estas fracciones.

a. $\frac{3}{2} =$

c. $-\frac{2}{5} =$

e. $\frac{4}{9} =$

g. $\frac{4}{7} =$

b. $-\frac{3}{4} =$

d. $\frac{1}{3} =$

f. $-\frac{101}{90} =$

h. $\frac{5}{6} =$

15. **Estrategia: analizar y comparar** Mirá los denominadores de las fracciones de la actividad anterior y las expresiones decimales que obtuviste. Ahora, sin pasar a decimal, completá la tabla indicando “sí” donde corresponda. ¡Atención! Asegurate de simplificar las fracciones todo lo que puedas antes de empezar.

Fracción	Exp. decimal exacta	Exp. decimal periódica
$\frac{16}{25}$		
$-\frac{35}{9}$		
$\frac{47}{20}$		
$-\frac{495}{990}$		
$\frac{600}{900}$		
$-\frac{495}{999}$		

Pasaje de decimal a fracción



Buscando la fracción

- Si un número racional tiene una **expresión decimal finita**, puede pasarse a fracción colocando el número (sin la coma) en el numerador, y en el denominador una potencia de 10 con exponente igual a la cantidad de cifras decimales.

$$1,3 = \frac{13}{10}$$

$$2,571 = \frac{2.571}{1.000}$$

- Si el número racional es una **expresión periódica pura**, en el numerador se coloca el número (sin la coma) y se le resta el número formado por las cifras que no están afectadas por el período. En el denominador se colocan tantos nueves como cifras periódicas haya.

$$2,\overline{5} = \frac{25 - 2}{9} = \frac{23}{9}$$

$$21,\overline{37} = \frac{2.137 - 21}{99} = \frac{2.116}{99}$$

- Si el número racional es una **expresión periódica mixta**, en el numerador se coloca el número (sin la coma) y se le resta el número formado por las cifras que no están afectadas por el período. En el denominador se colocan tantos nueves como cifras periódicas haya y tantos ceros como cifras no periódicas decimales existan.

$$1,8\overline{5} = \frac{185 - 18}{90} = \frac{167}{90}$$

$$3,\overline{234} = \frac{3.234 - 32}{990} = \frac{3.202}{990} = \frac{1.601}{495}$$

16. Pasá estas expresiones decimales a fracción. Despues simplificalas hasta obtener una fracción irreducible, es decir, hasta que ya no puedan seguir simplificándose.

a. $0,6 =$

d. $5,25 =$

b. $1,8 =$

e. $18,64 =$

c. $2,3 =$

f. $-135,75 =$



17. Pasá a fracción las siguientes expresiones decimales periódicas. Verificá con la calculadora. Despues simplificalas hasta hacerlas irreducibles.

a. $0,\overline{7} =$

e. $24,1\overline{57} =$

b. $3,\overline{6} =$

f. $35,0\overline{25} =$

c. $-2,\overline{54} =$

g. $-21,1\overline{645} =$

d. $-1,1\overline{7} =$

h. $34,00\overline{7} =$



Fijate bien

A las expresiones decimales periódicas se las menciona simplemente como "números periódicos".

18. Completá los numeradores o denominadores faltantes para que se verifique cada igualdad.

a. $0,4 = \frac{\dots}{35} = \frac{\dots}{105} = \frac{56}{\dots} = \frac{\dots}{1.400}$

b. $1,8 = \frac{\dots}{5} = \frac{\dots}{55} = \frac{18}{\dots} = \frac{\dots}{350}$

c. $0,5\bar{3} = \frac{24}{\dots} = \frac{96}{15} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{16}{\dots}$

d. $-0,0\bar{5} = -\frac{35}{90} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{700}{450} = \frac{\dots}{\dots}$

! Fijate bien

Recordá que dos fracciones son equivalentes cuando, al dividir el numerador por el denominador, se obtiene la misma expresión decimal.

19. Estrategia: expresar todos los números de la misma forma Ordená estos números de menor a mayor.

$4,5$ $\frac{5}{3}$ $0,0\bar{0}\hat{7}$ $-\frac{4}{3}$ $-1,3$ $-\frac{85}{99}$ $\frac{7}{99}$ 0

20. En este dominó racional hay un error. ¿Cuál? Acordate de que para colocar una ficha al lado de la otra, los valores que se juntan deben coincidir.



21. Volvé a mirar el dominó de la actividad anterior. ¿Cuál pudo haber sido la primera ficha jugada, si tiene los dos valores iguales? ¿Hay una sola posibilidad?

22. Hacé de profe Sin pasar la fracción a decimal, señalá quién o quiénes tienen razón.

La fracción $\frac{34}{75}$ es irreducible.

Y sin hacer cuentas, ves que si la pasás a decimal, no tenés un periódico, porque el denominador no es 9 ni 90, ni...

Sí es periódico, porque el denominador no es divisor de 10 ni de 100, ni de otra potencia de 10.



Jimé



Alejo



Joel

Racionales en la recta numérica



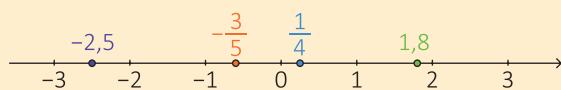
Representación en la recta

- Para representar un número racional en la recta numérica, se puede trabajar con su expresión fraccionaria. Para eso se divide cada unidad –es decir, la distancia entre dos números enteros consecutivos– en la cantidad de veces que indica el denominador de la fracción y se cuentan a partir de cero tantas partes como lo indique el numerador.

Por ejemplo, para representar $\frac{7}{4}$ se divide cada unidad en 4 partes iguales y se ubica el número en la séptima de esas partes, contada desde cero.



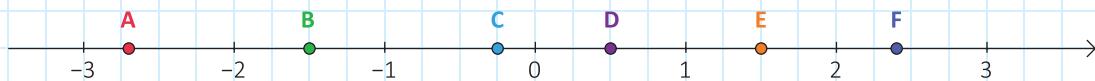
La representación de los números en la recta numérica permite ordenarlos “a simple vista” considerando que, entre dos números, el mayor de ellos es el que se encuentra ubicado a la derecha.



En la representación anterior se ve que $-2,5$ es el menor de los números representados, y $1,8$ es el mayor.

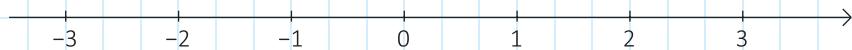
23. Completá la tabla señalando qué letra corresponde a cada número, según su ubicación en la recta numérica.

Número	$\frac{1}{2}$	-0,25	$\frac{12}{5}$	-1,5	$\frac{3}{2}$	-2,7
Letra						



24. Representá los siguientes números racionales en la recta numérica.

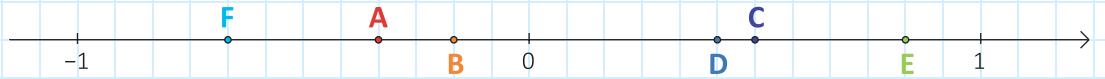
$$\frac{4}{3} \quad -\frac{15}{6} \quad 0,\bar{3} \quad -0,5 \quad -\frac{5}{2} \quad -1,\bar{6} \quad 3,5$$



Fijate bien

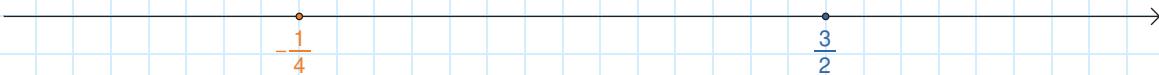
Para representar todas las fracciones en la misma recta, te puede resultar más fácil si encontrás fracciones equivalentes a las que tenés que representar, todas con el mismo denominador.

25. Escribí las fracciones irreducibles que representan cada una de las letras marcadas en la recta numérica.



A → **B →** **C →** **D →** **E →** **F →**

26. Ubicá en la recta numérica los números enteros entre los que se encuentran estas fracciones.



27. Ordená los números que se indican en cada caso y después encontrá otros dos que estén entre ambos.

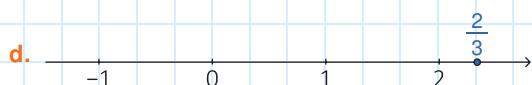
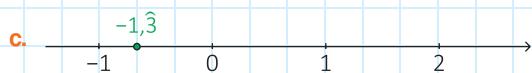
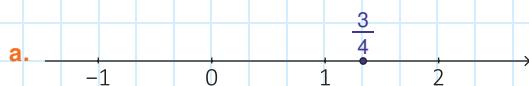
a. $0.\overline{4}$ y $0,4$

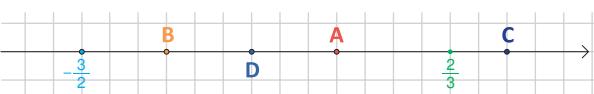
c. $1,0\overline{2}$ y $1,\overline{02}$

b. $0,\overline{4}$ y $0,\overline{5}$

d. $-1,10$ y $-1,\overline{10}$

28. **Hacé de profe** Milena representó algunos números, pero casi todos le salieron mal. ¿Cuál es el correcto? ¿Cuál fue su error en cada uno de los otros? ¿Cuál es el número que corresponde a cada uno de los puntos que marcó Milena?



- 29.** Escribí todos los divisores enteros de cada uno de estos números. ¿Alguno es primo?
- a. 45 b. 102 c. 31 d. 100
- 30.** Determiná cuáles de estos números son primos.
- a. 171 b. 702 c. 123 d. 103
- 31.** Indicá cuáles de los siguientes números son múltiplos de ocho.
- a. 4.500 c. 31.250
- b. 4.200 d. 17.496
- 32.** Hallá el m.c.m. y el m.c.d. de estos números.
- | Números | m.c.m. | m.c.d. |
|-----------------|--------|--------|
| 250; 100 | | |
| 350; 105 | | |
| 75; 600; 60 | | |
| 140; 64; 500 | | |
| 700; 380; 1.250 | | |
- 33.** Planteá y resolvé las siguientes situaciones.
- a. Tres amigos viajan a Córdoba para trabajar. Uno de ellos viaja cada 15 días, el segundo cada 12 y el restante cada 35 días. ¿Cuántas veces al año viajan juntos?
- b. Una chapa de 120 cm de largo por 252 cm de ancho, se quiere dividir en cuadrados iguales, sin que sobre nada. ¿Qué es la mayor medida que puede tener el lado de cada cuadrado? ¿Cuántos cuadrados pueden obtenerse?
- c. Octavio tiene cuatro tanques llenos de aceite de 72 litros, 24 litros, 56 litros y 120 litros, cada uno. Con ese aceite quiere llenar bidones, todos de la misma capacidad, sin mezclar los aceites. Si tiene bidones de 4 litros, 6 litros, 8 litros y 12 litros, ¿cuál le conviene utilizar para cargar la menor cantidad de bidones y que todos queden llenos? ¿Cuántos bidones de cada aceite tendrá?
- 34.** Clasificá las siguientes fracciones en expresiones decimales exactas (**DE**), expresiones decimales periódicas puras (**PP**) o expresiones decimales periódicas mixtas (**PM**), según corresponda.
- a. $\frac{54}{9} \rightarrow$ d. $\frac{99}{9900} \rightarrow$
- b. $\frac{60}{90} \rightarrow$ e. $\frac{481}{198} \rightarrow$
- c. $\frac{35}{900} \rightarrow$ f. $\frac{925}{3663} \rightarrow$
- 35.** Encontrá la fracción irreducible equivalente a cada una de estas expresiones decimales.
- a. $0,\overline{58} =$ f. $0,\overline{32} =$
- b. $1,\overline{02} =$ g. $1,\overline{32} =$
- c. $-2,\overline{001} =$ h. $1,\overline{032} =$
- d. $-2,\overline{25} =$ i. $1,\overline{0032} =$
- e. $0,\overline{32} =$ j. $0,\overline{9} =$
- 36.** Mirá el último número periódico de la actividad anterior. ¿Qué otra expresión decimal creés que puede representar al número $2,\overline{9}$? ¿Y al $2,\overline{19}$? Verificá tu suposición pasándolos a fracción.
- 37.** ¿Cuáles son los números representados?
- 
- 38.** Obtené tres fracciones que estén entre los números que se indican en cada caso.
- a. $\frac{41}{98}$ y $0,\overline{5}$ b. $0,1$ y $0,\overline{1}$
- 39.** Ordená de mayor a menor estos números.
- $-0,\overline{5}$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{226}{90}$ $-0,\overline{1}$ 0 $-1,\overline{32}$

Operaciones con números racionales



Las cuatro operaciones básicas con fracciones

- Para sumar y restar fracciones, se puede trabajar con fracciones equivalentes de igual denominador:

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \frac{5}{12} = \frac{18}{12} + \frac{4}{12} - \frac{5}{12} = \frac{18+4-5}{12} = \frac{17}{12} \rightarrow \text{Conviene usar como denominador común el m.c.m. de los denominadores.}$$

- Para multiplicar fracciones, se multiplican por un lado los numeradores y por otro, los denominadores:

$$\frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{7}{\cancel{6}} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 3} = \frac{14}{9} \rightarrow \text{Es conveniente simplificar cualquier numerador con cualquier denominador antes de multiplicar.}$$

- Y para dividirlas, se multiplica la primera por la inversa de la segunda (es decir, se invierte la segunda fracción y se multiplica):

$$\frac{5}{2} : \frac{4}{7} = \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{4} = \frac{35}{8}$$

Operaciones combinadas

- Si hay operaciones combinadas entre expresiones fraccionarias y expresiones decimales, resulta conveniente pasar las expresiones decimales a fracciones antes de resolver el cálculo.

Además, debe respetarse el **orden** de las operaciones: primero las multiplicaciones y divisiones, luego las sumas y las restas, a menos que los paréntesis indiquen lo contrario.

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{2}{3} - \frac{5}{6} = \frac{4-5}{6} = -\frac{1}{6}$$

Aunque en el cálculo apareza primero la resta, debe realizarse la multiplicación antes de restar.

40. Indicá la respuesta correcta de cada uno de estos cálculos.

a. $-\frac{5}{4} + \frac{2}{3}$

d. $0,3 + \frac{1}{4} - 1,7$

I. $-\frac{23}{2}$

II. $\frac{7}{12}$

III. $-\frac{7}{12}$

I. $\frac{85}{36}$

II. $-\frac{85}{36}$

III. $-\frac{43}{36}$

b. $-\frac{3}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3}$

e. $-3,2 + 2,74 - \frac{1}{2}$

I. $\frac{23}{24}$

II. $-\frac{23}{12}$

III. $\frac{23}{12}$

I. $-\frac{97}{15}$

II. $\frac{44}{45}$

III. $-\frac{44}{45}$

c. $-2 + \frac{3}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{5}$

f. $6,32 + 1,8 - 2,9$

I. $-\frac{21}{20}$

II. $-\frac{1}{2}$

III. $\frac{21}{20}$

I. $-\frac{461}{90}$

II. $\frac{461}{90}$

III. $\frac{2.251}{495}$

41. ¿Cuál es la respuesta correcta?

a. $-\frac{96}{25} \cdot \frac{5}{24} \cdot \left(-\frac{5}{7}\right)$

I. $\frac{4}{7}$

II. $\frac{28}{25}$

III. $-\frac{4}{7}$

d. $0,75 \cdot (-0,36) \cdot (-3,8)$

I. $\frac{209}{55}$

II. $\frac{57}{55}$

III. $-\frac{15}{209}$

b. $\frac{36}{49} : \left(-\frac{18}{7}\right)$

I. $\frac{2}{7}$

II. $\frac{648}{343}$

III. $-\frac{2}{7}$

e. $-\frac{27}{8} \cdot (-0,04) : (-1,25)$

I. $\frac{3}{25}$

II. $-\frac{3}{25}$

III. $-\frac{6}{55}$

c. $-2,4 : (-0,08)$

I. $\frac{55}{2}$

II. $\frac{22}{5}$

III. $\frac{16}{75}$

f. $\frac{85}{27} : 0,96 : (-0,5)$

I. $-\frac{187}{32}$

II. $\frac{544}{99}$

III. $-\frac{544}{99}$

42. ¿Cuántos años tiene cada uno?

El cociente entre la edad de mi mamá y la de su hermana Sol es igual a la diferencia entre doce quintos y tres cuartos. Si mamá tiene 33 años, ¿cuántos tiene Sol?



Claudio

Ja, ja, ja. Ya empezaste con tus adivinanzas. A ver si averiguás cuántos tiene Juani, mi primo, si el cociente entre mi edad y la suya es igual al triple de cinco cuartos, menos un medio. Ya sabés que yo tengo 13.



Aldana

Así que quieren adivinanzas numéricas. ¿Qué tal esta? Si al producto entre diecinueve séptimos y siete cuartos le resto tres, obtengo el cociente entre las edades de mis dos hermanos. ¡Ah! El menor tiene la misma edad que Juani. ¿Cuántos años tiene el otro?



Sole

43. **Hacé de profe** Cris resolvió la siguiente suma y simplificó hasta llegar al resultado. ¿Es correcto lo que hizo? ¿Por qué? Si no es correcto, resolvelo bien.

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{9+4}{12} = \frac{3+4}{4} = \frac{3+4}{4} = \frac{3+1}{1} = \frac{4}{1} = 4$$

44. Resolvé.

a. $\frac{3}{4} \cdot \frac{16}{9} - \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{20} =$

b. $\frac{36}{25} : \frac{6}{5} - 8 \cdot \frac{3}{4} =$

! Fijate bien

Para no olvidarse de respetar el orden de las operaciones, hay que separar en términos, es decir, lo que está entre los signos + y -.

$$\frac{1}{2} \textcolor{green}{\circlearrowleft} \frac{8}{3} : \frac{4}{3}$$

Dos términos.

45.  Hacé de profe Indicá si los resultados de los cálculos son correctos. En caso de no serlo, resolvélos bien.

a. $\frac{7}{4} \left(-\frac{2}{5} \right) - \frac{3}{8} : \frac{9}{4} = -\frac{13}{15}$

b. $-0,2 - 0,8 : \frac{4}{9} + 0,3 = -\frac{22}{10}$

c. $-0,2 + 8,3 : 1,84 = 0$

d. $-\frac{14}{9} : 0,6 + 0,8 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) = \frac{11}{3}$



46. Martina faltó a la escuela, pero copió los cálculos que hicieron en clase con sus resultados para hacerlos y ver si le salen bien. Sin embargo, en algunos casos se olvidó de colocar los paréntesis. ¿En cuáles? Cuando hagan falta, poné los paréntesis donde correspondan para que los cálculos coincidan con los resultados que anotó.

a. $\frac{3}{4} \cdot 0,2 + 1 = \frac{11}{12}$

c. $5 \cdot 0,4 - 1,1 = \frac{10}{9}$

b. $0,7 \cdot \frac{3}{4} : \frac{1}{2} + 1 = \frac{35}{18}$

d. $4,3 + 2 \cdot 5,4 - \frac{1}{2} = \frac{128}{9}$

47. Resolvé estos cálculos combinados.

a. $\frac{16}{7} \cdot \frac{32}{14} - \frac{12}{25} \cdot \frac{5}{24} =$

f. $0,4 \cdot \frac{9}{2} - 3,5 + 2,31 =$

b. $-\frac{13}{25} \cdot \frac{125}{26} - \left(-2 + \frac{3}{4} \right) =$

g. $-1 : (-0,1) - 0,7 : (-1) - 1 =$

c. $0,7 \cdot \frac{5}{2} + \frac{3}{4} : 9 - 2,4 =$

h. $-0,75 \cdot (1 + 0,3) - 0,4 : \left(-\frac{2}{3} \right) =$

d. $-\frac{15}{8} : \left(-\frac{5}{4} \right) - \frac{3}{2} \left(-\frac{8}{9} \right) \left(-\frac{3}{4} \right) + 1 =$

i. $0,8 : 0,3 - \frac{3}{5} \cdot 0,5 + \left(-\frac{12}{7} \right) : (-2) =$

e. $-0,3 + 0,7 - \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{9} =$

j. $3,272 : \left(-\frac{6}{11} \right) - \left(-\frac{8}{3} \right) \cdot 0,3 - (-0,5) =$

Potencias y raíces con racionales



Más operaciones con fracciones

- Tanto en la potenciación como en la radicación de expresiones fraccionarias, la potencia o la raíz se aplican al numerador y al denominador. Además, siempre hay que considerar el signo de la base antes de resolver:
 - en las potencias, si el exponente es par, el resultado siempre es positivo, y si es impar, el resultado tiene el mismo signo que la base;
 - las raíces de índice par de números negativos no pueden calcularse, y en todos los otros casos, la base y el resultado tienen el mismo signo.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = +\frac{4}{9}$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{64}} = \frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{64}} = \frac{1}{8}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt[5]{-\frac{32}{243}} = -\frac{2}{3}$$

$$\sqrt[4]{-\frac{1}{16}} \rightarrow \text{no se puede calcular.}$$

- Sí en la potenciación el exponente es cero, al igual que en los números enteros, el resultado es 1: $\left(-\frac{3}{4}\right)^0 = 1$.

Potenciación de exponente negativo y de exponente fraccionario

- Sí el exponente es un entero negativo, se invierte la fracción de la base y se eleva al mismo exponente, pero positivo. Y si en el exponente hay una fracción, la potencia se puede escribir como una raíz: el numerador del exponente se toma como exponente de la base y el denominador, como índice de la raíz. Esto solo puede realizarse cuando la raíz se puede calcular.

$$\left(\frac{7}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{7}\right)^1 = \frac{5}{7}$$

$$(-3)^{-2} = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$a^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{a^7}$$

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Propiedades de la potenciación y la radicación

- Son las mismas que las de los números enteros. Debe recordarse que en el caso de las raíces, las propiedades solo pueden aplicarse cuando cada una de las raíces puede calcularse.

Producto de potencias de igual base

$$\left(\frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^{1+3} = \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}$$

Cociente de potencias de igual base

$$\left(\frac{2}{3}\right)^7 : \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{7-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

Potencia de otra potencia

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot 3} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

Producto de raíces de igual índice

$$\sqrt[5]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{16}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$$

Cociente de raíces de igual índice

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{81}} : \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{81} : \frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$$

Raíz de otra raíz

$$\sqrt[3]{\sqrt[6]{\frac{1}{64}}} = \sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2}$$

48. Resolvé aplicando propiedades.

a. $\left(-\frac{3}{4}\right)^{16} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 : \left(-\frac{3}{4}\right)^{15} =$

c. $\sqrt{\frac{144}{81} : \frac{196}{121}} =$

b. $\left[\left(\frac{7}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^6\right]^2 : \left(\frac{7}{5}\right)^{14} =$

d. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2.048}} : \sqrt[6]{\sqrt[2]{\frac{1}{2}}} =$



Las fracciones siempre se encierran entre paréntesis cuando se las eleva a cualquier potencia, al igual que los enteros negativos.

49. Estrategia: pensalo al revés Expresá estas raíces como potencias de exponente fraccionario, simplificá las fracciones y resolvé.

a. $\sqrt[12]{\left(\frac{1}{4}\right)^6} =$

c. $\sqrt[9]{\left(-\frac{1}{8}\right)^3} =$

b. $\sqrt[5]{\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}} =$

d. $\sqrt[14]{\left(\frac{1}{16}\right)^7} =$

50. Indicá si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificá tu respuesta.

- a. La raíz cuadrada de una suma de fracciones es igual a la suma de las raíces cuadradas de cada fracción.
- b. Si el exponente de un número es 0,2, entonces se está hallando la raíz quinta de ese número.

51. Resolvé estos cálculos combinados.

a. $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} - \left(\frac{4}{5}\right)^{-1} + 0,2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} =$

e. $0,05 - \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right]^3 : \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right]^2 + \sqrt{\frac{1}{27}} : \sqrt{\frac{1}{3}} =$

b. $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^4 : \left(-\frac{1}{2}\right)^{10} + \sqrt[5]{-\frac{1}{32}} - \left(\frac{7}{4}\right)^0 =$

f. $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right]^2 : \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right]^2 + \sqrt[5]{-\frac{243}{32}} =$

c. $\sqrt[3]{\frac{3}{32}} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{2}} - \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} : \frac{5}{2} =$

g. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} : \left(\frac{3}{2}\right)^3 - \sqrt{\frac{16}{25}} \cdot \sqrt{\frac{9}{49}} - 0,62 =$

d. $(0,5)^{-1} : \frac{18}{25} + \sqrt[3]{\frac{1}{64}} + \sqrt{16+9} =$

h. $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \cdot \sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}\right)^{12}} - \sqrt[12]{\left(\frac{1}{8}\right)^9} : \sqrt[12]{\left(\frac{1}{8}\right)^5} =$

Notación científica



Otra forma de expresar números grandes y pequeños

- Para números muy pequeños o muy grandes, se utiliza la **notación científica**.

Escribir un número positivo en notación científica consiste en expresarlo mediante la multiplicación entre un número mayor o igual a uno y menor que diez, y una potencia de 10. Si el número es negativo, se pasa a notación científica sin considerar el signo y luego se lo agrega adelante.

$$0,00003 = 3 \cdot 10^{-5}$$

$$-4.800.000 = -4,8 \cdot 10^6$$

En la mayoría de las calculadoras, estos números pueden ingresarse presionando algunas teclas:

$$3 \cdot 10^{-5} \rightarrow \boxed{3} \quad \boxed{\text{EXP}} \quad \boxed{-} \quad \boxed{5}$$

$$-4,8 \cdot 10^6 \rightarrow \boxed{-} \quad \boxed{4} \quad \boxed{.} \quad \boxed{8} \quad \boxed{\text{EXP}} \quad \boxed{6}$$

52. Escribí en notación científica los siguientes números.

a. $34.000.000 =$

d. $0,0000035 =$

b. $0,0000007 =$

e. $4.781.000 =$

c. $287.000.000 =$

f. $0,00003478 =$

53. Escribí todas las cifras de los siguientes números.

a. $3,9 \cdot 10^8 =$

d. $7,629 \cdot 10^{-8} =$

b. $8,2 \cdot 10^{-5} =$

e. $3,4285 \cdot 10^{10} =$

c. $3,48 \cdot 10^9 =$

f. $1,34506 \cdot 10^{-9} =$

54. Expresá en notación científica.

a. La superficie de la Tierra: $510.100.000 \text{ km}^2 \rightarrow$

b. El tamaño del virus de la gripe: $0,0000001 \text{ m} \rightarrow$

c. La temperatura del núcleo del Sol: $15.500.000^\circ \text{ C} \rightarrow$

55. **Hacé de profe** Mara expresó algunos números en notación científica, aunque no todos están bien. Corregilos.

a. $0,000000012 = 1,2 \cdot 10^8$

b. $-0,0000000033 = -3,3 \cdot 10^{-9}$

c. $25.000.000.000 = 25 \cdot 10^9$

56. Vero quiere calcular a cuántos kilómetros equivale un año luz, es decir, cuántos kilómetros recorre la luz en un año, y expresarlo en notación científica. Ya averiguó que la luz viaja a 300.000 kilómetros por segundo, pero le falta hacer algunas cuentas. Ayudala.

a. ¿Cuántos segundos hay en un año?

b. ¿A cuántos kilómetros equivale un año luz?



57. Resolvé estos cálculos utilizando las propiedades de la potenciación y expresá los resultados en notación científica. Después verificalos con la calculadora.

a. $(4,3 \cdot 10^8) \cdot (3,6 \cdot 10^7) : (7,4 \cdot 10^6) =$

b. $(3,3 \cdot 10^{-7}) \cdot (4,5 \cdot 10^{15}) : (5,2 \cdot 10^{-9}) =$

c. $\frac{(2,7 \cdot 10^3) \cdot (7,1 \cdot 10^{-8})}{(2,9 \cdot 10^{-4}) \cdot (5 \cdot 10^{-6})} =$

d. $\frac{(5,2 \cdot 10^{-3}) \cdot (4,3 \cdot 10^7) \cdot (3,8 \cdot 10^{-2})}{(6,3 \cdot 10^{-2}) \cdot (1,8 \cdot 10^{12}) \cdot (7 \cdot 10^4)} =$



Tengo tarea



58. Resolvé y expresá los resultados en notación científica.

a. $3.500 \cdot 1.857 \cdot 546.000$

b. $0.000028 \cdot 36.000 : 0.004$

c. $\frac{25.000 \cdot 3.200 \cdot 45.700}{0.0002 \cdot 0.000047}$

d. $\frac{0,0049 \cdot 0,000321 \cdot 0,045}{34.700 \cdot 16.805}$

- 59.** Resolvé estas sumas y restas. Expresá los resultados a partir de una fracción irreducible.

a. $-0,\overline{27} + 0,\overline{8} - 2,\overline{74}$

b. $-3,2\overline{4} - 1,7 + \frac{5}{2}$

c. $-\frac{9}{5} + 1,7\overline{45} - 0,\overline{9}$

- 60.** Resolvé estas multiplicaciones y divisiones. Expresá los resultados a partir de una fracción irreducible.

a. $\frac{25}{2} \cdot \frac{30}{5} : \frac{15}{4}$

b. $0,1 \cdot 0,\overline{2} \cdot 1,4\overline{3} : \frac{4}{81}$

c. $0,1 \cdot 0,\overline{72} : 1,3\overline{21} \cdot \frac{9}{4}$

- 61.** Planteá los siguientes cálculos y resolvélos.

- a. A la diferencia entre dos décimos y ocho quintos se le agrega una unidad.
- b. La mitad del cociente entre cuatro tercios y dos novenos.
- c. La quinta parte del producto entre siete décimos y cinco medios.

- 62.** Resolvé los siguientes cálculos combinados.

a. $\frac{3}{4} : \frac{9}{16} - \frac{7}{5} \cdot \frac{2}{35} - 4$

b. $1,\overline{4} : 2,5 - \frac{9}{40} \cdot 7,\overline{1} - 1$

c. $-2,\overline{3} + 0,5 \cdot 3,\overline{2} - 1,4\overline{2} : 0,2$

d. $0,\overline{3} \cdot 1,\overline{3} - 0,3\overline{8} + 0,2 : \frac{9}{2}$

- 63.** Simplificá las siguientes expresiones; si es posible, resolvé.

a. $\sqrt[7]{\left(-\frac{1}{2}\right)^{14}}$

d. $\sqrt[6]{(0,\overline{1})^3}$



- 68.** Resolvé expresando en notación científica. Verificá con la calculadora.

a. $\frac{74.800 \cdot 4.300}{0,0002}$

c. $\frac{37.844 \cdot 240.000}{0,0001 \cdot 0,0244}$

b. $\frac{0,0007 \cdot 0,000034}{120.000}$

b. $\sqrt[8]{\left(\frac{4}{9}\right)^4}$

e. $\sqrt[4]{(-0,\overline{4})^2}$

c. $\sqrt[18]{\left(-\frac{1}{8}\right)^6}$

f. $\sqrt[4]{(7,\overline{1})^2}$

- 64.** Resolvé aplicando propiedades.

a. $\left(\frac{3}{5}\right)^{18} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4 : \left(\frac{3}{5}\right)^{19}$

b. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^4 : \left[\left(\frac{2}{3}\right)^9\right]^2$

c. $\sqrt[3]{-\frac{4}{11}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{121}}$

d. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\frac{1}{128}}} : \sqrt[3]{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}$

- 65.** Resolvé los siguientes cálculos combinados.

a. $\sqrt[3]{-\frac{1}{343}} \cdot 0,\overline{7} + \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot 2^{-5}$

b. $\sqrt[5]{\frac{243}{32}} - \left(-\frac{5}{4}\right)^{-1} - 0,\overline{7} : 0,\overline{4}$

c. $\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^4\right]^3 : \left[\left(-\frac{3}{2}\right)^5\right]^2 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{2}\right)^0$

d. $\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{1}{128}} : \sqrt[6]{\frac{1}{2}} - 1,4$

- 66.** Martín dice que al mirar el cálculo sabe el resultado sin hacer cuentas. ¿Cómo lo sabe?

$$\left(\frac{\sqrt[7]{-\frac{1}{128}} : 3,1\overline{57} + \frac{25}{47} \cdot 4,2^{-5}}{412,1\overline{56}} \right)^0$$

- 67.** Pasá estos números a notación científica.

a. 320.000

c. 3.547.000.000

b. 0,000047

d. 0,000237



- 69.** Determiná si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas. Podés ayudarte con la calculadora.

- a. 34.479 es número primo.
- b. 101 es número compuesto.
- c. 4.420 es número primo.
- d. 17.001 es número compuesto.

- 70.** Indicá cuáles de estos números son múltiplos de 6.

- | | |
|----------|-----------|
| a. 840 | c. 3.465 |
| b. 3.240 | d. 14.560 |

- 71.** Descomponé estos números en sus factores primos.

- | | |
|--------|----------|
| a. 204 | c. 525 |
| b. 320 | d. 1.000 |

- 72.** Hallá el m.c.m. y el m.c.d. de estos números.

- | | |
|-----------------|------------------------|
| a. 245 y 320. | c. 408; 304 y 1.200. |
| b. 480 y 2.300. | d. 3.400; 1.600 y 650. |

- 73.** Planteá y resolvé las siguientes situaciones.

- a. César tiene 320 películas de terror, 250 comedias y 180 de ciencia ficción. Quiere armar cajas que tengan películas de los tres tipos y que en todas haya, de cada género, la misma cantidad. ¿Cuál es la mayor cantidad de cajas que puede utilizar para ello? ¿Cuántas películas de cada género habrá en cada caja?
- b. Ayelén compra un paquete de yerba cada veinte días, uno de azúcar cada treinta días y un frasco de café cada treinta y ocho días. Si hoy compró las tres cosas juntas, ¿dentro de cuántos años volverá a comprar las tres cosas a la vez? ¿Por qué?
- c. A Cami le regalaron una caja de bombones. Para no comerlos todos juntos, pensó en separarlos en tres partes iguales, pero le sobraba uno. Entonces, se le ocurrió repartirlos en cinco, para comerlos de lunes a viernes. Esta vez, si los repartía en partes iguales, le sobraban dos. Finalmente se dio cuenta de que si los separaba en ocho partes iguales, no le sobraba ninguno. ¿Cuántos bombones había en la caja, si eran menos de 200?

- 74.** ¿Cuáles de las siguientes fracciones son expresiones decimales exactas? Rodealas.

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| a. $\frac{5}{3}$ | d. $\frac{-28}{15}$ |
| b. $-\frac{150}{900}$ | e. $\frac{4.500}{13.500}$ |
| c. $\frac{9.000}{9.900}$ | f. $\frac{4.950}{990}$ |

- 75.** ¿Cuáles de las fracciones de la actividad anterior corresponden a expresiones decimales periódicas puras?

- 76.** Encontrá las fracciones irreducibles equivalentes a estas expresiones decimales y escribíalas al lado de cada una.

- | | |
|-----------|-------------|
| a. 3,4 → | d. 140,87 → |
| b. 27,8 → | e. 20.001 → |
| c. 74,1 → | f. 30,28 → |

- 77.** Escribí al lado de cada una de estas fracciones la expresión decimal equivalente.

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| a. $\frac{34}{18} =$ | d. $\frac{40}{1.200} =$ |
| b. $-\frac{200}{185} =$ | e. $-\frac{2.000}{300} =$ |
| c. $\frac{308}{105} =$ | f. $\frac{405}{9.900} =$ |

- 78.** Al lado de cada uno de estos números periódicos escribí la fracción irreducible equivalente.

- | |
|-----------------------------------|
| a. $0,\overline{8} =$ |
| b. $2,\overline{6} =$ |
| c. $3,\overline{7}\overline{2} =$ |
| d. $1,8\overline{2} =$ |



Repaso todo

- 79.** Esribí cinco fracciones que estén entre los siguientes pares de números.

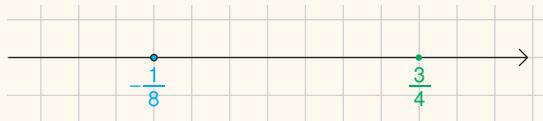
a. $-\frac{22}{30}$ y $-\frac{21}{30}$. c. $0,1$ y $0,\bar{1}$.

b. $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$. d. $1,\widehat{45}$ y $\frac{35}{22}$.

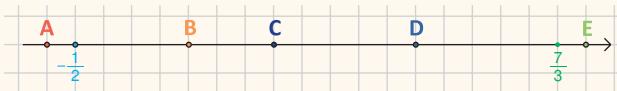
- 80.** Ordená estos números de menor a mayor.

$$\begin{array}{cccc} -\frac{21}{5} & 0,\bar{7} & -3,1\bar{2} & 0,3 \\ -\frac{4}{3} & 0,6 & -3,\bar{1} & -\frac{30}{9} \end{array}$$

- 81.** Colocá en la recta los números enteros entre los que se encuentran estas fracciones.



- 82.** Indicá el número racional (en fracción y expresión decimal) que representa cada letra.



- 83.** Ubicá los siguientes números en la misma recta numérica.

$$\begin{array}{cccc} 0,\bar{6} & -0,5 & \frac{1}{3} & -0,\bar{3} \\ \frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & \end{array}$$

- 84.** ¿Verdadero o falso?

- a. Cualquier fracción positiva con el numerador mayor que el denominador está entre 0 y 1.
- b. Si una fracción irreducible tiene 10 en el denominador, entonces equivale a una expresión decimal exacta.
- c. Si el denominador de una fracción es 9 y el de otra es 10, entonces la primera equivale a una expresión decimal periódica y la otra, a una exacta.

- 85.** Resolvé estas sumas y restas con números racionales.

a. $-1 + \frac{3}{5} - \frac{4}{3} - \frac{3}{10}$

b. $-1,\bar{8} + \frac{2}{3} + 0,2\bar{3}$

c. $0,\bar{7} + 2,\widehat{82} - 2,3\bar{4} - \frac{181}{99}$

d. $5,4\bar{3} - 3,\widehat{27} - 2,1\bar{8} - \frac{1}{45}$

- 86.** Resolvé estas multiplicaciones y divisiones con números racionales.

a. $\frac{3}{7} \cdot \frac{14}{9} \cdot \frac{25}{36} \cdot \left(-\frac{6}{5}\right)$

b. $-\frac{7}{52} \cdot \frac{26}{14} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{9}{2}\right)$

c. $-\frac{9}{5} \cdot 0,2\bar{5} : (-0,5)$

d. $-0,2\bar{3} \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) \cdot 0,8 : (-1,4)$

- 87.** Planteá y resolvé los siguientes cálculos.

- a. El cociente entre doce quintos y cinco sextos.
- b. La tercera parte del producto entre veintiséis tercios y nueve treceavos.
- c. La quinta parte del cociente entre quince veintidosavos y treinta onceavos.

- 88.** Sin hacer todas las cuentas, señalá cuál de estos cálculos da como resultado un número entero. Explicá cómo te das cuenta.

a. $5 : \frac{1}{2} - \frac{5}{8} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - 2$

b. $5 : \frac{1}{2} - \frac{8}{5} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) - 2$



89. Resolvé los siguientes cálculos combinados y expresá los resultados como fracción irreducible.

a. $3 : \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{35}{8}\right) : \left(-\frac{5}{4}\right) - 2$
b. $-0,2 \cdot \frac{9}{5} - \left(-\frac{3}{4}\right) : \frac{9}{16} - 1,4$
c. $\frac{9}{5} \cdot 0,28 + 1,5 : \frac{7}{3} - \left(-0,4\right) : \left(-\frac{2}{3}\right)$
d. $-3,28 : (-0,2) - \left(-\frac{7}{5}\right) \left(-\frac{35}{49}\right) - 1,6$

90. Expresá como raíz cada una de estas potencias y resolvélas.

a. $(0,4)^{\frac{1}{2}}$ c. $\left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{4}{3}}$
b. $\left(\frac{49}{25}\right)^{\frac{3}{2}}$ d. $\left(-\frac{1}{64}\right)^{-\frac{5}{3}}$

91. Expresá cada raíz como potencia de exponente fraccionario y resolvé usando las propiedades de la potencia.

a. $\sqrt[5]{32^2} \cdot \sqrt[4]{32} \cdot \sqrt[20]{32^7}$
b. $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^4} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^2} : \sqrt[6]{\left(\frac{1}{4}\right)^8}$
c. $\sqrt[4]{\left(\frac{5}{3}\right)^5} \cdot \sqrt[20]{\left(\frac{5}{3}\right)^{-101}} : \sqrt[5]{\left(\frac{5}{3}\right)^{-9}}$
d. $\sqrt[3]{4^{-5}} : \sqrt[9]{4^{-12}} \cdot \sqrt[6]{4^{-7}}$

92. Resolvé aplicando propiedades.

a. $\sqrt[5]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{4}}$
b. $\sqrt[3]{\frac{2}{9}} \cdot \sqrt[3]{\frac{16}{9}} : \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$
c. $\left[\left(-\frac{7}{4}\right)^3\right]^7 : \left[\left(-\frac{7}{4}\right)^6\right]^4$
d. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} : \left(\sqrt[5]{-\frac{1}{27}} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{9}}\right)$

93. Resolvé los siguientes cálculos combinados.

a. $0,3 - \sqrt[3]{-\frac{16}{81}} : \sqrt[3]{\frac{2}{3}} - \left(-\frac{3}{2}\right)^7 : \left(-\frac{3}{2}\right)$
b. $\frac{9}{4} - \sqrt[243]{\left(-\frac{1}{8}\right)^{81}} \cdot 0,5 - \left[\left(-\frac{5}{2}\right)^7 : \left(-\frac{5}{2}\right)^6\right]^2$
c. $\sqrt[5]{-\frac{1}{8}} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{4}} - 2,53 - \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{3}\right)^9}$
d. $2,8 : 1,4 - \sqrt[5]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[5]{-\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{4}} - 0,2$
e. $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^3} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3} : \left(-\frac{1}{3}\right) + 0,38 : 1,6$

94. Emi y Tomi resolvieron el mismo cálculo de dos maneras distintas y a los dos les dio el mismo resultado. ¿Quién lo resolvó correctamente? ¿Cuál es el error en el otro?

Emi $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} + 0,3 : \left(-\frac{7}{11}\right)^0 =$
 $-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} : 1 =$
 $0 : 1 = 0$

Tomi $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} + 0,3 : \left(-\frac{7}{11}\right)^0 =$
 $-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} : 1 =$
 $-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$

95. Expresá en notación científica los siguientes números.

a. 12.340.000	e. 154.000.000
b. 0,00000072	f. -0,0000000001
c. -8.000.000.000.000	g. 72.010.000.000
d. 0,001	h. -0,5

96. Escribí todas las cifras de estos números.

a. $2 \cdot 10^7$	e. $1,001 \cdot 10^{-2}$
b. $8,4 \cdot 10^{-5}$	f. $8,8 \cdot 10^5$
c. $3,34 \cdot 10^9$	g. $2,5 \cdot 10^{-9}$
d. $4,75 \cdot 10^{-8}$	h. $7 \cdot 10^{-7}$

Saquen una hoja



Marcá la opción correcta.

1. El m.c.d. entre 380 y 2.400 es:

- 45.600
 20
 800
 10

5. ¿Cuál es el resultado del cálculo?

$$\frac{9}{4} \cdot 0,2 + 1,6 : \left(-\frac{3}{2} \right) - 1,36$$

- $-\frac{89}{45}$ $\frac{11}{45}$
 $-\frac{19}{9}$ $\frac{1}{9}$

2. Mariana tiene tres sobrinos: Majo, que la visita cada 10 días; Ale, que la visita cada 8 días y Romi, que va a visitarla cada 12 días. ¿Cada cuántos días se reúne Mariana con sus tres sobrinos en su casa?

- Cada 30 días.
 Cada 12 días.
 Cada 60 días.
 Cada 120 días.

6. Luna resolvió este cálculo utilizando exponentes fraccionarios. El profe la felicitó porque llegó al resultado correcto. ¿A qué resultado llegó?

$$\sqrt[5]{\left(\frac{1}{4}\right)^3} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^2} : \sqrt[15]{\left(\frac{1}{4}\right)^{49}}$$

- 16 16
 $\frac{1}{16}$ $-\frac{1}{16}$

3. Indicá cuál de estas fracciones es una expresión decimal exacta.

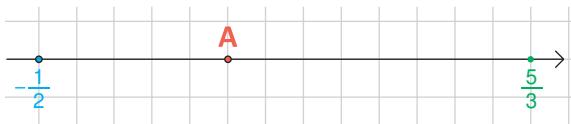
- $\frac{31}{990}$ $\frac{4.995}{9.990}$
 $\frac{405}{999}$ $\frac{3.075}{4.995}$

7. ¿Cuál es el resultado de este cálculo combinado?

$$1,6 : 0,3 - \sqrt[5]{-\frac{1}{8}} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{4}} - \left(\sqrt[3]{\frac{27}{8}} \right)^2 - 1,26$$

- $\frac{26}{11}$ $-\frac{26}{15}$
 $-\frac{41}{15}$ $\frac{41}{15}$

4. ¿Qué número representa A en la siguiente recta numérica?



- $\frac{1}{6}$ 0,3 $0,\bar{3}$ 0

8. El resultado de uno de estos cálculos es $2,25 \cdot 10^{12}$. ¿De cuál se trata?

- $\frac{4.500 \cdot 2.000}{0,0004}$ $\frac{45.000 \cdot 20.000}{0,0004}$
 $\frac{45.000 \cdot 20.000}{0,004}$ $\frac{45.000 \cdot 2.000}{0,0004}$

Esto ya lo sabía...

1. Florencia compró un rollo de servilletas de papel descartables. El rollo tiene 30 servilletas cuadradas y la medida de cada lado es l . Escribí la expresión que representa cada oración.
 - a. El área de cada servilleta.
 - b. El perímetro de cada servilleta.
 - c. El área de 4 servilletas unidas.
 - d. El perímetro de 3 servilletas unidas.
 - e. El área de todas las servilletas del rollo unidas.
 - f. El perímetro de todas las servilletas del rollo unidas.

2. Si f representa la edad actual de Flor, escribí en lenguaje simbólico.
 - a. Al triple de su edad, se la disminuye en dos.
 - b. El doble de la edad que tendrá en un año.
 - c. Un año más que el doble de su edad.



¿Sabías que tu peso en la Luna es diferente al que tenés acá, en la Tierra? ¿Y que sería distinto a los dos anteriores si estuvieses en Marte? Sí. El peso de cualquier cosa varía según el satélite o el planeta en el que esté, o mejor dicho, de la gravedad de ese lugar.

Para calcular el peso de una persona o cosa, conocido su peso en la Tierra, se puede usar la fórmula $P = \frac{P_T \cdot g}{9,8 \text{ m/s}^2}$, donde P_T es el peso en la Tierra, g es la gravedad del satélite o el planeta en el que se quiera calcular el peso y $9,8 \text{ m/s}^2$ es la gravedad promedio en la Tierra.

Por ejemplo, en Mercurio, cuya gravedad promedio es de $3,7 \text{ m/s}^2$, el peso de una persona que en la Tierra tiene 60 kg sería de:

$$P = \frac{60\text{kg} \cdot 3,7 \text{ m/s}^2}{9,8 \text{ m/s}^2} = 22,65 \text{ kg}$$

Livianito, ¿no?

Calculá tu peso en:

- Marte ($g = 3,71 \text{ m/s}^2$)

- Luna ($g = 1,62 \text{ m/s}^2$)

Nota: en este libro, cuando se emplea el término "kilogramo" (unidad de masa), en realidad se hace referencia al "kilogramo fuerza", porque se alude al peso del objeto. En el habla corriente no se toma en cuenta esta distinción.

Expresiones algebraicas



Números y letras

- Se usan **expresiones algebraicas** para indicar relaciones numéricas, combinando letras y números. Los números se denominan **coeficientes** y las letras (con sus exponentes) son la **parte literal**.

Por ejemplo, $4a^5$ es una expresión algebraica.



Coeficiente **Parte literal**

- En adelante se trabajará con expresiones en las que los exponentes de las letras sean números enteros no negativos. Si la expresión algebraica tiene un solo término, se llama **monomio**. Se denomina **binomio** si posee dos términos y **trinomio**, si tiene tres. En general, se llama **polinomio** a las expresiones con varios términos.

- El **valor numérico** de una expresión algebraica es el valor que se obtiene al reemplazar la parte literal por un determinado número.

Por ejemplo, el valor numérico de $4a^5$ para $a = 1$ es 4 porque: $4 \cdot 1^5 = 4 \cdot 1 = 4$.

3. Escribí en lenguaje simbólico, es decir, usando expresiones algebraicas.

a. El anterior del doble de un número. →

b. La mitad del cubo de un número. →

c. El siguiente del triple del cuadrado de un número. →

d. La diferencia entre cuatro y el triple del cuadrado de un número. →



Fijate bien

No es lo mismo decir “el anterior del doble de un número” que “el doble del anterior de un número”. Este último se expresa $2 \cdot (x - 1)$.

4. Estrategia: leer en voz alta Escribí en lenguaje coloquial.

a. $5a^2$ →

b. $2b^3 + 1$ →

c. $4c^2 - 1$ →

d. $d^3 - d^2$ →

5. Hallá el valor numérico de cada una de estas expresiones algebraicas para $a = 3$ y $a = -1$.

a. $3a + 1$ →

b. $2a^2 + 5$ →

c. $3a^3 - 2a^2 + 2$ →

d. $\frac{1}{5}a^2 - 2a + 1$ →

Operaciones con expresiones algebraicas



Sumas y restas

- Dos monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal, es decir, la misma letra elevada al mismo exponente. Más adelante se utilizarán monomios con más de una letra.

Para sumar o restar dos monomios semejantes, se suman o restan sus coeficientes y se agrega la misma parte literal.

$$2x^2 + 3x^2 = 5x^2 \rightarrow \text{El exponente queda igual.}$$

$$6y^3 - 2y^3 = 4y^3 \rightarrow \text{El exponente queda igual.}$$

La suma o la resta de dos monomios que no son semejantes quedan expresadas (no se sigue operando).

$$7c^2 + 3c^5 \rightarrow \text{Queda así.}$$

$$9m^3 - 2m \rightarrow \text{Queda así.}$$

- Para sumar o restar dos polinomios, se pueden agrupar los términos semejantes. Una manera fácil de verlo es disponiéndolos en forma vertical. Por ejemplo, para hacer $(7a^4 + 2a^2 - 5a^3) + (-a^3 + 6a^2 - 5a)$, se organizan los términos respetando sus exponentes y después se suma. Lo mismo para restarlos.

$$\begin{array}{r} 7a^4 - 5a^3 + 2a^2 \\ + \quad \quad \quad - a^3 + 6a^2 - 5a \\ \hline 7a^4 - 6a^3 + 8a^2 - 5a \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7a^4 - 5a^3 + 2a^2 \\ - \quad \quad \quad - a^3 + 6a^2 - 5a \\ \hline 7a^4 - 4a^3 - 4a^2 + 5a \end{array}$$

Productos y cocientes

- Para multiplicar o dividir dos monomios, se multiplican o dividen sus coeficientes y su parte literal.

$$5a^3 \cdot 2a^4 = 10a^7 \rightarrow \text{Se suman los exponentes.}$$

$$14b^5 : 2b^3 = 7b^2 \rightarrow \text{Se restan los exponentes.}$$

6. Indicá si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y en este último caso, explicá el error.

a. $3a + 2a^2 = 5a^3$

d. $-7a^3 : a = -7a^2$

b. $2b^4 \cdot 3b^2 = 6b^8$

e. $2f^5 \cdot 3f = 6f^5$

c. $4y^5 - 3 + 5y^5 = 9y^5 - 3$



Fijate bien

Recordá que si los términos no son semejantes, las sumas y las restas quedan expresadas.

7. Resolvé estas sumas y restas de expresiones algebraicas.

a. $-3a^5 + 4a^5 =$

d. $3r^5 + 2r - 4r^5 - 6r =$

b. $-7p^4 + 8p^2 - 2p^4 =$

e. $-3x^2 - (2x^2 - 5x^2) - 2 =$

c. $(3 - 2c^4 + c - 6c^3) - (-7c^2 - 6c^3 + 8) =$

f. $-(-4y^3 + 2y^2) - (-5y^2 - 4y^3 + 7) =$

8. Resolvé estas multiplicaciones y divisiones de expresiones algebraicas.

a. $-2y^5 \cdot 4y^2 =$

e. $-3w^4 \cdot (-2w) =$

b. $-14r^4 : (-2r) =$

f. $4c \cdot (-3c^7) =$

c. $-3p^7 \cdot (-2p^4) =$

g. $-8d^4 : (-2d) =$

d. $-4x^4 \cdot (-6) =$

h. $-6g^7 : (-2g^3) =$

9. Resolvé estos cálculos combinados de expresiones algebraicas. No te olvides de respetar el orden de las operaciones.

a. $6p^3 + 2p^2 \cdot (-3p) =$

b. $1,8w : (1,2w - 0,6w) =$

c. $\left(\frac{1}{4}b^3 + \frac{3}{5}b^3\right) \cdot \left(\frac{1}{6}b - b\right) =$

d. $\frac{3}{2}a^4 : (-3a) + 2a^3 + \frac{1}{4}a^3 =$

e. $(1,7c^7 - 2,5c^7 + c^7)(-2c^2 - 1,2c^2) =$

10. Completá la tabla ubicando estos resultados en el cálculo que le corresponde.

- | | | | | |
|--------------------|---|--------------------|-------------------|--------------------|
| $\frac{13}{10}v^5$ | 0 | $-\frac{13}{2}v^5$ | $\frac{1}{10}v^5$ | $-\frac{9}{10}v^5$ |
|--------------------|---|--------------------|-------------------|--------------------|

Cálculos	Resultados
$-\frac{3}{2}v^2 \cdot v^3 + (-5v^4 \cdot v) =$	
$\frac{3}{4}v^4 \cdot \frac{2}{5}v - \left(-2v^3 \cdot \frac{2}{5}v^2 + v^5\right) =$	
$v^3 \left(-\frac{2}{5}v^2\right) + \left(-\frac{3}{5}v^6 : v + \frac{1}{10}v^3v^2\right) =$	
$-\frac{8}{5}v^8 : (-v^3) - \left[-\frac{1}{10}v^2(-3v^3)\right] =$	
$-\frac{3}{5}v^2 \cdot v^3 - \left(v^5 - \frac{2}{5}v^2 \cdot 4v^3\right) =$	



Tengo tarea

11. Si no haces todas las cuentas, indicá cuáles de estos cálculos dan como resultado un monomio. ¿Cómo te das cuenta?

a. $-2b^4 + \frac{1}{4}b$

b. $\frac{3}{5}r^5 + \frac{2}{5}x^4 - \frac{3}{5}r^5$

c. $4x^0 + 7$

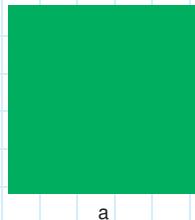
12. Escribí un producto de monomios cuyo resultado sea el indicado.

a. $16b^3$

b. $\frac{9}{5}p^4$

13. Escribí, de la forma más sencilla posible, las expresiones que representan el perímetro y el área cada figura.

a.



Área:

a

Perímetro:

a

b.



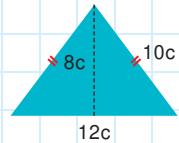
Área:

2

Perímetro:

3a

c.



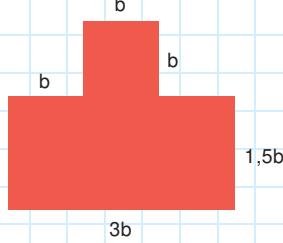
Área:

12c

Perímetro:

8c
10c

d.



Área:

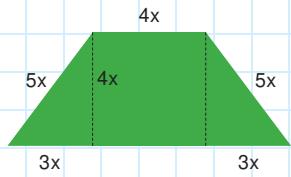
b

Perímetro:

1,5b

3b

e.



Área:

3x

Perímetro:

4x
5x
3x



14. Dibujá el esquema de una figura con un área de $6b^2$ y un perímetro de $12b$.

Propiedad distributiva y factor común



Propiedad distributiva

- En la figura, el área del rectángulo puede calcularse de dos formas:



Considerando la base entera: $a(b+c)$.

O sumando el área de cada uno de los dos rectángulos que lo forman: $ab+ac$.

En consecuencia, $a(b+c) = ab+ac$

- A esta propiedad se la conoce como **distributiva** de la multiplicación respecto de la suma y se suele señalar así:

$$a(b+c) = ab+ac$$

- La multiplicación también puede distribuirse con la resta. Por ejemplo, $3(4r-5) = 3 \cdot 4r - 3 \cdot 5 = 12r - 15$
- Como en la multiplicación no importa el orden de los factores, también puede distribuirse así:

$$(-6a+2) \cdot (-0,5) = -6a \cdot (-0,5) + 2 \cdot (-0,5) = 3a - 1$$

También: $(4x+5)(2y-1) = 4x \cdot 2y - 4x \cdot 1 + 5 \cdot 2y - 5 \cdot 1 = 8xy - 4x + 10y - 5$

- La división puede distribuirse con la suma y la resta solo cuando el divisor es un monomio.

Por ejemplo: $(4x+6):2 = 4x:2 + 6:2 = 2x + 3$. En cambio, $2:(4x+6)$ no se puede distribuir.

Factor común

- Cuando se distribuye la multiplicación en una suma o una resta, la igualdad puede mirarse al revés. Es decir, el producto $2(3x+4) = 2 \cdot 3x + 2 \cdot 4$ puede escribirse como:

$$\underline{2 \cdot 3x} + \underline{2 \cdot 4} = 2(3x+4)$$

Escrito así, se puede ver que se repite el 2 como factor, es decir, 2 es el **factor común** de ambos términos.

Por ejemplo, $9y+6$ tienen en común que ambos términos se pueden obtener multiplicando una expresión por "3".

Es decir, "3" es el factor común: $9y+6 = 3 \cdot 3y + 3 \cdot 2 = 3(3y+2)$.

Otro ejemplo: $8m^3 - 12m^2 = 4m^2 \cdot 2m - 4m^2 \cdot 3 = 4m^2(2m-3)$.

15. Aplicá la propiedad distributiva.

a. $2a(3a+4) =$

d. $\frac{1}{5}m^3 \left(\frac{5}{6}m^2 - \frac{25}{3} \right) =$

b. $(2r^3 + 5r)3r^2 =$

e. $(4w^3 + 3y^5) \left(\frac{1}{4}w^2 - \frac{2}{3}y^4 \right) =$

c. $(8p^4 - 16p^2):4p^2 =$

f. $\left(-\frac{2}{5}x^2p^3 + 3x \right) (4x^4 - 3p^2) =$

16. Completá los términos faltantes.

a. $4z^5(3z^2 - 2x^5) = 12z^7 \dots$

b. $-2p^3(4y^5 - 8p^7) = \dots + 16p^{10}$

c. $-\frac{1}{4}r^5\left(-\frac{2}{3}r^8 \dots\right) = \frac{1}{6}r^{13} - \frac{1}{5}r^8$

d. $\left(-\frac{3}{8}n^7 - \frac{4}{5}n^4\right) : \dots = \frac{3}{16}n^4 + \frac{2}{5}n$

17. Estrategia: pensar al revés Encontrá el mayor factor común y expresá como producto.

a. $6x^2 + 10 =$

b. $15x^4 - 25x^2 =$

c. $\frac{3}{5}y^4 + \frac{9}{25}y^3 =$

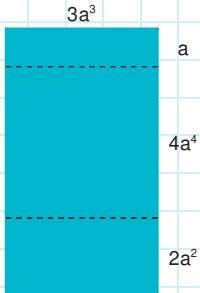
d. $6z^2 + 3z^3 - 9z =$

e. $\frac{8}{9}m^4 - \frac{2}{3}m^2 - \frac{10}{3}m^3 =$

Fijate bien

Si todos los coeficientes son enteros, el mayor factor común es el m.c.d. de todos ellos, acompañado de la variable con su menor exponente.

18. Expresá de dos formas distintas el área de la siguiente figura.



19. Hacé de profe Ariel resolvió este producto, pero no es correcto. ¿Cuál fue su error?

$$3y^2(6y + 10) = 18y^2 + 10y^2$$

Tengo tarea

20. Indicá la respuesta correcta.

La expresión $3n^5(4n^3 - 6n)$ equivale a:

$12n^8 - 18n$

$12n^5 - 18n^5$

$12n^{15} - 18n^5$

$12n^8 - 18n^6$

21. Esribí en lenguaje simbólico.
- El anterior del cubo de un número.
 - El cubo del siguiente de un número.
 - La tercera parte del cuadrado de un número.
 - La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos.

22. Esribí en lenguaje coloquial.

a. $\frac{1}{4}a^2$	c. $(c+1)^2 + (c-1)^2$
b. $b^3 - b$	d. $\frac{2}{3}(d^3 - 1)$

23. Completá el cuadro con el valor numérico de cada expresión para los valores indicados de n .

Expresión algebraica	$n = -2$	$n = -\frac{1}{2}$
$2n^3 - 3$		
$n^2 + 2n + 1$		
$-\frac{1}{2}n^3 - \frac{2}{5}n^2 + 3$		
$-\frac{3}{2}n^3 - n - \frac{1}{2}$		
$\frac{5}{4}n^4 - \left(\frac{5}{2}n^2\right) + 1$		

24. Resolvé las siguientes sumas y restas.

- $-\frac{3}{4}a^3 + \frac{1}{2}a^3 - \left(-\frac{2}{3}a^3\right)$
- $-2y^3 - \frac{1}{2}y^3 - \left(-\frac{1}{4}y^3 - \frac{3}{2}y^3\right) + 1$
- $-8p^4 - \left(-\frac{1}{3}p^4 + \frac{3}{2}p^4 - \frac{2}{3}p^4\right)$
- $-\frac{3}{5}n^2 + \left(-\frac{3}{5}n - \frac{2}{3}n^2\right) - \frac{7}{5}n$

25. Resolvé.

- $-\frac{1}{4}a^3 \cdot (-2a^2)$
- $-\frac{3}{2}d^6 : \left(-\frac{9}{4}d\right)$
- $4n^2 \cdot (-2n^7) : n^3$
- $\frac{4}{5}x^5 : (4x^4) \cdot 10x$

26. Señalá la respuesta correcta.

- $-3w^8 : w^2 - \left(-5w^{10} : w^4\right) =$
2w⁴ -3w⁶ 2w⁶
- $-4y^4 \left(-2y^3\right) - \left(-3y^8 : y + y^3 \cdot y^4\right) =$
10y⁴ 10y⁷ 0
- $-8z^6 \left(-3z^3\right) - \left[-\frac{1}{2}z^{10} : \left(-\frac{1}{48}z\right)\right] =$
0 -48z⁹ 48z⁹

27. Aplicá la propiedad distributiva.

- $-3b^4 \left(2b^5 - 3b^7 + 2b^3\right)$
- $\left(-\frac{3}{2}c^2 + \frac{25}{3}c^6 - \frac{3}{4}c^5\right) : \frac{1}{3}c$
- $\left(3d^5a^2 - \frac{1}{4}d^7a^3 - \frac{7}{2}d^8a^7\right) : (-2d^3a^2)$

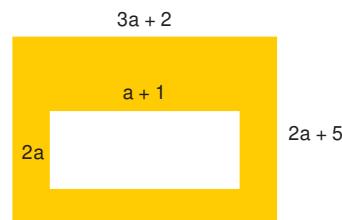
28. Obtené el máximo factor común de las siguientes expresiones algebraicas y expresalas como producto.

- $4a^5 - a^3 - 3a^7$
- $-9c^5 - 3c^7 + 6c^4$
- $\frac{4}{3}d^3 - \frac{8}{3}d^5 - \frac{16}{3}d^7$

29. Mary quiere escribir como producto algunas expresiones algebraicas, pero usó factores "no tan usuales". Completá los términos que faltan.

- $3x^5 - 4x^2 + 2x^4 = -x \cdot \left(\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\right)^4$
- $-2a^4 + 3a - a^3 = \frac{1}{2}a \cdot \left(\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\right)$

30. Esribí la expresión del área de la figura coloreada y realizá todas las operaciones que puedas.



Productos especiales



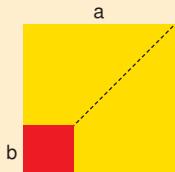
Diferencia de cuadrados

- Para obtener la **diferencia** de dos **cuadrados** a partir de un producto, hay que multiplicar la suma de dos términos por la resta de los mismos términos.

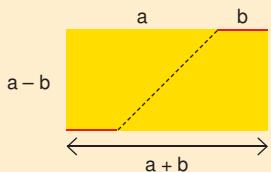
$$(a+b)(a-b) = a \cdot a + a \cdot b - a \cdot b - b \cdot b = a^2 - b^2$$

Es decir: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Esta igualdad puede verificarse a partir del área de la figura que resulta de la resta del cuadrado grande menos el pequeño.



$$\text{Área} = a^2 - b^2$$



$$\text{Área} = (a+b)(a-b)$$

31. Expresá como producto las siguientes diferencias de cuadrados.

a. $x^2 - 9 =$

d. $\frac{49}{36} - \frac{9}{4}c^2 =$

b. $y^2 - \frac{1}{25} =$

e. $16p^4 - \frac{4}{25}p^2 =$

c. $4z^2 - \frac{9}{4} =$

f. $-\frac{64}{25}p^6 + 9p^8 =$

32. Hacé de profe Corregí la tarea de Armando. Si algo está mal, indicá cuál fue su error.

a. $(3a+2)(3a-2) = 9a - 4$

c. $25b^2 - 36x^4 = (5b+6x^2)(5b-6x^2)$

b. $16x^{36} - 25y^{16} = (4x^6 + 5y^4)(4x^6 - 5y^4)$

d. $\frac{1}{4} - \frac{9}{25}y^8 = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5}y^6\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{5}y^6\right)$

33. Estrategia: empezar por el final Completá con las expresiones que faltan para que en todos los casos se obtengan diferencias de cuadrados.

a. $16x^2 - = (4x +)(..... - 3)$

b. $4 - = (..... - 9z^3)(.....)$

c. $..... = \left(..... + \frac{8}{7}\right)\left(\frac{11}{14}r^4 -\right)$



Cuadrado de un binomio

- El **cuadrado de un binomio** puede calcularse multiplicando el binomio por sí mismo, aplicando la propiedad distributiva.

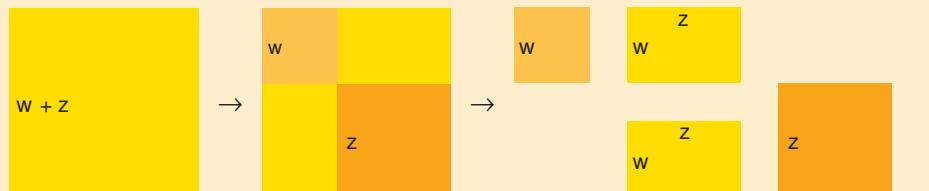
$$(w+z)^2 = (w+z) \cdot (w+z) = w \cdot w + w \cdot z + z \cdot w + z \cdot z = w^2 + 2wz + z^2$$

De esta forma se obtiene un trinomio.

$$(w+z)^2 = w^2 + 2wz + z^2$$

Es decir, el cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, sumado al doble producto del primero y del segundo término, más el cuadrado del segundo término.

Esta igualdad puede verse en forma gráfica a partir del cálculo del área de un cuadrado de lado $w+z$.



$$\text{Área: } (w+z)^2$$

$$\text{La misma área como suma de las áreas de cada región: } w^2 + 2wz + z^2$$

- 34.** Desarrollá los siguientes cuadrados.

a. $(a+5)^2 =$

e. $(7+6b^5)^2 =$

b. $(b-2)^2 =$

f. $(3f^5+2f^3)^2 =$

c. $(2b-3)^2 =$

g. $(-7g^3+3g^4)^2 =$

d. $(3c-4a^2)^2 =$

h. $(-7g^3-3g^4)^2 =$

- 35.** **Hacé de profe** Gabi desarrolló estos cuadrados, pero cometió algunos errores. Identificalos y señala la respuesta correcta.

a. $(3a+2)^2 = 9a^2 + 6a + 4$

c. $(5b^4 - 6b^5)^2 = 25b^8 - 60b^5 + 36b^{10}$

b. $(7a^2 - 3)^2 = 49a^2 - 42a^2 + 9$

d. $(3a^4 - a^2)^2 = 9a^{16} - 6a^8 - a^4$

- 36.** **Estrategia: empezar por el final** Completá las expresiones faltantes.

a. $\left(2h - \frac{1}{3}\right)^2 = 4h^2 - \dots + \frac{1}{9}$

b. $\left(-8t^3 + \dots\right)^2 = \dots - \dots + \frac{16}{25}$



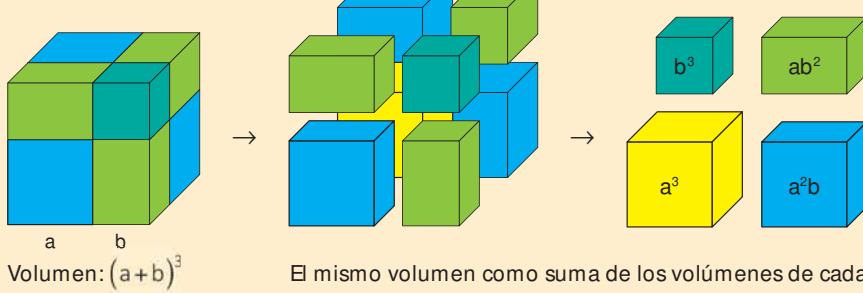
Cubo de un binomio

- Para calcular el **cubo de un binomio**, puede multiplicarse el binomio por sí mismo, y al resultado volverlo a multiplicar por el mismo binomio, $(a+b)^3 = (a+b)^2 \cdot (a+b) = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a+b)$.

Al volver a distribuir se obtiene: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Para no realizar todas las veces la distribución, puede recordarse que el cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo, sumado al cubo del segundo término.

La igualdad también puede verificarse geométricamente a partir de la descomposición del volumen de un cubo de lado $a+b$.



- 37.** Desarrollá los siguientes cubos.

a. $(a+4)^3 =$

c. $(-5c^2 - 3)^3 =$

b. $(3b - 2)^3 =$

d. $\left(-\frac{1}{2}d^3 - d^2\right)^3 =$

- 38.** Sin realizar todos los desarrollos, determiná cuál de estos cubos equivale a $x^{15} - x^{10} + \frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{27}$. Explicá cómo te das cuenta.

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^3$$

$$\left(x^5 + \frac{1}{3}\right)^3$$

$$\left(x^5 - \frac{1}{3}\right)^3$$

$$\left(x^{12} - \frac{1}{3}\right)^3$$

- 39.** **Estrategia: empezar por el final** Completá con las expresiones que faltan.

a. $\left(\dots - \frac{1}{3}\right)^3 = 8y^3$

b. $\left(w^2 \dots\right)^3 = \dots - 3w^4$

- 40.** **Hacé de profe** Marisa dice que al desarrollar $(x+y)^3$, los exponentes de x se pueden escribir, comenzando desde adelante, empezando por 3 y bajando de a uno; y los de y , empezando por 3 desde atrás y bajando de a uno. ¿Tiene razón? ¿Qué pasará con los exponentes del desarrollo de $(x+y)^2$?

Ecuaciones



¿Cuánto vale la incógnita?

- Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas. A la letra se la conoce como incógnita. Puede haber ecuaciones con más de una incógnita, pero por ahora se trabajará con una sola.

$$\begin{array}{c} 4x+2=3x-1 \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ \text{Primer miembro} \qquad \text{Segundo miembro} \end{array}$$

- Resolver una ecuación significa hallar los valores de la incógnita que hacen que se cumpla la igualdad. Para eso se puede realizar la misma operación en ambos miembros, ya que la igualdad no se altera, y así se pueden “eliminar” los números y operaciones hasta “despejar” la incógnita, es decir, hallar la solución.

Una ecuación puede tener una sola solución, más de una, o puede no tener solución.

Para verificar que el valor obtenido es correcto, se reemplaza en la incógnita y se observa si se cumple la igualdad.

$$2a + 5 = 15$$

$$2a + 5 - 5 = 15 - 5$$

$$2a = 10$$

$$2a : 2 = 10 : 2$$

$$a = 5$$

Una solución única.

$$b^2 - 1 = 3$$

$$b^2 - 1 + 1 = 3 + 1$$

$$b^2 = 4$$

$$b = 2 \quad b = -2$$

Más de una solución.

$$c^2 + 1 = 0$$

$$c^2 + 1 - 1 = 0 - 1$$

$$c^2 = -1$$

No tiene solución (ningún número real elevado al cuadrado es igual a un número negativo).

Verificación

$$2 \cdot 5 + 5 = 15$$

$$10 + 5 = 15$$

$$15 = 15 \checkmark$$

Verificación

$$2^2 - 1 = 3 \quad (-2)^2 - 1 = 3$$

$$4 - 1 = 3 \quad 4 - 1 = 3$$

$$3 = 3 \checkmark \quad 3 = 3 \checkmark$$

Dos casos muy particulares

$$2(d+1) = 2d + 2$$

$$2d + 2 = 2d + 2$$

$$0 = 0$$

Tiene infinitas soluciones

($0 = 0$ es verdadero para cualquier valor de d).

$$2e - 1 = 2e - 4$$

$$2e - 2e = -4 + 1$$

$$0 = -3$$

No tiene solución (para ningún valor de e se cumple la igualdad $0 = -3$).

41. Resolvé estas ecuaciones y verificá las soluciones. Si tiene infinitas, elegí dos o tres valores para verificarla.

a. $3x + 2 + 2x = 12$

d. $4(2x+1) = 8x+3$

b. $2(3x+2) = 6x+4$

e. $\sqrt{x+1} = 4$

c. $4(2x+1) - 2 = 3(2x+2) - 4$

f. $x^2 + 3 = 12$

42. Indicá la opción correcta en cada caso.

a. $3(2x+2)+4=-2(2x-6)-2$

La solución es $x = -5$.

La solución es $x = 0$.

La solución es $x = \frac{6}{5}$.

b. $-4(2x+2)+2=2(x-4)-2$

La solución es $x = 2$.

La solución es $x = -2$.

La solución es $x = \frac{2}{5}$.

c. $(x+2)^2+2=4x+10$

Las soluciones son $x = 2$ y $x = -2$.

La solución es $x = 2$.

No tiene solución.

d. $x^4+6-2x=5-2x$

Las soluciones son $x = 1$ y $x = -1$.

La solución es $x = -1$.

No tiene solución.

e. $(x-1)^2+8=(x+1)(x-1)+10-2x$

No tiene solución.

La solución es $x = 1$.

Tiene infinitas soluciones.

43. Planteá la ecuación que representa cada situación y resolvela.

- a. La sexta parte de la edad que tendrá Valen dentro de un año es igual a la diferencia entre el triple de su edad y ciento veintisiete tercios. ¿Qué edad tiene Valen?
- b. El cuadrado de la suma entre un número y tres es igual a la suma entre el séxtuplo de ese número y dieciocho. ¿Cuál puede ser el número? ¿Hay más de una posibilidad?
- c. El cubo de la diferencia entre un número y dos es igual a la diferencia entre doce veces ese número y el séxtuplo de su cuadrado. ¿De qué número se trata?
- d. La mitad de la diferencia entre un número y la raíz cúbica de veintisiete octavos es igual al producto entre el opuesto de tres cuartos y el inverso de un medio. ¿De qué número se trata?



Fijate bien

Recordá que el opuesto de 4 es -4 , y el inverso de 4 es $\frac{1}{4}$.



Ecuaciones con proporciones

- Una **razón** es el cociente entre dos números; por ejemplo, $\frac{3}{4}$ es la razón entre 3 y 4.

Cuando dos razones son iguales, forman una **proporción**. Es decir, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es una proporción y en ella se cumple que $ad = bc$. Esta es la **propiedad fundamental de las proporciones** y, en ocasiones, resulta muy útil para resolver ecuaciones.

$$\frac{4}{5} = \frac{a}{10} \rightarrow 4 \cdot 10 = 5a$$

$$40 = 5a$$

$$8 = a$$

44. Resolvé estas ecuaciones y verificá la solución. Cuando sea necesario, usá la propiedad fundamental de las proporciones.

a. $\frac{a+1}{4} = \frac{5}{6}$

b. $\frac{b-2}{5} = \frac{b+3}{\sqrt[3]{-64}}$

c. $\frac{\frac{d^2}{-12}}{5} = \frac{-45}{d}$

d. $\sqrt{x + \frac{1}{4}} - 0,5 = 1$

e. $\sqrt[3]{x - \frac{8}{9}x} = \sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$

f. $(x+2)^3 - x^3 = 6x^2$

Inecuaciones



Resolviendo inecuaciones

- Una **inecuación** es una desigualdad en la que figura, por lo menos, una incógnita representada por una letra. O sea, es como una ecuación en la que hay, en vez de un signo igual, uno de estos símbolos: $<$ (menor), $>$ (mayor), \leq (menor o igual), \geq (mayor o igual).

Resolver una inecuación significa hallar el o los valores de la incógnita que la verifican.

Para resolver una inecuación, se debe tener en cuenta lo siguiente:

- Sí se suma o resta el mismo número en ambos miembros, la desigualdad se mantiene. Lo mismo ocurre si se multiplica o se divide, en ambos miembros, por un mismo número **positivo**.
- Sí se multiplica o se divide en ambos miembros por un mismo número **negativo**, se invierte el sentido de la desigualdad.

$$2a + 1 \leq 7$$

$$2a + 1 - 1 \leq 7 - 1$$

$$2a \leq 6$$

$$2a : 2 \leq 6 : 2$$

$$a \leq 3$$

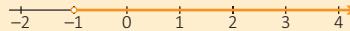
$$-2b + 3 < 5$$

$$-2b + 3 - 3 < 5 - 3$$

$$-2b < 2$$

$$-2b : (-2) > 2 : (-2)$$

$$b > -1$$



En la recta, el punto “lleno” en 3 indica que está incluido en la solución.

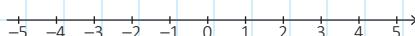
El punto en -1 está “vacío” porque no está en la solución.

45. Completá el cuadro.

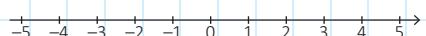
Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico
Todos los números mayores que -4 .	
	$x \leq 5$
Todos los números mayores que -2 y menores o iguales que 3 .	
	$5 \leq x < 7$
	$x > -3$

46. Representá en la recta numérica.

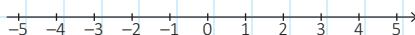
a. $a \geq 2$



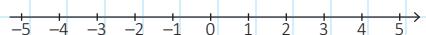
c. $-1 < c \leq 2$



b. $x > 0$



d. $-4 \leq m < -1$



Fijate bien

$-1 < x < 2$ representa todos los números mayores que -1 y menores que 2 .

47. Indicá las desigualdades representadas en cada recta.



48. Resolvé las siguientes inecuaciones y representá cada solución en la recta numérica.

a. $4x + 1 \leq 2$

d. $5x - \frac{1}{2} \geq 3x + \frac{3}{2}$

b. $-3y - 4 > 1$

e. $-2x \leq \sqrt[5]{\left(\frac{1}{32}\right)^{-1}}$

c. $3(x - 2) < x + 1$

f. $-3(x + 1) \geq -x - 6$

49. Escribí una inecuación cuya solución sea $x \geq -\frac{1}{2}$.

- 50.** Expresá como producto las siguientes diferencias de cuadrados.
- $16a^2 - 49$
 - $25 - 144x^{18}$
- 51.** ¿Verdadero o falso? ¿Por qué?
- $9 - 16j^2 = (3 + 4j)(3 - 4j)$
 - $-121a^4 + 36 = (11a^2 + 6)(11a^2 - 6)$
 - $-100 + 36r^2 = (-10 + 6r)(10 + 6r)$
- 52.** Desarrollá los siguientes cuadrados.
- $(3f - 5)^2$
 - $(2a^2 - 3a)^2$
- 53.** Completá los términos faltantes.
- $(p^2 - \dots)^2 = \dots - 6p^2 + \dots$
 - $(\dots - \dots)^2 = \dots - 4y^4 + y^8$
- 54.** Desarrollá los siguientes cubos.
- $(2 + 7m^3)^3$
 - $(2n^2 - 3n^5)^3$
- 55.** Completá los términos faltantes.
- $(\dots + t^2)^3 = 125$
 - $(\dots)^3 = 8x^6$
- 56.** Resolvé las ecuaciones y verificá las soluciones.
- $3x + 8 + 2x = -6 + x + 1$
 - $5(4x - 2) + 15 = 3(6x - 5) + 5$
 - $\sqrt[3]{2x - 1} + 2 = \frac{1}{3}$
 - $\frac{\frac{1}{2}}{4x + 1} = \frac{0,3}{2x - 3}$
 - $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - x$
- 57.** Planteá la ecuación que representa cada situación y resolvela. Después verificá la o las soluciones obtenidas.
- La diferencia entre la tercera parte del siguiente de un número y el propio número da como resultado la raíz cúbica de un octavo.
 - La diferencia entre el cuadrado de un número y el cuadrado de tres coincide con la diferencia entre la quinta potencia de dos y cinco.
 - El cuadrado del anterior de un número es igual a la diferencia entre treinta y siete y el doble de dicho número.
 - La razón entre el siguiente y el anterior de un número es igual a dos quintos.
- 58.** ¿Quién tiene razón?
- La ecuación $x^2 - 1 = -5$ tiene una solución.

Mae

Nada que ver.
Esa ecuación no tiene solución.

Lauti

No, tiene dos.

Carla
- 59.** Resolvé las inecuaciones y representá la solución en la recta numérica.
- $3x + \frac{1}{2} \leq x - \frac{3}{4}$
 - $-4x + \frac{1}{3} > 1,2$
 - $\frac{-2x - 3}{3} \leq \frac{-0,7}{5}$
- 60.** Sin resolver la inecuación, señalá cuál es su solución. Explicá cómo te diste cuenta.
- $$0,7x - 3 < \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$$
- $x > 9$
 - $x < 1$
 - $x < 9$
 - $x > 1$
- 61.** Completá la inecuación para que su solución sea la indicada.
- $$3x - 1 \leq \dots \rightarrow x \leq 7$$



Repaso todo

62. Ale dice que “el anterior del cubo de un número” y “el cubo del anterior de un número” significan lo mismo. ¿Tiene razón? Si pensás que sí, mostralo con un ejemplo, y si está equivocado, explicá cuál es la diferencia entre una expresión y la otra.

- 63.** ¿Cómo son todos los números enteros que pueden escribirse de cada una de estas formas?
- $2n$
 - $2n + 1$

64. Hallá el valor numérico de las siguientes expresiones para $a = \frac{1}{3}$ y para $a = -2$.

- $a^2 - \frac{3}{2}a^4 + 1$
- $a^3 - \frac{2}{5}a$

65. Resolvé estas sumas y restas.

- $-2x - (-3x + 4) - \frac{1}{2}x - \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{5}\right)$
- $-3y^2 + \frac{2}{5}y^2 - (5y^2 + 3y^2) - 1$
- $-\frac{2}{5}m^2 - \left(5 - \frac{3}{2}m^3\right) - \left(-\frac{2}{3}m^2 - m^3\right)$

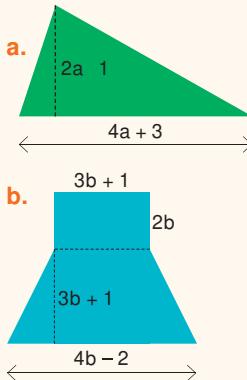
66. Resolvé las siguientes operaciones.

- $(4m^4 \cdot 3m^7) : \left(\frac{1}{2}m^2\right)$
- $\left(3m^5 \cdot \frac{1}{4}m^6\right) : \left(\frac{3}{5}m^2\right)$
- $\left(6s^8 : \frac{3}{2}s^8\right) \cdot \left(\frac{4}{3}s\right)$

67. ¿Cuál o cuáles de estos cálculos combinados da como resultado $\frac{1}{3}f^4$?

- $f^4 \cdot f - \frac{2}{3}f^4$
- $(f^3 \cdot f^6) : (f^5) - \frac{2}{3}f^4$
- $\left(\frac{3}{7}f^4 \cdot \frac{7}{4}f^4 + 0,1f^8\right) : \left(\frac{31}{12}f^4\right)$

68. Escribí de la forma más sencilla el área de estas figuras.



69. Expresá como producto a partir de la extracción de un factor común.

- $-16a^4 + 8a^2 - 4a^8$
- $-\frac{25}{9}b^5 + \frac{125}{3}b^7 - \frac{25}{18}b^4$
- $-0,2x^7 - \left(\frac{9}{5}\right)^{-1}x^5 + 0,1x$

70. **Estrategia: empezar por el final** Completá para que de un lado del igual se obtengan diferencias de cuadrados.

- $\dots - \dots = \left(\frac{6}{5}a^4 + \dots\right) \left(\dots - \frac{1}{2}\right)$
- $\frac{4}{9} - \dots = \left(\dots + \dots\right) \left(\dots - z^5\right)$

71. Desarrollá las siguientes potencias.

- $(-3 + x^2)^2$
- $\left(-\frac{2}{5}y - \frac{3}{4}y^8\right)^2$
- $(-2 + z^5)^3$
- $\left(-\frac{1}{3}w^5 - \frac{2}{3}w^7\right)^3$

72. **Estrategia: descomponer en dos potencias más fáciles** Desarrollá.

$$(a+1)^4$$



73. Encontrá los términos pedidos.

- a. El segundo término del desarrollo de

$$\left(-\frac{5}{2}a^2 + a^3\right)^2$$

- b. El tercer término del desarrollo de

$$\left(-2a^5 - \frac{5}{3}a^3w^0\right)^2$$

- c. El tercer término del desarrollo de

$$\left(-\frac{5}{2}x^3 - \frac{2}{3}x^4\right)^3$$

74. Resolvé las siguientes ecuaciones y verificá las soluciones obtenidas. ¿Alguna no tiene solución?

a. $2\left(a - \frac{1}{4}\right) + 0,6 = 2^{-1}$

b. $\left(b - \frac{5}{4}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = 4b - \frac{1}{2}$

c. $-\frac{5}{3}(2c - 0,3) + 2 = -\frac{7}{6}(2c - 2)$

d. $\frac{2d - 4}{0,3} = \frac{-3d + 0,5}{\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}}$

e. $\frac{2e^2 - 0,6}{5} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} (-40)^{-1}$

f. $\sqrt[3]{0,5f - 2} + \sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^{-1}} = \frac{1}{3}$

75. ¿Verdadero o falso? ¿Por qué?

- a. Si en una ecuación el segundo miembro se obtiene aplicando la propiedad distributiva al primero, por ejemplo $-3(x+1) = -3x - 3$, entonces la ecuación admite infinitas soluciones.
- b. Si en el último paso de la resolución de una ecuación queda la incógnita en el primer miembro y la raíz cuadrada de un número en el segundo, entonces la ecuación admite dos soluciones.

76. Escribí una ecuación que cumpla lo pedido en cada caso. Explicá cómo lo pensaste.

- a. Que la solución sea $x = -6$.
- b. Que las soluciones sean $x = 3$ y $x = -3$.
- c. Que tenga infinitas soluciones.
- d. Que no tenga solución.

77. Traducí a lenguaje simbólico y resolvé las siguientes situaciones.

- a. El área del rectángulo representado es 27 m^2 . ¿Cuál es su perímetro?



$$2x - 3$$

$$2x + 3$$

- b. ¿Cuáles son los números cuyo cuadrado es igual al producto entre el inverso de veintitrés quinceavos y noventa y dos ciento treintaicincoavos?

78. Para convertir a grados Fahrenheit una medida de temperatura escrita en grados centígrados, se utiliza la expresión:

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$$

(donde T_C es la temperatura en grados centígrados y T_F , en grados Fahrenheit).

- a. Obtené la fórmula para convertir de grados Fahrenheit a grados centígrados.
- b. Convertí 140°F a grados centígrados.
- c. Convertí 32°F a grados centígrados.

79. Resolvé cada inecuación y representá su solución.

a. $\frac{2}{5} \geq \frac{3}{4}x$

c. $-\frac{2}{5} > 6x - 2$

b. $-3x + 1 \geq 0,5$

d. $-\frac{3}{4} \leq -\frac{2}{5}x - 3$

80. Mirá lo que dicen Sole y Euge. Mostrá un ejemplo de cada una.

Encontré una ecuación sin solución.

Y yo encontré una inecuación que tampoco tiene solución.

Sole

Euge

Saquen una hoja



Marqué la opción correcta.

1. “El opuesto del siguiente de un número”, en lenguaje simbólico, se escribe:

$-a+1$

$-(a+1)$

$-(a-1)$

$a-1$

2. La expresión $-3w^5 - \left(5ww^4 - 4w^2 \frac{1}{5}w \right)$ equivale a:

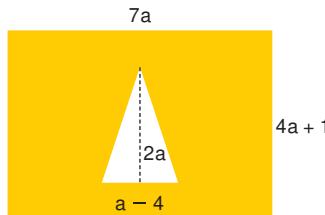
$-3w^5 - 5w^4 + \frac{4}{5}w^2$

$-3w^5 - 5w^4 - \frac{4}{5}w^2$

$-8w^5 - \frac{4}{5}w$

$-8w^5 + \frac{4}{5}w^3$

3. Indicá cuál es el área de la figura coloreada.



$27a^2 + 3a$

$29a^2 + 3a$

$27a^2 + 11a$

$29a^2 - 11a$

4. Indicá a qué diferencia de cuadrados equivale este producto.

$$(2f^2 + 1)(2f^2 - 1)$$

$2f^4 - 1$

$4f^4 - 1$

$4f^2 - 1$

$4f^4 - 2$

5. ¿Cuál es el desarrollo de $(-4d^5 - 3d^2)^2$?

$16d^{25} + 24d^7 + 9d^2$

$16d^{10} - 24d^7 + 9d^4$

$16d^{10} - 24d^7 - 9d^4$

$16d^{10} + 24d^7 + 9d^4$

6. La ecuación $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 = -\frac{1}{3}\left(-\frac{145}{12} + 8x\right) \dots$

...tiene dos soluciones, $\frac{3}{2}$ y $-\frac{3}{2}$.

...tiene una única solución, $\frac{3}{2}$.

...tiene una única solución, $\frac{19}{2}$.

...no tiene solución.

7. La cuarta parte del anterior de un número es igual a menos un quinto. ¿De qué número se trata?

$\frac{1}{5}$

$-\frac{1}{5}$

$\frac{9}{5}$

$\frac{19}{20}$

8. ¿Cuál es la solución de $\frac{-7x+8}{3} \leq 2$?

$\left(\frac{2}{7}; \infty\right)$

$\left(-\infty; \frac{2}{7}\right)$

$\left[\frac{2}{7}; \infty\right)$

$\left(-\infty; \frac{2}{7}\right]$

Esto ya lo sabía...

- ### 1. Trabajá con estos números.

$$\phi_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

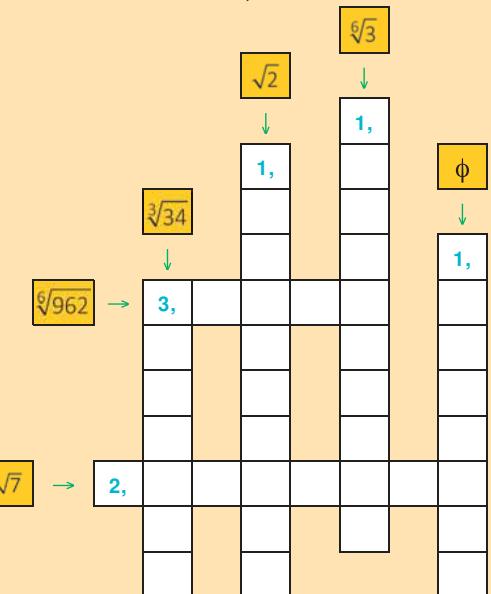
$$\phi_2 = \frac{2}{\sqrt{5} - 1}$$

- a. Utilizá una calculadora para obtener el valor aproximado de cada número.
 - b. Tené en cuenta los valores que obtuviste y calculá mentalmente.

$$\phi_1 - \phi_2 =$$

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} =$$

- 2.** Completá con los primeros decimales.
Podés usar la calculadora. ($\phi = \phi_1$ de la actividad anterior).



Los números irracionales, ya conocidos por los integrantes de la escuela pitagórica (siglo v a.C.), fueron ocultados durante muchos años. Recién en el siglo III a.C. Euclides, en su libro *Elementos*, se refirió a ellos llamando *symmetros* (con medida) a los números racionales y *asymmetros* (sin medida) a los irracionales, palabras que fueron traducidas al latín como *commensurabilis* (commensurable) e *incommensurabilis* (incommensurable) por el filósofo Anicio Boecio durante el siglo VI d.C.

Pasó el tiempo y, lejos de ser olvidados, algunos números irracionales hoy hasta tienen club de fans. Por ejemplo, todos los años se conmemora el número pi (3,14...) cada 14 de marzo (por el orden en que se escribe la fecha en Estados Unidos: primero el mes, después el día). Incluso, en algunos lugares del mundo pueden encontrarse monumentos en honor de ese número.

- Buscá en tu calculadora el número π y escribí todos los decimales que se ven en el visor.

π:

- Investigá un poco más acerca de este número. ¿Cuántos decimales tiene π ?
¿Cuántos se conocen actualmente?

Números irracionales



¿Racional o irracional?

- Como se vio en el Capítulo 1, todos los números que pueden expresarse como una fracción son racionales (\mathbb{Q}). Entre ellos se encuentran los números naturales (\mathbb{N}), por ejemplo, 25, los enteros (\mathbb{Z}), como 8 y -8, los decimales exactos y los periódicos, como 3,5 y 1,2.

Sin embargo, hay números que no pueden expresarse como fracción y que, en consecuencia, no son racionales. Por eso se los llama **irracionales**.

Los números π y ϕ son irracionales. También son irracionales las raíces no enteras de números naturales, como $\sqrt{2}$ o $\sqrt[3]{5}$, entre otras.

- Los números racionales y los irracionales forman el conjunto de los **números reales** (\mathbb{R}).

3. Observá los siguientes números y respondé.

0,5

0,2

0,123456...

- a. ¿Qué regularidad numérica se puede observar en la parte decimal del último número?
- b. Escribí por lo menos cinco dígitos más en la parte decimal del número siguiendo la regularidad que encontraste.

0,123456

- c. Expresá los números 0,5 y 0,2 en forma fraccionaria.

0,5 =

0,2 =

- d. ¿Por qué creés que el otro número no se puede expresar como fracción?

4. **Estrategia: buscar regularidades** Entre los siguientes números, tildá los cuatro que son irracionales.

0,737

154,154

0,121231234...

26,0625

$\sqrt{3}$

23,242526...

14,1010010001...

12,46

5. Obtené el valor aproximado de cada raíz cuadrada (escribí todos los decimales que se ven en el visor).

$\sqrt{1} =$

$\sqrt{4} =$

$\sqrt{9} =$

$\sqrt{25} =$

$\sqrt{5} =$

$\sqrt{8} =$

$\sqrt{14} =$

$\sqrt{50} =$

Ahora analizá los resultados obtenidos y escribí tres raíces racionales y tres irracionales.

Racionales →

Irracionales →



Fijate bien

Los números irracionales tienen infinitas cifras decimales no periódicas.

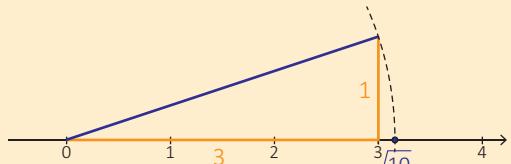
Algunas representaciones



En la recta real

- Los números irracionales que provienen de raíces cuadradas pueden ubicarse en la recta con ayuda del teorema de Pitágoras: el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Por ejemplo, para representar el número $\sqrt{10}$ se puede construir un triángulo rectángulo con un cateto de 3 unidades y otro de 1 unidad. Así la hipotenusa se puede calcular aplicando el teorema de Pitágoras:



$$\begin{aligned}H^2 &= C_1^2 + C_2^2 \\H^2 &= 3^2 + 1^2 \\H^2 &= 9 + 1 \\H^2 &= 10 \\H &= \sqrt{10}\end{aligned}$$

- Sí se ubicasesen todos los números reales en la recta, no quedaría ningún punto sin cubrir, es decir, se completaría la recta. Por eso se dice que \mathbb{R} es completo.

6. Ubicá en la recta los números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$. En algún caso, usá la raíz cuadrada que ya marcaste.



7. A partir de lo realizado en la actividad anterior, completá con $>$, $<$ o $=$.

a. $\sqrt{5} \dots 2\sqrt{2}$ b. $\sqrt{2} + \sqrt{3} \dots \sqrt{5}$ c. $2\sqrt{3} \dots 3\sqrt{2}$ d. $2\sqrt{5} \dots 3\sqrt{2}$

8. Ubicá estos números irracionales entre los dos números racionales que corresponda. (Podés buscar el valor de e en la calculadora).

$\sqrt{12}$

$-\pi$

$\sqrt{7}$

$-e$

a. $-3 \dots -2$

b. $2,6 \dots 2,\bar{6}$

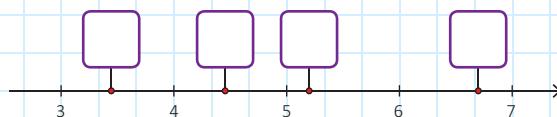
c. $-3,\bar{1}\bar{5} \dots -3,\bar{1}\bar{3}$

d. $\frac{10}{3} \dots \frac{11}{3}$

9. ¿Creés que puede haber otro número irracional entre los pares de números racionales de la actividad anterior? Conversalo con tu compañero. Si piensan que sí, mencionen uno en cada caso y si les parece que no, expliquen por qué.

10. Completá el recuadro con la raíz que corresponda. ¡No vale usar la calculadora!

$\sqrt{27}$ $\sqrt{45}$ $\sqrt{12}$ $\sqrt{20}$



Tengo tarea

11. ¿Verdadero o falso? ¿Por qué?

- a. El número $\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}$ está a la izquierda de $\sqrt{2}$ en la recta.
- b. El número $\pi \cdot \sqrt{2}$ tiene distinta ubicación que $\sqrt{2} \cdot \pi$ en la recta.

Operaciones con radicales



Sumas y restas

- Para sumar o restar dos términos con los mismos radicales, se puede hacer así:

$$3\sqrt{10} + 5\sqrt{10} - 2\sqrt{10} = (3+5-2)\sqrt{10} = 6\sqrt{10}$$

- Algunas veces, dos radicales aparentemente diferentes “esconden” otros dos que son iguales. Por ejemplo, $\sqrt{50}$ y $\sqrt{18}$:

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \quad y \quad \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \rightarrow \text{ambos “esconden” a } \sqrt{2}.$$

Puede decirse que $5\sqrt{2}$ es la forma más simple de expresar $\sqrt{50}$, y que $3\sqrt{2}$ es la forma más simple de expresar $\sqrt{18}$. Luego $\sqrt{50} + \sqrt{18} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

- Si los radicales son diferentes (y no “esconden” el mismo radical), la suma o la resta quedan expresadas.

$$\sqrt{10} + \sqrt{7} - \sqrt{3} \rightarrow \text{Queda expresada (no se sigue resolviendo).}$$

Productos y cocientes de radicales del mismo índice

- Al multiplicar o dividir dos radicales del mismo índice, se obtiene otro radical del mismo índice, cuyo radicando es el producto o cociente de los radicandos originales.

$$\sqrt{10} \cdot \sqrt{20} : \sqrt{2} = \sqrt{10 \cdot 20 : 2} = \sqrt{100} = 10$$

12. Resolvé.

a. $9\sqrt{10} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{10} - 4\sqrt{3} =$

e. $10\sqrt{5} + \sqrt{125} =$

b. $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{9} - 4\sqrt[3]{9} =$

f. $\sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{72} =$

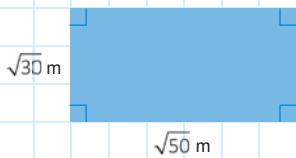
c. $10\sqrt[3]{2} - (\sqrt[3]{2} + 8\sqrt[3]{2}) + \sqrt[3]{2} =$

g. $3\sqrt{8} + 2\sqrt{18} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} =$

d. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{32} =$

h. $\sqrt{75} - 2\sqrt{12} - 7\sqrt{3} + \sqrt{27} =$

13. Calculá el área de este rectángulo. Expresá el resultado de la manera más sencilla posible.



14. El área de un triángulo es $10\sqrt{10}$ y su base mide $2\sqrt{5}$. Calculá su altura.

15. Resolvé estos cálculos combinados y escribí el resultado usando el radical más simple posible.

a. $\sqrt{20} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{3} =$

c. $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{2} =$

b. $\sqrt{540} : \sqrt{3} =$

d. $\sqrt{3^3} : \sqrt{3^5} \cdot \sqrt{3^7} =$

16. Resolvé estos cálculos combinados y escribí el resultado de la forma más simple posible.

a. $(\sqrt{20} - \sqrt{45} + 2\sqrt{80}) \cdot \sqrt{2} =$

c. $(\sqrt{2} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{5}) =$

b. $(\sqrt{147} + \sqrt{150} - \sqrt{48} + 2\sqrt{24}) : \sqrt{3} =$

d. $(\sqrt{3} - \sqrt{7})^2 =$

17. Hacé de profe Marita resolvió este cálculo, pero duda de su resolución. Corregilo.

$$(\sqrt{4} + \sqrt{8}) \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8} + \sqrt{16} = \sqrt{8} + \sqrt{4}$$

Es imposible... El resultado no puede ser igual al paréntesis porque lo multipliqué por raíz de dos. ¿O sí?



18. Resolvé y expresá el resultado de la forma más simple.

a. $(6\sqrt{12} - 9\sqrt{2} + 3\sqrt{18}) \cdot \sqrt{2}$

b. $(6\sqrt{12} - 9\sqrt{2} + 3\sqrt{18}) : \sqrt{2}$

- 19.** Escribí tres números reales (un entero, un decimal exacto y un irracional) que cumplan lo pedido en cada caso.
- Que sean mayores o iguales que -3 y menores que 4 .
 - Que sean mayores que -1 y menores o iguales que 6 .
 - Que sean menores que 10 .
 - Que sean mayores que 7 .
 - Que sean menores que -16 .
- 20.** **Estrategia: buscar regularidades** Identificá el patrón de la parte decimal de cada número irracional y escribí las diez cifras decimales que siguen si continúa el mismo patrón.
- $1,1020304050\dots$
 - $21,10210021\dots$
 - $-0,369121518\dots$
 - $98,024681012\dots$
- 21.** Ubicá los números en la tabla. Considerá que cada uno puede estar en más de una casilla.
- | | | | | | |
|-------------------|------|---------|--------------------|-----|--------------------|
| $0,\overline{12}$ | -7 | $14,09$ | $\sqrt{13}$ | 1 | $-0,7\overline{5}$ |
| $-\sqrt{27}$ | -1 | $0,12$ | $-0,\overline{75}$ | | |
- | | |
|-------------------|--|
| Natural | |
| Entero | |
| Decimal finito | |
| Decimal periódico | |
| Racional | |
| Irracional | |
- 22.** ¿Verdadero o falso? ¿Por qué?
- Un ejemplo de número irracional es $0,001515151515\dots$
 - Un número con infinitas cifras decimales no tiene período.
 - Los números irracionales son aquellos que no se pueden representar como cociente de dos números enteros.
 - Algunos números irracionales son enteros.
 - Todo número irracional es real.
- 23.** Analizá la recta numérica. Luego, indicá si cada relación es verdadera o falsa.
-
- a. $\sqrt{5} < \sqrt{8}$ c. $\sqrt{8} > \sqrt{15}$
 b. $\sqrt{15} < \sqrt{20}$ d. $4 > \sqrt{8}$
- 24.** Aplicá la construcción de $\sqrt{10}$ que aparece en este capítulo para ubicar en la recta numérica los siguientes números irracionales usando regla y compás. Explicá tu procedimiento.
- $2\sqrt{10}$ $-\sqrt{10}$ $\sqrt{10}-1$ $\sqrt{10}+1$ $\frac{\sqrt{10}}{2}$
- 25.** Resolvé y señala si el resultado es racional o irracional.
- $\sqrt{2} - \sqrt{8}$
 - $-2\sqrt{3} + \sqrt{12}$
 - $\sqrt{50} \cdot \sqrt{10}$
 - $(\sqrt{2} - \sqrt{8})^2$
 - $\sqrt{28} \cdot \sqrt{7}$
 - $(\sqrt{7} + \sqrt{14})^2$
- 26.** **Estrategia: ensayo y error** Evaluá si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificá tu respuesta.
- La suma de dos números irracionales es siempre un número irracional.
 - La suma de un número racional y un número irracional es siempre un número irracional.
 - El producto de dos números irracionales es siempre un número irracional.
 - El producto de dos raíces cuadradas de números naturales iguales y de resultado irracional es un número racional.
 - El cubo de un número irracional puede ser un número racional.
- 27.** Completá con el menor número entero positivo para que el resultado sea racional.
- $\sqrt{12} - 2\sqrt{\underline{\hspace{2cm}}}$
 - $-3\sqrt{24} + 6\sqrt{\underline{\hspace{2cm}}}$
 - $\sqrt{27} \cdot \sqrt{\underline{\hspace{2cm}}}$
 - $\sqrt{490} \cdot \sqrt{\underline{\hspace{2cm}}}$
 - $\frac{\sqrt{243}}{\sqrt{\underline{\hspace{2cm}}}}$
 - $\frac{(\sqrt{27} + \sqrt{27})}{\sqrt{\underline{\hspace{2cm}}}}$

Aproximaciones



Redondeo y truncamiento

- **Aproximar** un número irracional es representar su valor a través de un racional lo suficientemente cercano. También pueden aproximarse números racionales a partir de otros con menos cifras decimales. Si al aproximar un número el valor obtenido es menor, se ha aproximado por **defecto**. En cambio, si es mayor, se ha aproximado por **exceso**.
- Una aproximación se puede hacer por **redondeo** a una determinada cifra decimal o por **truncamiento** de ella. Al aproximar $\pi = 3,14159\dots$ a los centésimos, se obtiene:
 - ✓ por redondeo 3,14 → porque la cifra decimal de la derecha es menor que 5;
 - ✓ por truncamiento 3,14 → porque se eliminan todas las cifras de la derecha.Y si se aproxima $\pi = 3,14159\dots$ a los milésimos, se obtiene:
 - ✓ por redondeo 3,142 → porque la cifra decimal de la derecha es mayor o igual a 5;
 - ✓ por truncamiento 3,141 → porque se eliminan todas las cifras de la derecha.De las anteriores, solo 3,142 es una aproximación por exceso porque es el único valor mayor que π , mientras que las restantes son por defecto. Además, esa es la mejor aproximación porque es la más cercana a pi.

28. Utilizá el redondeo para completar el cuadro.

Número	Aproximación por redondeo		
	A los décimos	A los centésimos	A los milésimos
453,2730425			
0,5			
$\sqrt{11}$			
$\sqrt{19}$			
25,09			
$\sqrt{30}$			

29. Utilizá el truncamiento para completar el cuadro.

Número	Aproximación por truncamiento		
	A los décimos	A los centésimos	A los milésimos
453,2730425			
0,5			
$\sqrt{11}$			
$\sqrt{19}$			
25,09			
$\sqrt{30}$			

30.  **Estrategia: analizar y comparar** Mirá los cuadros anteriores; después respondé.

- ¿Qué tiene que pasar para que al redondear, por ejemplo, a los décimos, se obtengan aproximaciones por defecto?
- ¿Al truncar pueden obtenerse aproximaciones por exceso? ¿Por qué?
- ¿En qué casos las aproximaciones por redondeo y por truncamiento son iguales?

31. Del mismo modo que ϕ es conocido como el número de oro, también existen el número de plata (δ_{Ag}) y el número de bronce (δ_{Br}), que suelen usarse en diseño, escultura y pintura.

- Utilizá una calculadora para determinar una aproximación por redondeo a los décimos de cada número. Luego, ubicalas en la recta numérica.

$$\text{Número de oro: } \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{Número de plata: } \delta_{Ag} = \sqrt{2} + 1 \quad \text{Número de bronce: } \delta_{Br} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$$



- Indicá si ϕ , δ_{Ag} y δ_{Br} estarán a la derecha o a la izquierda de sus respectivas aproximaciones y explicá cómo te das cuenta.

32. Mía quería aproximar algunas raíces no exactas, pero no tenía calculadora. Entonces, hizo así:

$$\begin{aligned} \sqrt{4} &< \sqrt{5} < \sqrt{9} \\ 2 &< \sqrt{5} < 3 \end{aligned}$$

Quiero aproximar $\sqrt{5}$. Entonces,
la encierro entre dos raíces
enteras consecutivas...
¡Listo! $\sqrt{5}$ está entre 2 y 3.



Hacé como Mía y escribí entre qué números enteros consecutivos están estas raíces.

- $< \sqrt{15} <$
- $< \sqrt{28} <$
- $< \sqrt{76} <$
- $< \sqrt{110} <$



34. ¿Cómo funciona tu calcu?

- Encontrá la expresión decimal de $\frac{11}{3}$. ¿Se obtiene un decimal exacto o periódico? ¿Por qué?

- Tu calcu redondea o trunca los resultados? ¿Y las de tus compañeros? ¿Cómo te das cuenta?



33. Sol approximó por redondeo a los centésimos algunas raíces cuadradas no exactas de números naturales. ¿Qué raíz tenía en cada caso?

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| a. 2,45 → | c. 3,87 → | e. 3,74 → |
| b. 3,32 → | d. 4,58 → | f. 5,10 → |

Intervalos reales



Entre dos números

- Para referirse a todos los números reales que están entre otros dos, se usan los **intervalos**. Si se quiere incluir a esos dos números, se usan intervalos **cerrados**, y si no, intervalos **abiertos**.
- $[0; \sqrt{2}]$ es un intervalo cerrado que contiene el 0, la $\sqrt{2}$ y todos los números que están entre ambos.
- $(0; \sqrt{2})$ es un intervalo abierto que contiene todos los números que están entre 0 y $\sqrt{2}$, pero ninguno de estos dos.
- También hay intervalos que contienen solo uno de los extremos (no son abiertos ni cerrados). $[0; \sqrt{2})$ contiene el 0, pero no la $\sqrt{2}$, y $(0; \sqrt{2}]$ contiene la $\sqrt{2}$, pero no contiene el 0 (ambos intervalos contienen todos los números que están entre 0 y $\sqrt{2}$).

- Intervalos, inecuaciones y representación en la recta:

$$[0; \sqrt{2}] \rightarrow 0 \leq x \leq \sqrt{2} \quad (0; \sqrt{2}) \rightarrow 0 < x < \sqrt{2} \quad [0; \sqrt{2}) \rightarrow 0 \leq x < \sqrt{2} \quad (0; \sqrt{2}] \rightarrow 0 < x \leq \sqrt{2}$$

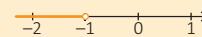
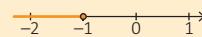
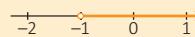
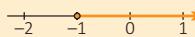


Desde o hasta...

- También se usan intervalos para mencionar a todos los números reales más grandes o más chicos que un determinado valor. En estos casos, se usa el símbolo del infinito para indicar que el intervalo no tiene uno de los extremos.
- $[-1; \infty)$ contiene el -1 y todos los números mayores que él, mientras que $(-1; \infty)$ contiene solo los números mayores que -1 .
- $(-\infty; -1]$ contiene el -1 y todos los números menores que él, mientras que $(-\infty; -1)$ no contiene -1 , sino solo los números menores que él.

- Intervalos, inecuaciones y representación en la recta:

$$[-1; \infty) \rightarrow x \geq -1 \quad (-1; \infty) \rightarrow x > -1 \quad (-\infty; -1] \rightarrow x \leq -1 \quad (-\infty; -1) \rightarrow x < -1$$



35. Male, Juani y Vicky le comentan lo que aprendieron a Manu, que está enfermo. ¿A qué intervalo se refiere cada uno?

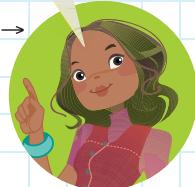
Hoy vimos cómo se escribe un intervalo que contiene todos los números mayores que 2...

Male →



¡No se olviden de los que tienen el 3 y todos los números menores que él!

Vicky →



Sí, y también los que contienen todos los números que están entre 2 y 3.

Juani →



36. Expresá los siguientes intervalos a partir de inecuaciones y representalos.

a. $(-1; 0) \rightarrow$

c. $(-\infty; 0) \rightarrow$

e. $[1; 9] \rightarrow$

b. $[-8; -7) \rightarrow$

d. $[10; \infty) \rightarrow$

f. $(0,5; \infty) \rightarrow$

37. Estrategia: pensar primero en lenguaje cotidiano Expresá estas inecuaciones como intervalos.

a. $x \geq 5 \rightarrow$

c. $x < -9 \rightarrow$

e. $-5 < x < -4 \rightarrow$

b. $-1,5 \leq x < 3 \rightarrow$

d. $0 \leq x \leq 10 \rightarrow$

f. $x \leq 15 \rightarrow$

38. Completá la tabla.

	Intervalo	Inecuación
Todos los números reales positivos		
Todos los números reales negativos		
Todos los números reales no negativos		
Todos los números reales		$\times \times$

39. Expresá a partir de inecuaciones e intervalos.

a. \rightarrow

b. \rightarrow

c. \rightarrow

d. \rightarrow

40. Hacé de profe Tres compañeros discutían mirando los intervalos representados en la actividad anterior. ¿Quién o quiénes tienen razón?

Maru: –¿Vieron? Todos los intervalos tienen el 0.

Mati: –No, casi todos, porque en el tercero no está el cero, pero en los restantes sí.

Milu: –No, en el último tampoco está, así que solo está en los dos primeros.

Fijate bien

No es lo mismo decir que un número es positivo que decir que no es negativo.

Tengo tarea

41. Escribí un intervalo que cumpla lo pedido en cada caso.

- a. Que no contenga el 0.
- b. Que contenga al menos dos números enteros.
- c. Que no contenga números enteros.

- 42.** Sofía le encargó a un carpintero la fabricación de una mesa circular de 5 m de perímetro.
- Indicá el valor exacto del diámetro de la mesa que quiere Sofía. Recordá que la longitud de la circunferencia se calcula multiplicando el diámetro por π .
 - ¿Cuántos decimales creés que tiene que usar el carpintero para fabricar una mesa como la que encargó Sofía? ¿Por qué?
- 43.** Escribí un número racional y otro irracional cuyas aproximaciones por redondeo a los diezmilésimos sean 3,1416 y a los milésimos, 3,142. ¿Los números que escribiste son únicos? Justificá tu respuesta.
- 44.** Aproximá por truncamiento y redondeo el valor de $\sqrt{3}$ a los diezmilésimos y a los cienmilésimos. Luego, determiná qué aproximación es mejor en cada caso.
- 45.** Redondeá cada número a los centésimos y después resolvé.
- $2\pi + \frac{5}{8} - \sqrt{3} - \frac{215}{99}$
 - $-\left[(1,5 + \sqrt{2} - 3) + 8,3 - \frac{5}{6} \right] + \pi$
- 46.** Resolvé los cálculos anteriores ingresándolos completos en la calculadora y después redondeá el resultado a los centésimos. ¿Obtuviste los mismos resultados que antes? Explicá tu respuesta.
- 47.** ¿Cuál de estos números racionales es una buena aproximación para $\sqrt[3]{39}$?
- 4,56 3,39 5,39 6,56
- 48.** Representá cada intervalo y escribí la inecuación correspondiente.
- $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$
 - $[1,5; \pi]$
 - $(2\pi; \infty)$
 - $[2\pi; \infty)$
 - $(-\infty; -\pi]$
 - $(-2; -1,5]$
- 49.** ¿Alguno de los intervalos de la actividad anterior no contiene números enteros? ¿Cómo te das cuenta?
- 50.** Escribí el intervalo que corresponde a cada inecuación y representalo.
- $x \leq -\sqrt{7}$
 - $-9 \leq x \leq -\frac{9}{2}$
 - $x < 3,15$
 - $\sqrt{5} \leq x < 5$
 - $x \geq -\frac{3}{4}$
 - $0 < x < \pi$
- 51.** ¿Cuál o cuáles de los intervalos de la actividad anterior contienen el número π ? ¿Cómo te das cuenta?
- 52.** Laura le pasó la tarea a cuatro de sus compañeros porque estuvieron ausentes en la clase de hoy. A todos les mandó el mismo mensaje:
- Escribí una inecuación para el intervalo de todos los números mayores que 5.
- Mirá lo que escribieron sus compañeros y corrígilos. ¿Cómo te das cuenta de si están bien o no?
- | | |
|-------------------------|----------------------|
| Flor. $x \geq 5$ | Beto. $x > 5$ |
| Sol. $5 < x$ | Fito. $x < 5$ |
- 53.** Analizá si hay números enteros en cada uno de estos intervalos y respondé. Explicá tus respuestas.
- | | | |
|---------------|----------------|--------------|
| $(-0,1; 0,1]$ | $[-3; \infty)$ | $[-\pi; -3]$ |
| $(-2; 0,1)$ | $(-2; -1)$ | |
- ¿Hay algún intervalo que contenga solo un número entero? Si hay, indicá cuál o cuáles.
 - ¿Cuál o cuáles no incluyen números enteros?
 - ¿Hay algún intervalo que contenga infinitos números enteros? ¿Y que contenga más de uno, pero no infinitos? En cualquiera de los dos casos, si hay más de uno, mostrá cuáles son.
 - ¿Hay algún intervalo que no contenga números racionales? ¿En todos hay irracionales?
- 54.** Escribí un intervalo que cumpla lo pedido en cada caso. Compara tus respuestas con las de tus compañeros. ¿Son iguales?
- Que contenga solo números positivos.
 - Que no contenga números negativos, pero que no todos sean positivos.
 - Que contenga al 3 y a su opuesto, pero no al 4 ni a su opuesto.



Repaso todo

55. Considerá las raíces cuadradas de los números naturales desde 1 hasta 20. ¿Cuáles son números racionales y cuáles, irracionales?

56. Mirá cómo hizo Guille para resolver este cálculo.

$$\sqrt{8,4+0,5} = \sqrt{8,9} = \frac{\sqrt{89}-8}{9} = \frac{\sqrt{81}}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

Mile y Lauti discuten acerca de esta resolución.

Está mal, porque tiene que dar irracional.

Mile

No. Guille se equivocó, pero el resultado no es irracional.

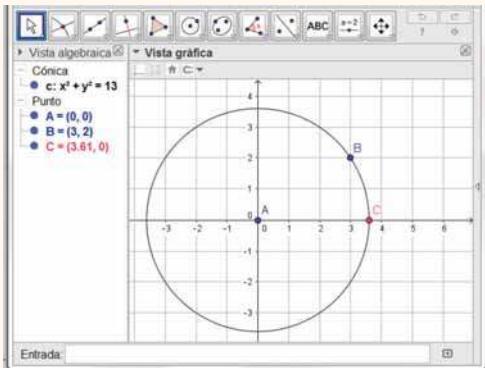
Lauti

¿Es cierto que Guille se equivocó? Si es así, ¿cuál es su error? ¿Y quién tiene razón, Lauti o Mile?



57. Marina usó el GeoGebra para representar un número irracional en la recta numérica (eje x):

- Marcó los puntos $(0, 0)$ y $(3, 2)$.
- Dibujó una circunferencia de centro $(0, 0)$ que pasa por el $(3, 2)$.
- Por último, marcó una intersección entre la circunferencia y el eje x.



- a. ¿Qué número irracional representó? (corresponde a la coordenada x del punto C)
 b. Observá la coordenada x del punto C en la lista, a la izquierda del gráfico. ¿Indica el valor exacto del número representado o es una aproximación?



58. Representá en la recta numérica. Podés usar el GeoGebra o hacerlo en tu carpeta.

$$\sqrt{8}$$

$$\sqrt{17}$$

$$-\sqrt{20}$$

59. Efectuá estas operaciones. ¿Los resultados son racionales o irracionales? ¿Por qué pasa eso?

- a. $\sqrt{5} + (-\sqrt{5})$ c. $(-\sqrt{6} + \sqrt{6}) + \sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}$
 b. $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}$ d. $\sqrt{20} \cdot \frac{1}{\sqrt{20}} + \sqrt{35} \cdot \frac{1}{\sqrt{35}}$

60. Resolvé e identificá si el resultado es racional o irracional.

a. $\sqrt{\pi + (-\pi)}$

d. $\sqrt{\frac{7}{3} + 6,6}$

b. $\sqrt{6,2 - 0,2}$

e. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

c. $\sqrt{21 - 7}$

f. $\sqrt{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$

61. ¿Cuál de estas expresiones equivale a $\sqrt{12}$? ¡No vale usar la calculadora!

$3\sqrt{2}$

$4\sqrt{3}$

$2\sqrt{3}$

$6\sqrt{2}$

62. ¿Cuál de estas expresiones equivale a $\sqrt[3]{5^5}$? ¡Otra vez sin la calculadora!

25

$5\sqrt[3]{25}$

$25\sqrt[3]{5}$

$\sqrt[3]{5}$

63. El volumen de un cubo es 125 m^3 . ¿Es correcto decir que el área de una de sus caras es equivalente a $\sqrt[3]{125^2}$? ¿Por qué?

64. Resolvé y expresá los resultados de la manera más simple posible.

a. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$

b. $(\sqrt{20} - \sqrt{45}) \cdot \sqrt{5}$

c. $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{6})$

d. $(3\sqrt{2} - 5) \cdot (4\sqrt{2} - 3)$

e. $\sqrt{150} - 3\sqrt{24} + \sqrt{6}$

f. $\sqrt[3]{250} - 3\sqrt[3]{54}$

g. $(-2\sqrt{32} + 7\sqrt{72}) \cdot (2\sqrt{32} + 7\sqrt{72})$

h. $(\sqrt{2} + 2)^2 \cdot \sqrt{2}$

i. $(3\sqrt{2} + 1)^2 - (3\sqrt{2} - 1)^2$

j. $(4\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - (4\sqrt{6} + \sqrt{2})^2$



65. Ubicá estos radicales en los siguientes cálculos de manera que los resultados sean racionales.

$\sqrt{2}$

$\sqrt{3}$

$\sqrt{5}$

$\sqrt{6}$

a. $\sqrt{54} \cdot \dots$

c. $\sqrt{32} - 4 \dots$

b. $\sqrt{75} \dots$

d. $\sqrt{45} \dots$

66. Completá la tabla con aproximaciones a los centésimos.

Valor exacto	Aproximación por...	
	redondeo	truncamiento
2π		
$\sqrt{60}$		
$\sqrt[5]{200}$		
$\frac{2}{11}$		
$\frac{1}{\sqrt{2}}$		

67. ¿Es necesario aproximar el área de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $6\sqrt{5}$ cm y $8\sqrt{5}$ cm para expresarla con un número entero? ¿Por qué?

68. Calculá el valor exacto de la altura del rectángulo representado, que tiene un área de 150 cm². ¿Es posible obtener una aproximación a los décimos por exceso? ¿Por qué?



69. ¿Verdadero o falso? ¿Por qué?
- El resultado de $\sqrt{12} + 4\sqrt{75} - 6\sqrt{48}$ redondeando a los centésimos es 3,46.
 - La diferencia entre el redondeo a los décimos de $3\sqrt{2}$ y el redondeo a las unidades de $2\sqrt{3}$ es 1,2.
 - La diferencia entre el redondeo a los centésimos de ϕ (pág. 49) y su redondeo a los décimos es 1.
 - El redondeo a los diezmilésimos de $\sqrt{12}$ es igual a su aproximación a los cienmilésimos.

70. Escribí los intervalos a los que se hace referencia en el siguiente texto.

La OMS (Organización Mundial de la Salud) advierte que la mayoría de la gente ingiere demasiado sodio (entre 9 g y 12 g de sal por día), y aconseja “mantener el consumo de sal por debajo de 5 gramos diarios” para prevenir la hipertensión y otras enfermedades.

71. Expresá como intervalo y representá en la recta numérica.

a. $x \leq -6$

d. $-\frac{1}{2} < x$

b. $x > \frac{4}{3}$

e. $-\frac{3}{4} < x \leq \frac{5}{2}$

c. $-\frac{1}{3} \leq x < \frac{7}{3}$

f. $x < \frac{4}{5}$

72. Representá estos intervalos en la recta numérica y escribí en cada caso la inecuación correspondiente.

a. $(-\infty; -7]$

c. $(-\frac{8}{5}; \infty)$

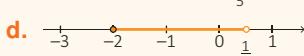
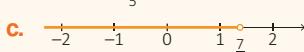
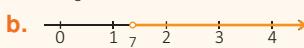
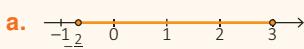
e. $[\frac{9}{4}, \frac{5}{2}]$

b. $(\frac{1}{2}; \frac{3}{4})$

d. $[-\frac{1}{2}; 0)$

f. $(\frac{2}{5}, \frac{9}{5})$

73. Escribí el intervalo y la inecuación correspondiente en cada caso.



74. ¿Verdadero o falso? Si es verdadero, explicá por qué y si no lo es, mostrá un contrajeemplo (es decir, un ejemplo de que no ocurre).

- a. Los intervalos abiertos no contienen números enteros.

- b. Si uno de los extremos de un intervalo es un número entero, entonces ese intervalo contiene al menos un número entero.

- c. Todos los intervalos con extremos de distinto signo contienen al menos un número entero.

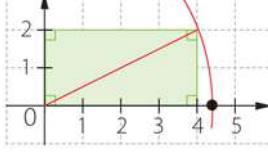
- d. Los intervalos de extremos con números enteros no contienen racionales ni irracionales.

- e. No todos los intervalos cerrados de distintos extremos contienen números racionales.

Saquen una hoja



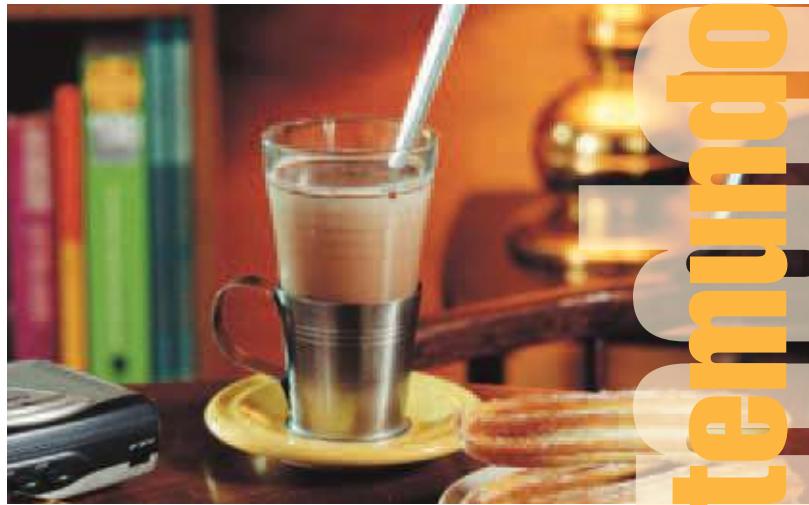
Marqué la opción correcta.

1. ¿A qué conjunto numérico pertenece el número $\sqrt{77}$?
- Solo al de los números racionales.
 Solo al de los números enteros.
 Solo al de los números irracionales.
 Al de los números irracionales y al de los reales.
2. ¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?
- I. Todos los números enteros son racionales.
II. Todos los números reales son racionales.
III. Ningún número entero es irracional.
- Solo I.
 Solo I y II.
 Solo III.
 Solo I y III.
3. ¿Cuál es el número irracional representado en la recta numérica a partir del procedimiento que se muestra en la figura?
- 
- $\sqrt{4,5}$
 $\sqrt{6}$
 $\sqrt{15}$
 $\sqrt{20}$
4. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa un número irracional?
- $\pi - \pi$
 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$
 $\sqrt{8} : \sqrt{2}$
 $\sqrt{2} + \sqrt{2}$
5. ¿Cuál de las siguientes expresiones equivale a $2\sqrt[4]{64} - \sqrt{18}$?
- $6\sqrt{2}$
 $\sqrt{2}$
 $7\sqrt{2}$
 2
6. ¿Cuál es el valor aproximado de $e = 2,718281\dots$ que resulta de truncarlo a los centésimos?
- 2,70
 2,72
 2,71
 2,73
7. ¿Cuál es el valor aproximado de $\pi = 3,141592\dots$ que resulta de redondearla a los milésimos?
- 3,14
 3,1416
 3,141
 3,142
8. ¿Cuál es el intervalo correspondiente a $-\sqrt{15} < x \leq \sqrt{15}$?
- $[-\sqrt{15}; \sqrt{15})$
 $(-\sqrt{15}; \sqrt{15}]$
 $(-\sqrt{15}; \sqrt{15})$
 $[-\sqrt{15}; \sqrt{15}]$
9. ¿Cuál de estos intervalos no contiene números enteros?
- $[-\sqrt{2}; 1)$
 $(-\sqrt{2}; 1]$
 $(-\sqrt{2}; -1)$
 $[-\sqrt{2}; -1]$

Esto ya lo sabía...

1. Lucas parte del kilómetro cero a las tres de la tarde y viaja a una velocidad media de 80 km/h.
 - a. ¿Qué distancia recorrió al cabo de dos horas y media de viaje?
 - b. Escribí una fórmula que te permita calcular la distancia recorrida por Lucas a medida que pasa el tiempo.
 - c. ¿Cuánto tiempo tardó en recorrer 240 km?
 - d. Si llegó a su destino a las diez y media de la noche, ¿cuántos kilómetros recorrió?

2. El gasto fijo mensual que tiene Lucas para mantener el auto es de \$ 1.600; además, por cada kilómetro recorrido gasta \$ 1,40 de combustible.
 - a. Escribí una fórmula que te permita calcular el gasto mensual que tiene Lucas por usar el auto, según los kilómetros recorridos (gasto fijo más costo de combustible).
 - b. Si solo puede gastar en el auto \$ 4.000 por mes, ¿cuántos kilómetros puede recorrer?

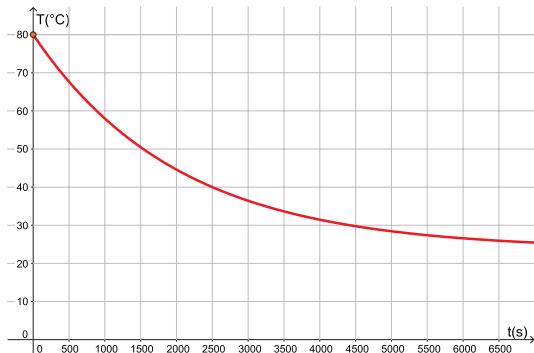


Muchas situaciones se pueden representar a partir de las funciones y sus gráficos.

Las funciones nos cuentan cómo es la relación entre dos magnitudes, y los gráficos nos muestran su comportamiento “de un solo golpe de vista”. Por eso son una valiosa fuente de información. Interpretarlos correctamente nos permite ahorrar mucho tiempo, además de facilitar la comunicación de datos.

Mediante gráficos puede representarse, de forma sencilla, cómo disminuye el volumen de tu banda de rock favorita a medida que te alejas del escenario, o cómo se enfriá tu leche chocolatada.

Este gráfico muestra cómo varía la temperatura de tu desayuno, que al principio está caliente, si dejás que se enfrie solo.



- ¿Qué temperatura tiene al principio?
- ¿Cuánto tiempo transcurrió hasta que alcanzó una temperatura de 40 °C?

Funciones. Análisis de gráficos

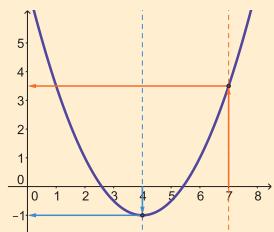


Las funciones desde los gráficos

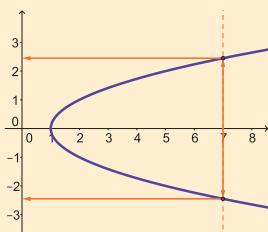
- En una relación se establece un vínculo, por ejemplo, entre las personas. En Matemática, un tipo de relación especial es aquella que vincula dos variables, una **independiente** y otra **dependiente**. Por ejemplo, cuando se dice que el **costo** de algo **depende del consumo**. En este caso, el costo es la **variable dependiente** y el consumo, por ejemplo de la luz, la **variable independiente**.

Para que una relación sea **función**, a cada valor de la variable independiente (eje horizontal) le debe corresponder **uno y solo un valor** de la variable dependiente (eje vertical).

Una forma fácil de darse cuenta de si una relación es o no función consiste en mirar su gráfico. Si al trazar rectas verticales estas cortan al gráfico más de una vez, entonces no corresponde a una función.



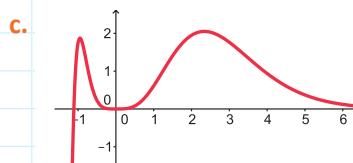
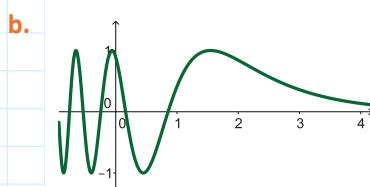
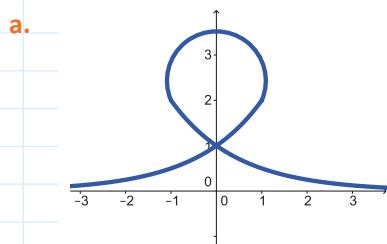
Es función.



No es función.

El conjunto de valores que puede tomar la variable independiente es el **dominio** de la función, y el conjunto de los que toma la variable dependiente, su **imagen**.

3. Indicá si los siguientes gráficos representan funciones. En el caso de que alguno no la represente, explicá cómo te diste cuenta.



4. Volvé a los gráficos que no representan funciones de la actividad anterior. ¿Es posible modificarlos para que correspondan a funciones? Dibuja.

5. **Estrategia: realizar un gráfico de análisis** Tomás le dice a Alfredo que puede dibujar una función que corte dos veces el eje **y**, pero Alfredo cree que eso no es posible. ¿Quién tiene razón? Explicá tu respuesta.

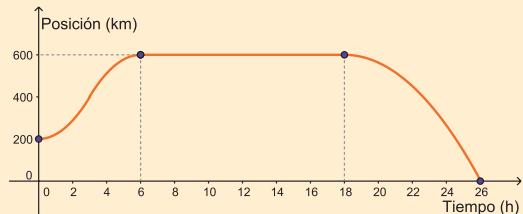


Graficando

Los gráficos son una herramienta de análisis y síntesis muy importante. A partir de ellos puede “contarse una historia”. Por ejemplo, este gráfico cuenta cómo se movió Juan en su moto, “dice” dónde se encontraba respecto del km 0 de la ruta, con el transcurso del tiempo. El eje **x** representa el tiempo y el eje **y**, la posición.

- Durante las primeras seis horas Juan se alejó del punto de partida. Se dice que en este intervalo de tiempo, $(0; 6)$, la función **crece** ya que, a medida que “nos movemos” hacia la derecha sobre el eje **x**, la función toma valores cada vez mayores (Juan está cada vez más lejos).

En el intervalo de tiempo $(6; 18)$, la función es **constante** porque toma siempre el mismo valor (Juan se tomó un descanso, no se alejó ni se acercó). En el intervalo de tiempo $(18; 26)$, la función **decrece** porque toma valores cada vez más chicos (Juan regresa, acercándose al km 0 de la ruta).



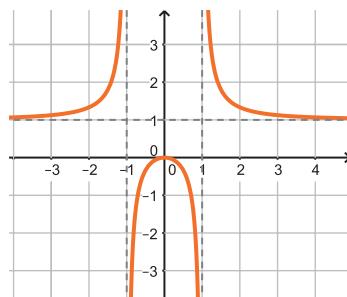
- Lo más lejos que llegó Juan es a 600 km del comienzo de la ruta: se dice que el valor máximo de la función es 600; lo alcanzó a las 6 hs y permaneció allí hasta las 18 hs.

Si al recorrer el eje **x** de izquierda a derecha la función pasa de un intervalo de crecimiento a uno de decrecimiento, esa función tiene un **máximo**, que puede ser **absoluto**, si es el mayor valor alcanzado, o **relativo**, si hay otros “picos más altos”.

Si sucede al revés, es decir, si se pasa de un intervalo de decrecimiento a uno de crecimiento, la función tiene un **mínimo**, que también puede ser **absoluto** o **relativo**.

- Otros elementos importantes de la función son representados por los puntos en los que el gráfico corta los ejes. El punto en el que la función corta el eje **y** indica la **ordenada al origen**, que es el valor que toma la función cuando **x** vale 0. En este caso, la ordenada al origen es $y = 200$ y representa el lugar de donde partió el motociclista. El punto de corte con el eje **x** señala la **raíz** de la función, es decir, el valor que toma **x** cuando **y** es 0. En este caso, la raíz es $x = 26$ y representa el momento en el que el motociclista llegó al km 0.

6. La función representada no está definida en $x = 1$ ni en $x = -1$, es decir, su dominio es $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$. Mirando el gráfico determiná los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento. ¿Esta función tiene algún máximo absoluto? ¿Y relativo?

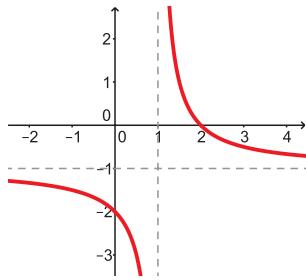


Fijate bien

La función se aproxima a las rectas marcadas en el gráfico con líneas punteadas, llamadas asíntotas. Las verticales nunca se cortan.

7. **Hacé de profe** Al analizar el gráfico, Julián hizo las siguientes afirmaciones. Corregilas y explicá tus correcciones.

- La raíz de la función es $y = 2$ y la ordenada al origen es $x = -2$.
- La función es siempre creciente.
- El dominio de la función son todos los reales excepto el 1.
- La imagen de la función son todos los reales.



Funciones y rectas



Función lineal

- Una de las funciones más simples es la **función lineal**, cuyo gráfico es una **recta**.

La fórmula de la función lineal es: $f(x) = mx + b$, donde **m** y **b** son dos números reales cualesquiera.

✓ **m** es la **pendiente** de la recta e indica su dirección, es decir, informa acerca de la inclinación de la recta.

La pendiente también determina si la función es creciente o decreciente: si es positiva, entonces la función es creciente; y si es negativa, la función es decreciente.

✓ **b** es la **ordenada al origen**, ya que es el valor que toma la función cuando **x** vale cero. Es decir, si se reemplaza **x** por 0 y se hace la cuenta, se obtiene **b**: $f(0) = m \cdot 0 + b \Rightarrow f(0) = b$.

✓ Por último, para calcular la **raíz** de la función, se la iguala a 0 y se despeja **x**: $mx + b = 0$.

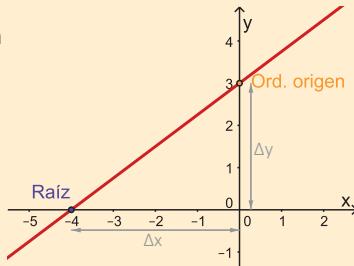
- Un ejemplo puede ser la función $f(x) = \frac{3}{4}x + 3$. La pendiente es $\frac{3}{4}$ y la ordenada al origen es 3.

Para calcular la raíz, se iguala la función a cero:

$$\frac{3}{4}x + 3 = 0$$

$$\frac{3}{4}x = -3$$

$$x = -3 : \frac{3}{4} \Rightarrow x = -4$$



En el gráfico puede verse que la pendiente coincide con el cociente de la diferencia en **y** de dos puntos de la recta, y la diferencia en **x** de esos mismos puntos: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Si se consideran los puntos (0; 3) y (-4; 0), $m = \frac{3-0}{0-(-4)} = \frac{3}{4}$. Esto puede ser útil si se desconociese la fórmula de la función.

8. Determiná la pendiente, la ordenada al origen y la raíz de cada una de estas funciones, y representalas.

a. $f(x) = 3x - 2$

c. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

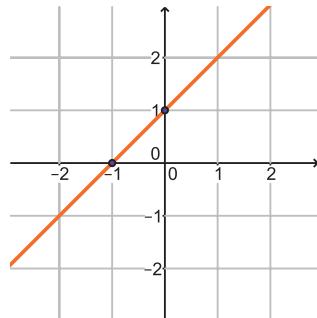
b. $f(x) = -x - 2$

d. $f(x) = \frac{2}{5}x + \frac{7}{5}$

9. La recta representada corresponde a una función lineal.

a. Escribí la fórmula de la función.

b. Encontrá la raíz de manera analítica (es decir, resolviendo la ecuación) y verificá que coincide con el valor que muestra el gráfico.



10. **Estrategia: realizar un gráfico de análisis** Escribí la fórmula de la función lineal que cumple lo pedido en cada caso.

a. Su gráfico pasa por el punto $(-5; 7)$ y tiene ordenada al origen en $y = -1$.

b. Su gráfico pasa por los puntos $(-3; -1)$ y $(4; 6)$.



Si se desconoce el valor de m y b en:

$$y = mx + b,$$

se obtiene $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$; una vez conocido m , puede hallarse b , reemplazando las coordenadas de un punto en la fórmula y resolviendo una ecuación: si $y = 2x + b$ pasa por $(-2; 1)$, entonces $1 = 2 \cdot (-2) + b$
 $1 = -4 + b$, con lo que $b = 5$.

11. Mirá las funciones de la actividad anterior.

a. ¿Cuál es la raíz de cada una? ¿Son crecientes o decrecientes?



b. Representá las funciones ingresando las fórmulas obtenidas desde la barra de entrada y verificá que pasen por los puntos mencionados en la actividad anterior.

12. Dibujá una recta que tenga ordenada al origen 2 y pase por el punto $(4; 2)$.

a. Sin hacer cuentas determiná cuánto vale la pendiente. Explicá cómo te diste cuenta.

b. ¿Tiene raíces? ¿Por qué?

- 13.** Dibujá una recta que tenga raíz 2 y pase por el punto (2; 4).



Recordá que para que un gráfico corresponda a una relación funcional, a cada valor de la variable independiente le debe corresponder uno y solo un valor de la variable dependiente.

- a.** Carlitos dice que la recta representada es el gráfico de una función lineal. ¿Tiene razón? ¿Por qué?
- b.** ¿Puede determinarse el valor de la pendiente? Explicá tu respuesta.
- 14.** Lucas y Matías compiten para ver quién dibuja la recta que crece más rápido. No pueden hacerla vertical y tampoco pueden escribir la fórmula antes de representarla. Lucas dibujó una que pasa por los puntos (1; 1) y (2; 5); en cambio, la de Matías pasa por (2; 4) y (3; 6). ¿Cuál de las dos rectas “crece más rápido”? ¿Cómo podrías darte cuenta sin representarlas?
- 15.** La posición de un móvil está dada por la función $P(t) = 20 m + 10 m/s t$, donde t es el tiempo medido en segundos.
- a.** ¿Cuál es la posición del móvil en el instante $t = 0$ s? ¿A qué elemento de la función lineal corresponde?
- b.** ¿A qué velocidad se desplaza? ¿A qué elemento de la función lineal corresponde?
- c.** ¿En qué instante se encuentra en la posición 0 m? ¿A qué elemento de la función lineal corresponde?
- d.** Hacé un gráfico de la función.



Recordá que el valor de la velocidad equivale a la distancia recorrida en una unidad de tiempo.

Paralelas y perpendiculares



Rectas en el plano

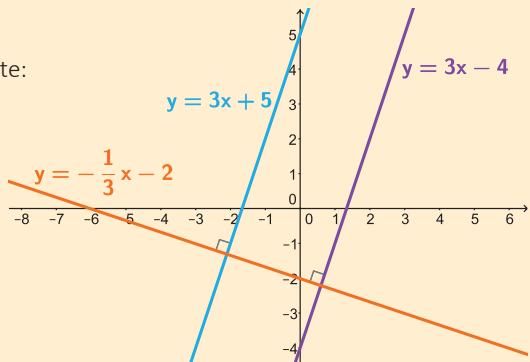
Como se vio anteriormente, la pendiente indica la dirección de la recta, es decir, su inclinación respecto del eje **x**. A partir de la pendiente es posible determinar el ángulo que forman dos rectas entre sí y, en consecuencia, puede establecerse el paralelismo y la perpendicularidad entre rectas.

- Las rectas **paralelas** tienen la misma inclinación; por lo tanto, sus ecuaciones deben tener la **misma pendiente**.
- Las rectas que no son paralelas son **secantes**, es decir, se cortan en un punto. Entre ellas, las rectas **perpendiculares** forman, al cortarse, ángulos de 90°. Para que esto suceda, sus pendientes tienen que ser **recíprocas y de signo contrario**.
- El gráfico de la derecha muestra dos rectas paralelas: la **celeste** y la **violeta**. Como se puede ver, ambas tienen la misma pendiente:

$$m_1 = m_2 = 3$$

También se puede ver que la recta **anaranjada** es perpendicular a las otras dos y que su pendiente es $-\frac{1}{3}$, es decir:

$$m_3 = -\frac{1}{m_2} = -\frac{1}{m_1}$$



16. Escribí la ecuación de una recta paralela a $y = 4x - 2$, que pasa por el punto $(0; 0)$. Después escribí la ecuación de otra recta, perpendicular a las anteriores, que también pase por el origen. Por último, representalas en el mismo par de ejes y verificá el paralelismo y la perpendicularidad.



Fijate bien

Tené en cuenta que para “ver” el ángulo recto entre las perpendiculares, los dos ejes deben tener la misma escala.

17. **Hacé de profe** Tomás asegura que la recta R, cuya ecuación es $y = -5x + 2$, es paralela a la que pasa por los puntos $(4; -5)$ y $(2; 5)$. ¿Tiene razón?

18. Volvé a la actividad anterior. Si Tomás tenía razón, escribí la ecuación de la recta perpendicular a R que pasa por el punto $(4; -5)$. Si no tenía razón, escribí la ecuación de la recta paralela a R que pasa por el punto $(2; 5)$. Graficá todas las rectas con las que trabajaste en esta actividad y en la anterior, en el mismo par de ejes.

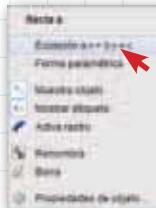
- 19.** Hallá la ordenada al origen de la recta que es paralela a $y = 4x - 1$ y que pasa por el punto $(4; 8)$. Hacé un gráfico para verificar tu respuesta.

- 20.** Graficá la recta que se pide en cada caso.

- a. Es perpendicular a la que pasa por $(0; 2)$ y $(6; 5)$, y tiene ordenada al origen 2.
- b. Su raíz es $x = 2$ y es perpendicular a la que pasa por $(-1; 3)$ y $(4; 3)$.

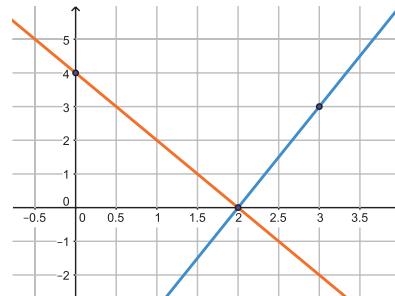


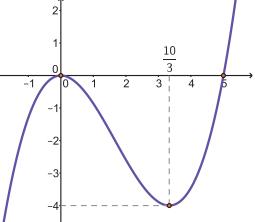
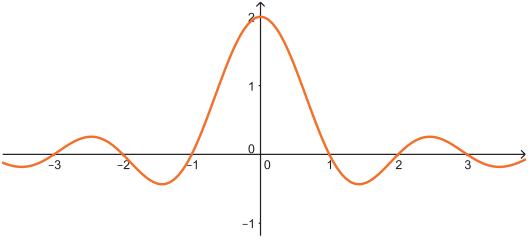
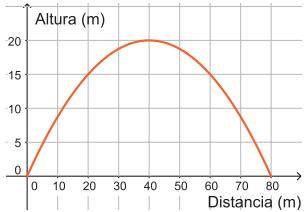
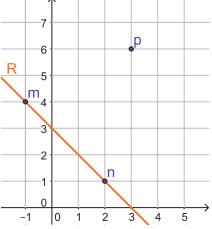
- 21.** Representá las rectas de la actividad anterior en tu computadora (acordate de que los puntos se ingresan con coma y no con punto y coma). Mirá en la vista algebraica las ecuaciones de las rectas (si no están escritas en la forma que conocés, hacé clic con el botón derecho del mouse y seleccioná la opción que se muestra en la imagen). Compará sus ecuaciones: ¿en qué caso vale el análisis de la pendiente para rectas perpendiculares? ¿Qué ocurre en el otro caso, cómo son esas ecuaciones?



- 22.** Un triángulo rectángulo tiene sus vértices en los puntos $A = (0; 3)$, $B = (6; 0)$ y $C = (3; 9)$. Hacé un gráfico de la situación y coloreá el triángulo. Escribí las ecuaciones de las rectas en las que están contenidos los lados del triángulo y determiná en qué vértice se encuentra el ángulo recto.

- 23.** **Hacé de profe** Mirando el gráfico, Ariana se animó a afirmar que las rectas representadas son perpendiculares. ¿Es verdad? ¿Cómo te das cuenta?



- 24.** Indicá si cada afirmación es verdadera o falsa y explicá por qué.
- Una relación es función si a cada valor de la variable independiente le corresponden dos o más valores de la variable dependiente.
 - Una función que en el intervalo $(a; b)$ crece y decrece en el intervalo $(b; c)$ presenta un mínimo en b .
 - Si a medida que aumentan los valores de x , también aumentan los valores de y , entonces la función es creciente.
- 25.** Señalá los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento de esta función. Indicá también las raíces, los máximos y mínimos.
¿Son absolutos o relativos?
- 
- 26.** Mirá el gráfico y respondé.
- 
- Indicá la ordenada al origen e identificá cuatro raíces.
 - ¿Cuál es el máximo absoluto? ¿Tiene máximos relativos? ¿Y mínimos?
- 27.** Al realizar un “saque desde el arco”, en ciertas condiciones, la trayectoria de la pelota resulta ser una curva como la representada.
- ¿Cuál es el máximo de la función? ¿Es absoluto? ¿Qué interpretación tiene para la situación propuesta?
 - ¿A qué distancia del punto de partida se encuentra la pelota en la altura máxima?
 - ¿Cuáles son las raíces de la función? ¿Qué interpretación tiene para esta situación?
- 
- 28.** Dibujá una función que decrezca de $(-\infty; -3)$, que crezca de $(-3; +\infty)$, que tenga raíces en $x = -6$ y $x = 5$ y ordenada al origen en $y = -2$.
- 29.** Escribí la fórmula de la función lineal que tiene su raíz en $x = -2$ y ordenada al origen $y = 1$.
- 30.** Indicá si cada afirmación es verdadera o falsa y explicá por qué.
- Una función lineal cuya pendiente es negativa es una función creciente.
 - Una función lineal de ordenada al origen 4 y raíz $x = 2$ tiene pendiente negativa.
 - Una función lineal de pendiente nula es una función constante.
 - Una recta que pasa por los puntos $(-4; 2)$ y $(4; 4)$ corta al eje vertical en un valor que está entre 2 y 4.
- 31.** En el gráfico se observa la recta R , dos de sus puntos, y un punto que no le pertenece.
- Escribí la ecuación de la recta que es perpendicular a R y que pasa por el punto m .
 - Escribí la ecuación de la recta que es perpendicular a R y que pasa por el punto n .
 - Escribí la ecuación de la recta que es paralela a R y que pasa por el punto p .
- 
- 32.**  **Estrategia: realizar un gráfico de análisis**
- Volvé a la actividad anterior.
- Si representases las rectas pedidas y R , todas en el mismo gráfico, ¿qué figura formarían? ¿Por qué?
 - Encontrá las ecuaciones de las rectas necesarias para que se forme una región triangular de vértices m , n y p .
- 33.** Indicá si cada afirmación es verdadera o falsa y explicá por qué.
- Siempre es posible encontrar más de una recta que sea paralela a una dada y pase por un punto indicado.
 - Si una recta es perpendicular a una dada, entonces es perpendicular a todas las paralelas a ella.

Sistemas de ecuaciones



Intersección entre dos rectas

- Ya se vio que al representar más de una recta, estas pueden cortarse en un punto, como se observa en las rectas del gráfico, pero en las que, a simple vista, no puede decirse exactamente cuáles son las coordenadas del punto de intersección.

Sin embargo, esos valores pueden calcularse encontrando la **solución simultánea** a las ecuaciones de ambas rectas.

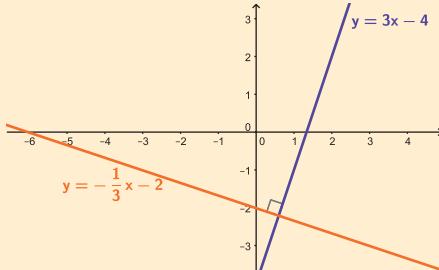
De esta manera, las ecuaciones forman un **sistema de ecuaciones**:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x - 2 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$$

Como la coordenada **y** de ese punto es la misma en ambas rectas, las ecuaciones pueden igualarse, para obtener el valor de **x**.

A este método se lo denomina **igualación**:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}x - 2 &= 3x - 4 \\ -2 + 4 &= 3x + \frac{1}{3}x \\ 2 &= \frac{10}{3}x \Rightarrow x = 2 : \frac{10}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{5} \end{aligned}$$



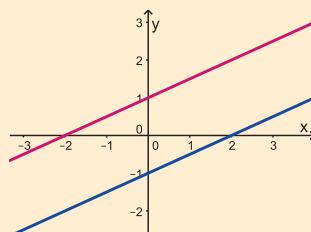
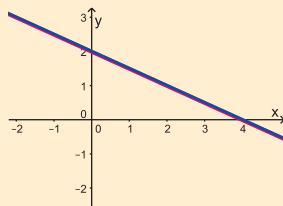
Para calcular el valor de **y**, solo hay que reemplazar este número en cualquiera de las dos ecuaciones originales. Por ejemplo, si se reemplaza en la segunda ecuación, se tiene:

$$y = 3 \cdot \frac{3}{5} - 4 \Rightarrow y = -\frac{11}{5}$$

Esto significa que el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas tiene una sola solución: $x = \frac{3}{5}$ e $y = -\frac{11}{5}$, que se corresponden con las coordenadas del punto de intersección entre ambas rectas.

En este caso, donde hay **una solución única**, se dice que el sistema es **compatible determinado**.

- Al representarse dos rectas, también podrían ocurrir estas situaciones:
 - ✓ Las dos rectas se superponen, coincidiendo todos sus puntos. En este caso, el sistema formado por las ecuaciones de esas rectas es **compatible indeterminado**, puesto que se pueden encontrar **infinitas soluciones**.
 - ✓ Las dos rectas son paralelas y distintas, por lo que no tienen puntos en común. En este caso, el sistema formado por las ecuaciones de esas rectas es **incompatible**, puesto que **no tiene solución**.



34. Encontrá la solución de este sistema en forma analítica (haciendo cuentas, usando el método de igualación) y después representá las rectas para verificarla.

$$\begin{cases} y = \frac{4}{5}x + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

35. Pedro observó este sistema y comparó las ecuaciones de las rectas; enseguida vio que tienen la misma ordenada al origen. Entonces, sin hacer cuentas, supo la solución. ¿Cuál es?

$$\begin{cases} y = 3x + 5 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$$

36. **Estrategia: analizar y comparar** Volvé a leer la relación que hay entre las rectas que forman un sistema y su solución. Después completá el cuadro.

Pendientes	Ordenadas al origen	Sistema
Igualas	Distintas	
	Igualas	Compatible indeterminado
Distintas	Distintas	

37. Sin hacer cuentas, clasificá estos sistemas en compatibles determinados, compatibles indeterminados o incompatibles. Explicá tus respuestas.

a. $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = x - 3 \end{cases}$

d. $\begin{cases} y = \frac{4}{8}x + 5 \\ y = \frac{32}{64}x - 8 \end{cases}$

b. $\begin{cases} y = -2x - 5 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$

e. $\begin{cases} y = \frac{8}{4}x - \frac{5}{2} \\ y = 2x - \frac{15}{6} \end{cases}$

c. $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x \\ y = \frac{1}{4}x + 5 \end{cases}$

f. $\begin{cases} y = 3x + 5 \\ y = -\frac{9}{3}x - 2 \end{cases}$



Fijate bien

Para saber cómo es la solución de un sistema antes de resolverlo, se pueden analizar las pendientes y las ordenadas al origen de las rectas que lo forman, como se hizo en la actividad 36.

38. Hallá en forma analítica la solución de los sistemas compatibles determinados de la actividad anterior.

- 39.**  **Hacé de profe** Indicá quién encontró la solución del sistema $\begin{cases} x = y + 2 \\ y = 4x + 7 \end{cases}$. Señalá por qué las otras dos no son soluciones.

A mí me dio que x vale -1 , y que y vale 3 .



Juli

Algo no está bien, porque los tres resolvimos el mismo sistema y obtuvimos tres soluciones distintas. Para mí la solución es $x = 3$ e $y = 1$.



Pedro

En cambio, a mí me dio que x vale -3 , y que y vale -5 .



Lía

- 40.** Malena empezó a resolver este sistema con un método nuevo. Mirá cómo lo hizo y hallá el valor de y .

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2y - x = 3 \end{cases} \rightarrow \text{Como } y = 2x - 3, \text{ puedo reemplazar esta expresión en la segunda ecuación.}$$

$$2y - x = 3 \Rightarrow 2 \cdot (2x - 3) - x = 3 \rightarrow \text{Ahora distribuyo el } 2 \text{ en el paréntesis...}$$

$$\Rightarrow 4x - 6 - x = 3 \rightarrow \dots \text{y sólo me queda resolver la ecuación.}$$

$$\Rightarrow 3x - 6 = 3$$

$$\Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

¡Fantástico! Ya sé que x vale 3 . Reemplazo ese valor en cualquiera de las ecuaciones que forman el sistema y averiguo el valor de y .



Fijate bien

En el método de **sustitución** se despeja una variable de una ecuación y se sustituye lo obtenido en la otra ecuación.

- 41.** Ahora, Malena escribió un sistema compatible indeterminado. ¡Mirá lo que le pasó cuando intentó resolverlo!

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 2y = 4x + 2 \end{cases} \rightarrow \text{Como } y = 2x + 1, \text{ puedo reemplazarla en la segunda ecuación.}$$

$$2y = 4x + 2 \Rightarrow 2 \cdot (2x + 1) = 4x + 2 \rightarrow \text{Y puedo distribuir...}$$

$$\Rightarrow 4x + 2 = 4x + 2$$

$$\Rightarrow \boxed{0 = 0} \rightarrow \text{¿Eh?}$$

¿Y esto qué significa?

a. ¿En qué caso el sistema es compatible indeterminado? ¿Cómo son sus soluciones?

b. ¿Qué puede significar la última igualdad a la que llegó?

- 42.**  **Estrategia: analizar y comparar** Malena escribió ahora un sistema incompatible. Intentá resolverlo. ¿A qué llegás en este caso? ¿Por qué pensás que ocurre?

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$$

43. Resolvé estos sistemas en forma analítica y clasificalos según su solución. Luego verificalos gráficamente.

a.
$$\begin{cases} y = 7x - 2 \\ x = 6 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} y = 0,8x - 5 \\ 3x = y - 6 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} -5y - 8x - 4 = 0 \\ 24x = -15y - 12 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} 4y + 2x + 16 = 0 \\ x = -\frac{14}{7}y + 4 \end{cases}$$



Fijate bien

Para representar conviene despejar "y" para que la ecuación de la recta quede de la forma "y = mx + b".

- 44.** Lucas vuelve de su viaje de egresados, y su hermana y su perra Helena fueron a recibirlo. Cuando Lucas baja del micro, ve a Helena, y los dos corren a abrazarse. Las ecuaciones que dan las posiciones de Lucas y de Helena son:

$$P_L = 100 m - 5 m/s \cdot t \quad P_H = 8 m/s \cdot t$$

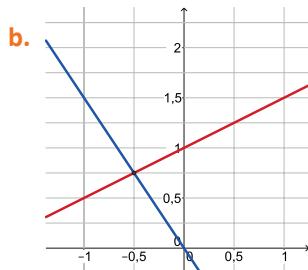
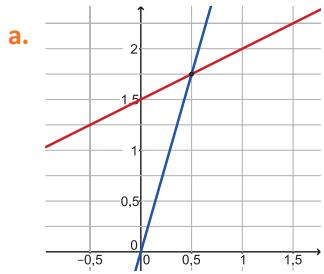
(t representa el tiempo en segundos).

- a. ¿Cuánto tiempo corren hasta que se abrazan? ¿Qué distancia recorre cada uno?

- b. Verificá tus resultados gráficamente.

Tengo tarea

- 45.** Escribí los sistemas de ecuaciones representados y verificalos en forma analítica.



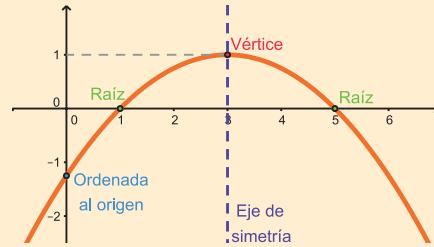
Función cuadrática



Elementos de la parábola

- La curva representada es una **parábola** y representa a una **función cuadrática**, en la que la **x** aparece al cuadrado.

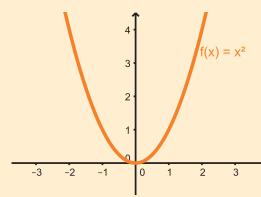
Las paráboles son simétricas respecto de un **eje de simetría** sobre el que tienen un **vértice** que indica el máximo o el mínimo de la función. Por otra parte, la función cuadrática puede tener hasta dos raíces distintas, y también una ordenada al origen. Esto se ve en el gráfico a partir de los puntos en los que la parábola corta a los ejes cartesianos.



La función cuadrática más elemental

La función cuadrática más simple es $f(x) = x^2$. En este caso, el eje de simetría coincide con el eje **y**, y los puntos de intersección con los ejes coinciden en el $(0; 0)$, al igual que el vértice.

El gráfico de la función cambia a medida que la fórmula va incorporando parámetros (números), aunque siempre será una parábola.



46. Representá cada grupo de funciones en los mismos ejes y compará sus gráficos con el de $f(x) = x^2$. ¿Cómo se modifican en cada caso? También podés hacerlas "a mano", a partir de una tabla de valores.

a. $g(x) = 2x^2$; $h(x) = -4x^2$; $k(x) = 0,5x^2$

c. $g(x) = (x - 2)^2$; $h(x) = (x + 1)^2$; $k(x) = (x - 0,8)^2$

b. $g(x) = x^2 + 2$; $h(x) = x^2 - 1$; $k(x) = x^2 + 5$

d. $g(x) = (x - 2)^2 - 1$; $h(x) = (x + 3)^2 - 4$; $k(x) = -(x + 3)^2 - 4$

47. **Estrategia: analizar y comparar** Mirá cada gráfico de la actividad anterior y compáralo con su fórmula. Despúes respondé.

a. En las funciones de la forma $f(x) = a x^2$, ¿cómo varía el gráfico según los valores que toma **a**?

b. ¿Y en las funciones de la forma $f(x) = x^2 + k$, al cambiar los valores de **k**?

c. ¿Qué pasa con las funciones de la forma $f(x) = (x - h)^2$, al cambiar los valores de **h**?

d. En las funciones de la forma $f(x) = a (x - h)^2 + k$, ¿qué relación hay entre **h**, **k** y los elementos de la parábola?



Análisis de la función cuadrática dada en forma canónica

- Si la fórmula de la función cuadrática está escrita de la forma: $f(x) = a(x - h)^2 + k$, con $a \neq 0$, se dice que está expresada en forma **canónica**.

✓ El coeficiente principal **a** determina la **concavidad**: si **a** es positivo, las ramas van “para arriba”, y si es negativo, “para abajo”.

✓ Para hallar las **raíces**, se iguala la función a cero y se halla el valor de **x**. Por ejemplo, para hallar las raíces de la función $f(x) = 2(x - 1)^2 - 18$ se puede resolver la ecuación:

$$2(x - 1)^2 - 18 = 0$$

$$2(x - 1)^2 = 18$$

$$(x - 1)^2 = 18 : 2, \text{ es decir, } (x - 1)^2 = 9$$

Entonces $x - 1 = 3$ o bien $x - 1 = -3$

$$x = 3 + 1 \text{ o bien } x = -3 + 1, \text{ o sea, } x = 4 \text{ o bien } x = -2.$$

✓ El **eje de simetría** se encuentra en la mitad entre las dos raíces, por lo que puede averiguararse haciendo: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$. En este caso, sería: $x = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

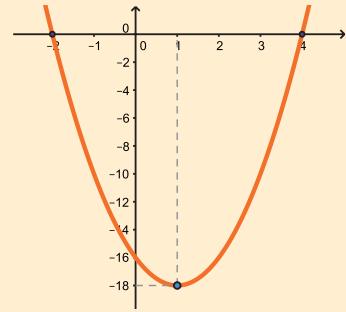
Este valor puede “verse” en la forma canónica, pues coincide con **h**: la ecuación del eje de simetría es $x = h$.

✓ Como el **vértice** es un punto, tiene una coordenada **x** y otra **y**. Además, está sobre el eje de simetría, entonces la coordenada **x** del vértice es **h**: $x_v = h$. Para hallar la coordenada **y** se reemplaza x_v en la función y se resuelve: $y_v = f(x_v)$.

En este caso, $f(1) = 2(1 - 1)^2 - 18 = 0 - 18 = -18$.

En la forma canónica, el valor obtenido es **k**, por lo que el vértice es el punto **(h; k)**.

✓ La **ordenada al origen** se calcula reemplazando el valor de **x** por 0. En el ejemplo, $f(0) = 2(0 - 1)^2 - 18 = 2 \cdot 1 - 18 = -16$.



La expresión factorizada de la función cuadrática

- Si se conocen las raíces de una función cuadrática, se puede escribir de forma **factorizada**, es decir, como un producto: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, donde **a** es el coeficiente principal, x_1 y x_2 son las raíces.

La expresión factorizada de la función del ejemplo anterior es: $f(x) = 2(x - 4)(x - (-2))$, es decir, $f(x) = 2(x - 4)(x + 2)$.

- Si solo se conoce la expresión factorizada de una función cuadrática, lo primero que “se ve” en la fórmula son sus raíces. ¡Cuidado! Porque “se ven” con el signo cambiado. Ya conocidas las raíces, el análisis sigue igual que si estuviese en forma canónica: **eje de simetría**: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; **vértice**: x_v es el valor obtenido para el eje; $y_v = f(x_v)$; la **ordenada al origen** se calcula reemplazando el valor de **x** por 0.

48. Indicá el eje de simetría, el vértice y la ordenada al origen de cada una de estas funciones. Hallá las raíces, pero ¡cuidado!, porque una de ellas no tiene.

Representalas. Despues escribí la expresión factorizada de la que tiene raíces.

a. $f(x) = -0,25(x - 3)^2 + 1$

b. $f(x) = (x + 1)^2 + 4$



Si una función cuadrática no tiene raíces, puede graficarse a partir del vértice y la ordenada al origen, usando el eje de simetría para marcar un punto simétrico a la ordenada al origen.



La función cuadrática en forma polinómica

- Las funciones cuadráticas también pueden expresarse en forma **polinómica**. En ese caso, su fórmula tiene la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde **a** es el coeficiente principal y, como antes, no puede ser cero; **b** y **c** son números reales.

✓ Como en los otros casos, para encontrar las **raíces**, se iguala la función a cero y se halla el valor de **x**. En este caso,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Por ejemplo, en la función $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$, vale que: **a** = 2; **b** = -4; y **c** = -16. Reemplazando en la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-16)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 128}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{144}}{4} = \frac{4 \pm 12}{4} \rightarrow \text{De ahí pueden obtenerse dos valores:}$$

$$x_1 = \frac{4+12}{4} = \frac{16}{4} = 4 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{4-12}{4} = \frac{-8}{4} = -2. \text{ Es decir, las raíces de esta función son: } x = 4 \text{ y } x = -2.$$

Conocidas las raíces, el análisis sigue igual que en cualquiera de las otras formas. También puede calcularse el eje de simetría con la fórmula: $x = \frac{-b}{2a}$.

En particular, en esta forma se observa que la **ordenada al origen** coincide con el valor de **c**: $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$. Entonces, $f(0) = c$. En el ejemplo, la ordenada al origen es -16.

- Al tener las mismas raíces y el mismo coeficiente principal que las funciones del ejemplo de la página anterior, se deduce que también tendrá el mismo eje de simetría, el mismo vértice y la misma ordenada al origen. En consecuencia, esta función es la misma que aquellas, expresada de otra forma:

Forma canónica: $f(x) = 2(x - 1)^2 - 18$

Forma factorizada: $f(x) = 2(x - 4)(x + 2)$

Forma polinómica: $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$

- A veces es conveniente analizar si la función tiene raíces, antes de hacer toda la cuenta. En la forma polinómica puede hacerse calculando el **discriminante**, que es el valor que aparece en la fórmula, dentro de la raíz: $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$. Si el discriminante es positivo, la función tiene dos raíces reales distintas, como en el ejemplo; si ese valor es 0, la función tiene solo una raíz (y se dice que la raíz es doble); y si el discriminante es negativo, la función no tiene raíces reales.

49. Sin hacer cuentas, mencioná todo lo que puedas del gráfico de cada una de estas funciones cuadráticas.

a. $f(x) = -5(x - 2)^2 - 3$

b. $f(x) = x^2 - 2x + 1$

c. $f(x) = -(x + 3)(x - 2)$

50. Hallá las raíces, la ordenada al origen, el eje de simetría y el vértice de estas funciones. Representalas. Despues escribí su fórmula en forma factorizada y en forma canónica.

a. $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$

b. $f(x) = -x^2 + 6x - 8$

51. Encontrá analíticamente la solución de estos sistemas de ecuaciones y clasificalos.

a. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y = -1 \\ 2x + 4 = -6y \end{cases}$

d. $\begin{cases} y - 3 = 4x \\ 6 - 8x + 2y = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x = 2 - y \\ 8 = 4x + 6y \end{cases}$

e. $\begin{cases} 3x + 5y = 25 \\ -2x + \frac{5}{2}y = -5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 5x + 2 = 3y \end{cases}$

f. $\begin{cases} \frac{1}{3}x = \frac{8}{3} - 2y \\ -\frac{9}{4}x + \frac{5}{2}y = 10 \end{cases}$

52. Escribí la ecuación de una recta de pendiente $\frac{1}{2}$ que pase por el punto de intersección de las rectas $y = x + 5$ e $y = -3x + 3$.

53. Encontrá en forma analítica la intersección de la recta $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, y la que pasa por los puntos $(0; 4)$ y $(4; 1)$. Después hacé un gráfico para comprobar tus resultados.

54. Encontrá los valores de **c** y **d** para que el sistema sea...

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x + 4 \\ y = cx + d \end{cases}$$

- a. ... compatible determinado.
b. ... compatible indeterminado.
c. ... incompatible.

55. Mati y Santi analizan las soluciones de un sistema de ecuaciones. ¿Quién tiene razón? ¿Por qué?

Yo pienso que para que sea compatible determinado, basta con saber que las pendientes de las rectas son distintas.

Mati

¿Estás seguro? Porque creo que alcanza solo con ver que tengan distinta ordenada al origen.

Santi

56. Analizá estas funciones cuadráticas indicando la ordenada al origen, si tienen raíces, cuáles son, el eje de simetría y el vértice. Después representalas.

a. $f(x) = x^2 + 2x$

d. $f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 1$

b. $f(x) = -x^2 + \frac{1}{9}$

e. $f(x) = -\frac{1}{5}(x+3)(x-5)$

c. $f(x) = -x^2 + 4x - 5$

f. $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$

57. Estrategia: realizar un gráfico de análisis
¿Verdad o mentira? ¿Por qué?

- a. Una función cuadrática con $c = 0$ tiene una raíz en $x = 0$.
- b. Una función cuadrática con vértice en el primer o segundo cuadrante y coeficiente principal positivo no tiene raíces reales.
- c. Una función cuadrática con el vértice en el eje **x** no tiene raíces reales.

58. Una parábola tiene una raíz en $x = -1$ y su eje de simetría en $x = 4$.

- a. ¿Cuál es la otra raíz?
b. ¿Puede haber más de una parábola con esas raíces y ese eje de simetría? ¿Cómo te das cuenta?
c. Si el coeficiente principal es 2, ¿cuál es la fórmula de la parábola? ¿Y el vértice?

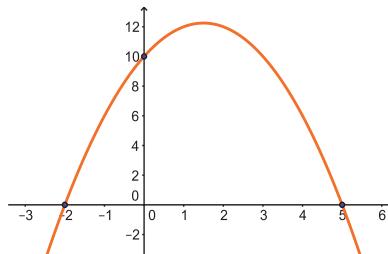
59. Señalá si cada afirmación referida a la función $f(x) = 2(x+5)(x-3)$ es verdadera o falsa. Si es falsa, indicá qué sería lo correcto.

- a. La raíces de la función son $x = 5$ y $x = -3$.
b. La función tiene un máximo en $x = -1$ y su valor es $y = -32$.
c. La ordenada al origen es -15 .

60. Identificá cuál es la fórmula de la función representada. Luego hallá los elementos de la parábola que no se señalan en el gráfico.

$f_1(x) = -(x+5)(x-2)$ $f_3(x) = 2(x+2)(x-5)$

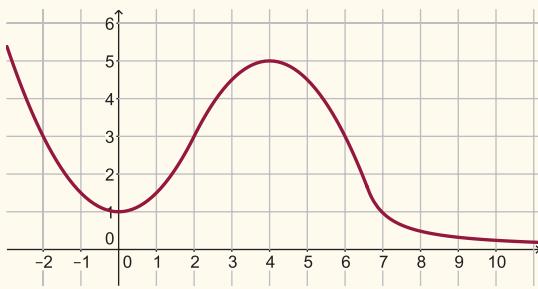
$f_2(x) = -2(x+2)(x-5)$ $f_4(x) = -(x+2)(x-5)$





Repaso todo

- 61.** Mirá el gráfico de esta función.



- Indicá los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento.
 - ¿Tiene raíces? ¿Y ordenada al origen? Si las tiene, mencionalas.
 - Señalá los máximos y los mínimos, indicando si son relativos o absolutos y para qué valores de x se producen.
- 62.** Encontrá la raíz y la ordenada al origen de cada una de estas funciones lineales, y señalá si son crecientes o decrecientes. Representalas.

a. $f(x) = -\frac{2}{5}x + 6$

c. $f(x) = -\frac{5}{2}x + 4$

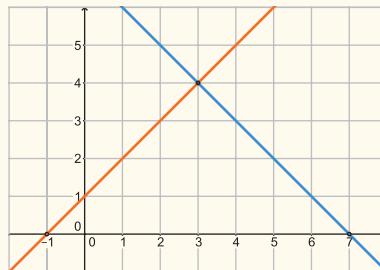
b. $f(x) = \frac{3}{4}x - 5$

d. $f(x) = \frac{7}{3}x - 1$

- 63.** Pilar sabe que el gráfico de una función lineal pasa por los puntos $(3; 2)$ y $(8; 5)$, y dice que es decreciente. ¿Tiene razón? ¿Cómo te diste cuenta?
- 64.** Marcelo, el arquitecto, está haciendo un presupuesto para pintar una casa. Por el momento solo sabe que la altura de las habitaciones es de 2,50 m, pero no conoce cuánto miden, de largo, las paredes que tiene que pintar. Además, sabe que el costo de la pintura por metro cuadrado a cubrir es de \$ 15 por mano.

- Escribí la fórmula de una función que permita obtener el costo de la pintura que se necesita para dar dos manos a cada pared, en función del largo de las paredes.
- Si su cliente cuenta con \$ 1.500 para comprar la pintura y el largo de las paredes que tienen que pintarse suman 24 m, ¿le alcanza el presupuesto? ¿Le sobra o le falta dinero? ¿Cuánto?

- 65.** Escribí las ecuaciones de las rectas representadas. ¿Son perpendiculares?



- 66.** ¿Cuál es la ecuación de la recta que es paralela a $y = 3x + 4$ y que pasa por el punto $(2; 1)$? ¿Es creciente o decreciente?
- 67.** ¿Cuál es la ecuación de la recta que es perpendicular a las de la actividad anterior, que también pasa por el punto $(2; 1)$? ¿Esta nueva recta es creciente o decreciente?
- 68.** Dani dibujó dos rectas perpendiculares que tienen ordenada al origen 2. La raíz de una de ellas es 5. ¿Cuál es la raíz de la otra?
- 69.** Matías quiere dibujar dos rectas perpendiculares cuyas raíces sean $x = -4$ y $x = 3$, respectivamente. Encontrá dos rectas que cumplan con esa condición. ¿Son las únicas rectas posibles?
- 70.** Lore dibujó dos rectas perpendiculares que tienen en común el punto $(5; 3)$. ¿Podés escribir la ecuación de las rectas que ella dibujó solo con ese dato? Explicá tu respuesta.
- 71.** Clasificá los sistemas de ecuaciones según sus soluciones. Además, verificá si alguno está formado por rectas perpendiculares.

a. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 5y - 11 - 3x = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} y = -0,75x + 2,5 \\ 3x + 4y - 28 = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 3y = 15 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$

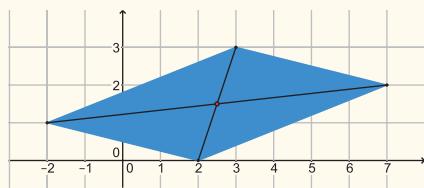
- 72.** Las rectas que forman el sistema

$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ dy - 12 + cx = 0 \end{cases}$$

son perpendiculares y se cortan en el punto $(4; -4)$. Encontrá los valores de **c** y **d**.



- 73.** Si se recorta un paralelogramo, por ejemplo, de madera, y su masa es homogénea, entonces su centro de masa está en la intersección de sus diagonales. Indicá las coordenadas del centro de masa del paralelogramo representado.



- 74.** **Estrategia: realizar un gráfico de análisis** Tres de los vértices de un cuadrado son los puntos: (2; 5), (-1; 2) y (5; 2).

- ¿Cuáles son las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados del cuadrado?
- ¿Cuál es el otro vértice? Verificalo en forma analítica.

- 75.** Lucas armó un triángulo rectángulo de forma que uno de los lados está contenido en el eje **x**, y otro, en la recta que pasa por los puntos (-1; 1) y (3; 5). El tercer lado contiene el punto (5; 3).

- Encontrá las rectas que pueden contener el lado restante.
- Encontrá los vértices de cada uno de los triángulos que pueden formarse.
- Hacé un gráfico y coloreá la región triangular en cada caso.

- 76.** Milena tiene que armar un triángulo con un lado contenido en la recta $y = -0,25x + 4$, otro lado, en la recta $-3x + 5y = 3$, y con dos de vértices en los puntos (-1; 0) y (0; 4).

- Escribí la ecuación de la recta que contiene el tercer lado.
- Encontrá el vértice que falta en forma analítica.
- Realizá el gráfico de la situación y coloreá el triángulo que se formó.
- El triángulo que encontraste ¿es rectángulo? ¿Cómo te das cuenta sin medir los ángulos?

- 77.** Volvé a la actividad anterior.

- Escribí la ecuación de la recta que divide al triángulo en dos triángulos rectángulos.
- Ambos triángulos tienen un vértice en común en la recta $-3x + 5y = 3$. ¿Cuáles son sus coordenadas?

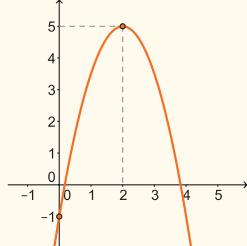
- 78.** Para cada una de estas funciones cuadráticas encontrá las raíces (si tienen), la ordenada al origen, el eje de simetría, las coordenadas del vértice y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

- $f(x) = 2x^2 + 5x - 10$
- $g(x) = -3x^2 - 5$
- $h(x) = -5x^2 - 8x + 4$
- $i(x) = x(x - 5)$

- 79.** **Estrategia: analizar y comparar** Identificá si estas fórmulas corresponden a algunas de las parábolas representadas en la actividad anterior y, en tal caso, señalá de qué forma está escrita cada una. Si alguna no corresponde a ninguna de las anteriores, representala y hallá sus elementos.

- $j(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$
- $k(x) = -3(x - 5)(x + 2)$
- $l(x) = x^2 - 5x$
- $m(x) = -5\left(x - \frac{2}{5}\right)(x + 2)$

- 80.** Escribí la ecuación de esta parábola. Fijate cuánto debe valer **a** para que la ordenada al origen tome el valor que se observa en el gráfico.



- 81.** **Estrategia: realizar un gráfico de análisis** Escribí la ecuación de la parábola que tiene una raíz en $x = 2$ y vértice en el punto (6; 16). ¿Cuál es la otra raíz? ¿Cómo te das cuenta? ¿Y cuánto vale **a**?

- 82.** Si se tira una pelota verticalmente hacia arriba, su altura, en función del tiempo, está dada por la fórmula $h(t) = 10m/s \cdot t - 5m/s^2 \cdot t^2$.

- ¿Cuál fue la máxima altura alcanzada por la pelota y cuánto tiempo tardó en alcanzarla, si **t** está expresado en segundos?
- ¿Cuánto tiempo después de ser lanzada volvió al punto de partida?

Saquen una hoja



Marcá la opción correcta.

1. Si en el gráfico de una función se observa que a medida que aumentan los valores de **x**, también aumentan los valores de **y**, entonces la función es:

- Constante.
- Creciente.
- Decreciente.
- A veces creciente y a veces decreciente.

2. Una función lineal de pendiente no nula...

- ... no tiene raíces.
- ... tiene una única raíz.
- ... tiene un máximo.
- ... tiene un mínimo.

3. La ecuación de la recta que pasa por el punto (4; 3) y tiene por ordenada al origen 7 es:

- $y = x + 7$
- $y = -x + 7$
- $y = -7x + 7$
- $y = -2x + 14$

4. La ecuación de la recta que es perpendicular a $y = \frac{2}{5}x - 2$ y que pasa por el punto (4; -7) es:

- $y = -\frac{2}{5}x + 3$
- $y = -\frac{2}{5}x - 3$
- $y = -\frac{5}{2}x + 3$
- $y = -\frac{5}{2}x - 3$

5. El sistema

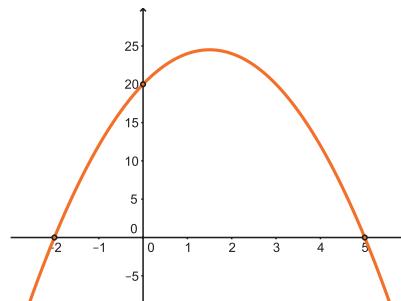
$$\begin{cases} y = 3x + 5 \\ y - 8x + 5 = 0 \end{cases}$$

- ... tiene una sola solución para $x = -2; y = 11$.
- ... tiene una sola solución para $x = 2; y = -11$.
- ... no tiene solución.
- ... tiene una sola solución para $x = 2; y = 11$.

6. Las rectas que tienen la misma pendiente...

- ... siempre forman un sistema compatible determinado.
- ... siempre forman un sistema incompatible.
- ... siempre forman un sistema compatible indeterminado.
- ... a veces forman un sistema compatible indeterminado y otras, uno incompatible.

7. La fórmula de la función cuadrática representada es:



- $f(x) = -2x^2 + 6x + 20$
- $f(x) = -2x^2 - 6x + 20$
- $f(x) = -2x^2 + 6x - 20$
- $f(x) = -2x^2 - 6x - 20$

Esto ya lo sabía...

1. Uní cada polígono con su nombre (algunos nombres están de más).



Octógono



Hexágono



Pentágono

Cuadrado

Heptágono

2. Volvé a la actividad anterior.

a. Algunos nombres corresponden a polígonos que no están representados. ¿Cuántos lados tiene cada uno de ellos?

b. ¿Cuántos lados tiene un decágono?

c. ¿Qué nombre recibe un polígono de veinte lados?

d. ¿Qué nombre reciben los polígonos que tienen todos los lados y todos los ángulos de la misma medida?



Durante mucho tiempo, todo lo que se conocía de geometría estuvo desperdigado por distintos lugares, y nadie sabía bien qué era lo que en realidad se sabía. Hasta que llegó Euclides (330-275 a.C.) quien, partiendo de definiciones, postulados y axiomas, estableció por rigurosa deducción lógica el armonioso edificio de la geometría griega.

Juzgada como uno de los más altos productos de la razón humana, la geometría euclíadiana mantuvo su hegemonía durante más de veinte siglos, hasta la aparición, ya en el siglo XIX, de las geometrías no euclidianas.

Actualmente, ambas geometrías se usan para diversos propósitos. Albert Einstein, por ejemplo, utilizó las no euclidianas en su teoría de la relatividad. Sin embargo, no solo se emplean en las ciencias, sino también en la arquitectura y en la realización de obras de arte, entre otras aplicaciones.

En la foto podés ver un producto de la geometría euclíadiana: la pirámide de vidrio, frente al Louvre, el museo más conocido de París.

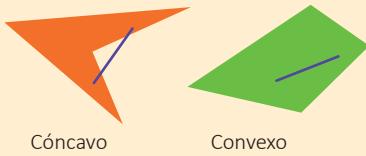
- Averiguá si la geometría que se estudia en la escuela es euclíadiana o no euclíadiana.

Cuadriláteros



Polígonos de cuatro lados

Los **cuadriláteros** son los polígonos que tienen cuatro lados. Hay convexos y cóncavos, según contengan o no todos los puntos de un segmento con extremos en el polígono.

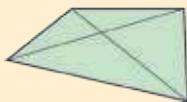


Cóncavo

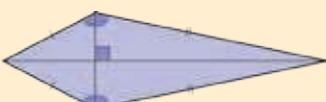
Convexo

Se clasificarán los cuadriláteros convexos. Estos reciben distintos nombres según la medida y la disposición de sus lados. Se considera que los lados y los ángulos señalados de la misma forma son congruentes.

- **Trapezoides:** son los que no tienen lados paralelos. Los trapezoides que tienen dos pares de lados consecutivos congruentes (de la misma medida) se denominan **rombooides**.



Trapezoide (común)



Romboide

Las diagonales son perpendiculares y solo una corta la otra por la mitad .

- **Trapecios:** tienen un solo par de lados paralelos, considerados **bases** del cuadrilátero.



Trapecio (común)

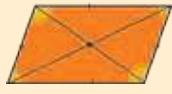


Trapecio rectángulo
Tiene dos ángulos rectos.



Trapecio isósceles
Los ángulos de cada base son congruentes.
Las diagonales son congruentes.

- **Paralelogramos:** tienen dos pares de lados paralelos y congruentes. En todos los paralelogramos, los ángulos opuestos son congruentes y las diagonales se cortan en el punto medio.



Paralelogramo (común)



Rectángulo
Los ángulos son rectos. Las diagonales son congruentes.



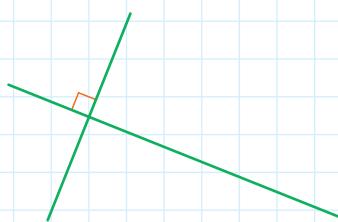
Rombo
Los lados son congruentes.
Las diagonales son perpendiculares.



Cuadrado
Es un rectángulo y un rombo, al mismo tiempo.

3. Construí el cuadrilátero según lo que se indica en cada caso, tomá las medidas que creas necesarias y señala de qué tipo es cada uno.

- a. Estos segmentos son sus diagonales.



- b. Tiene dos pares de lados paralelos.



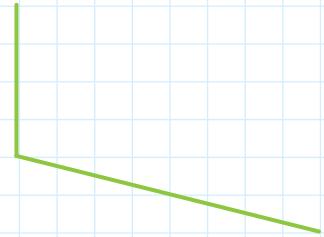
4. Dibujá dos cuadriláteros con dos lados de 4 cm y otros dos de 2 cm. ¿Qué tipo de cuadrilátero es cada uno de los que construiste? ¿Podrías haber realizado alguno de otro tipo con esas características? Explicá tu respuesta.

5. En cada caso se trazaron dos lados de una figura. Completala para que se forme el cuadrilátero que se pide.

a. Un romboide.



b. Un trapecio isósceles.



Fijate bien

Recordá que los lados paralelos del trapecio se consideran sus bases.

6. **Estrategia: analizo y comparo** Mirá los cuadriláteros que dibujaste en la actividad anterior y compáralos con los que realizaron tus compañeros. Después señala quién o quiénes están en lo cierto y explicá por qué.

Solo pude dibujar un romboide con esos lados.



Y yo solo un trapecio isósceles.



En cambio, yo hice dos trapecios isósceles diferentes, cambiando el lado que considero como base.



7. Dibujá un cuadrilátero con dos ángulos de 50° , que además cumpla lo que se pide en cada caso.

a. Los ángulos de 50° no son opuestos y los otros dos ángulos son distintos entre sí.

c. Los ángulos de 50° no son opuestos y los otros dos ángulos son congruentes.

b. Los ángulos de 50° son opuestos y los otros dos ángulos son distintos entre sí.

d. Los ángulos de 50° son opuestos y los otros dos ángulos son congruentes.

8. Mili dibujó una circunferencia y trazó dos diámetros. Piensa usarlos para construir un cuadrilátero con esos diámetros como diagonales. ¿Qué cuadriláteros podría dibujar? Si es posible, construí dos distintos.



Tené en cuenta las características de las diagonales de los cuadriláteros.

9. Raúl quiso hacer un paralelogramo común usando los diámetros de una circunferencia, como hizo Mili, pero por más que lo intentó, no lo logró. ¿Por qué?

10. Dibujá un cuadrilátero que cumpla lo que se pide en cada caso.

a. Tiene solo un lado de 3 cm.

c. Tiene solo tres lados de 3 cm.

b. Tiene solo dos lados de 3 cm.

d. Tiene todos los lados de 3 cm.

11. Mirá los cuadriláteros que dibujaste hasta ahora. Después indicá cuáles de estas afirmaciones son ciertas y cuáles no, y explicá por qué.

a. Las diagonales de los cuadriláteros se cortan en su punto medio.

b. Si un cuadrilátero tiene los cuatro lados iguales, es un cuadrado.

c. Un trapecio isósceles puede tener tres lados iguales.



12. Sin medir con la regla ni con el transportador, dibujá en tu carpeta cada uno de estos cuadriláteros. Podés usar el compás para tomar medidas.

a. Un paralelogramo común.

b. Un rombo.

Propiedades de los polígonos



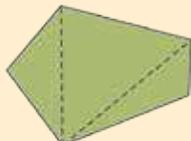
Suma de los ángulos interiores

- Para calcular la **suma de los ángulos interiores** de un polígono, se lo divide en triángulos, trazando todas las diagonales desde un vértice. Luego se considera que los ángulos interiores de cada triángulo suman 180° .



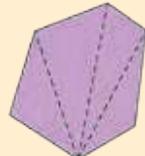
Cuadrilátero

$$2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$$



Pentágono

$$3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$$



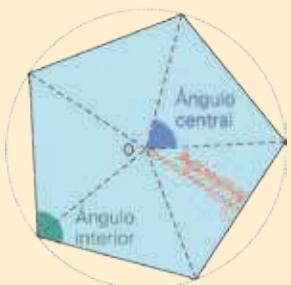
Hexágono

$$4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$$

Siempre hay dos triángulos menos que la cantidad de lados del polígono. Por eso, la suma de los ángulos interiores (SAI) de un polígono de n lados, se calcula haciendo: $SAI = (n - 2) \cdot 180^\circ$.

Polígonos regulares

- Los **polígonos regulares**, o sea, los que tienen todos sus ángulos y todos sus lados congruentes (de la misma medida), siempre pueden inscribirse en una circunferencia. Es decir que siempre puede dibujarse una circunferencia que pasa por todos sus vértices; su centro también se considera centro del polígono.



Como todos los **ángulos interiores** miden lo mismo, la medida de cada uno puede calcularse dividiendo la suma de los ángulos interiores por la cantidad de lados del polígono.

Si la cantidad de lados es n , cada ángulo interior mide: $\text{Ángulo interior} = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$

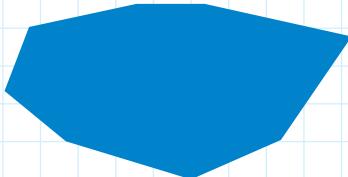
También puede calcularse la medida de un ángulo central haciendo:

$$\text{Ángulo central} = 360^\circ : n$$

Al unir el centro del polígono con cada uno de sus vértices, se determinan n triángulos. La altura de cada uno de ellos se llama **apotema**. Como los triángulos determinados son todos isósceles, la apotema corta el lado en su punto medio. Además, por ser altura del triángulo, también es perpendicular a ese lado.

13. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de estos polígonos?

a.



b.



c.



14. Dibujá un cuadrado, encontrá su centro y trazá la circunferencia que lo inscribe. Después calculá el valor de un ángulo central.

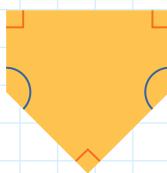


Fijate bien

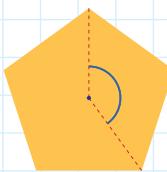
Los triángulos equiláteros y los cuadrados son dos polígonos regulares.

15. Calculá el valor de los ángulos señalados en cada polígono. Considerá los ángulos rectos indicados.

- a. Los dos ángulos son congruentes.



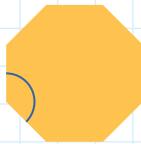
- c. Es regular; el vértice del ángulo es su centro.



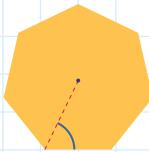
Fíjate bien

Tené en cuenta que el segmento que une el centro con un vértice del polígono regular es radio de la circunferencia que lo inscribe.

- b. Es regular.



- d. Es regular; el punto señalado es su centro.

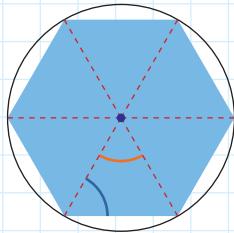


16.

Estrategia: empiezo por el final

Analizá algunas características del hexágono regular.

- a. ¿Cuánto mide cada ángulo central?



- b. Ahora mirá cada uno de los triángulos de la imagen. ¿Cuánto mide cada ángulo de la base? ¿De qué tipo de triángulo se trata?

- c. ¿Qué relación hay entre el lado del hexágono y el radio de la circunferencia?

- d. Con la información anterior, ¿cómo harías para construir un hexágono regular?

- e. Construilo.

Tengo tarea

17. ¿De qué polígono regular se trata en cada caso?

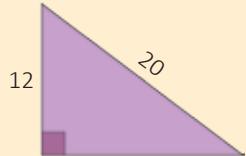
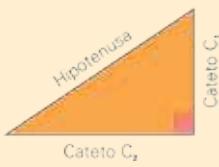
- a. Tiene ángulos centrales de 36° .
- b. Cada ángulo interior mide 150° .
- c. Cada ángulo interior mide lo mismo que cada ángulo central.

Teorema de Pitágoras



Una propiedad del triángulo rectángulo

- En los triángulos rectángulos, los lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos** y el otro, que siempre es el mayor, se denomina **hipotenusa**.
- Como se vio en el Capítulo 3, si se conocen las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo, el otro puede calcularse usando el teorema de Pitágoras: "la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa".



$$H^2 = C_1^2 + C_2^2$$

$$20^2 = 12^2 + C_2^2$$

$$400 = 144 + C_2^2$$

$$C_2^2 = 400 - 144$$

$$C_2^2 = 256$$

$$C_2 = \sqrt{256}$$

$C_2 = 16$ (Se toma solo el valor positivo, ya que la medida siempre es positiva).

Este teorema puede ayudarte a calcular distintas medidas en los polígonos: diagonales, lados, apotemas. Solo es cuestión de "encontrar" el triángulo rectángulo apropiado.

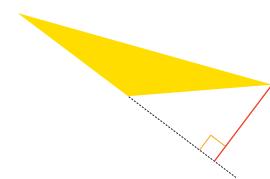
18. Calculá lo que se pide en cada caso. Realizá una figura de análisis.

- a. La diagonal de un cuadrado de 3 cm de lado.
- b. La altura de un triángulo equilátero de 6 cm de lado.
- c. El lado de un rombo cuyas diagonales miden 4 y 6 cm.
- d. La apotema de un hexágono regular de 5 cm de lado.



Fijate bien

Los triángulos tienen tres alturas. Cada una es perpendicular a un lado. En la imagen podés ver una altura de cada triángulo.



19. Construí los polígonos de la actividad anterior y verifica los valores obtenidos. No pierdas el archivo, porque vas usarlo en la actividad 21.

Perímetro y área de polígonos



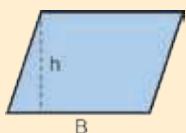
Algunas fórmulas

- Para calcular el **perímetro** de un polígono, se suman las longitudes de todos sus lados, mientras que para calcular cuánto mide su superficie, se calcula su **área**.

Por eso, si el perímetro se mide, por ejemplo, en metros (m), el área se mide en metros cuadrados (m^2).

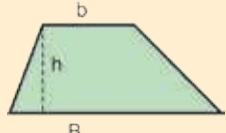
Para calcular el área de los polígonos convexos se pueden usar algunas fórmulas.

Área de paralelogramos



$$\text{Área} = B \cdot h$$

Área de trapecios



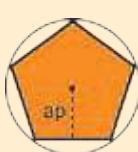
$$\text{Área} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

Área de rombos y romboïdes



$$\text{Área} = \frac{D \cdot d}{2}$$

Área de polígonos regulares



$$\text{Área} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

20. Calculá el perímetro y el área de los polígonos de la actividad 18. ¿En cuáles tenés que usar lo que habías hallado?

- a. Un cuadrado de 3 cm de lado.

- c. Un rombo cuyas diagonales miden 4 y 6 cm.

- b. Un triángulo equilátero de 6 cm de lado.

- d. Un hexágono regular de 5 cm de lado.



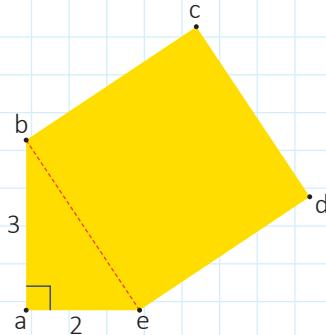
21. Volvé al archivo de la actividad 19. Mirá en la lista algebraica: los valores que figuran al lado del nombre de cada polígono son sus áreas aproximadas. ¿Coinciden con los que calculaste?

22.  **Estrategia: analizo y comparo** El cuadrado es el cuadrilátero que más propiedades tiene. Por eso, su área puede hallarse usando varias de las fórmulas mencionadas. Calculala de diferentes formas, considerando que el lado del cuadrado es de 3 cm, y verificá que todas te den igual. (Ya realizaste uno de estos cálculos en la actividad 20).

- a. A partir del área de un paralelogramo. →
- b. A partir del área de un rombo. →
- c. A partir del área de un polígono regular. →

23.  **Estrategia: descomponer en figuras más simples** Calculá el perímetro y el área de cada polígono. Tal vez te falten algunos datos y tengas que calcularlos previamente.

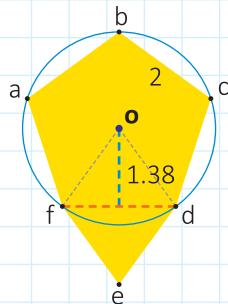
- a. Del polígono abcde; considerá que el bcde es un cuadrado.



 **Fijate bien**

Cuando se forman triángulos rectángulos, podés usar el teorema de Pitágoras.

- b. Del polígono abcdef, considerá que el triángulo def es congruente al dof, y el pentágono abcdf es regular.



 **Fijate bien**

Recordá que la apotema es perpendicular al lado.

- 24.** Construí cada uno de los cuadriláteros que se indican.
- Con dos lados paralelos de 3 cm.
 - Con sus diagonales de 3 cm cada una.
 - Con dos ángulos consecutivos de 65° y el lado comprendido entre ellos de 3 cm.
 - Con dos lados de 3 cm y el ángulo comprendido entre ellos de 100° .
- 25.** **Estrategia: analizo y comparo** Mirá los cuadriláteros que construiste en la actividad anterior. En todos los casos puede dibujarse más de uno con esas características. ¿De qué tipo es cada uno de los que dibujaste y cuál otro te parece que se podría dibujar?
- 26.** Malena dibujó en su carpeta un romboide y por teléfono intenta explicarle a Juan lo que hizo.
- No me acuerdo del nombre, y no anda la cámara del celu para mandarte la foto, pero es fácil porque tiene dos lados de 4 cm y los otros dos de 6 cm.
- Malena**
- ¿En qué otro tipo de cuadrilátero puede pensar Juan?
 - ¿Qué otra cosa le dirías a Juan para que solo pueda dibujar un romboide?
 - ¿Y para que sea igual al de Malena?
- 27.** Diego tiene que dibujar un pentágono regular inscripto en esta circunferencia.
-
- ¿Necesita la medida del lado?
 - ¿Qué puede calcular antes de empezar a dibujarlo?
 - Dibujalo.
- 28.** Dibujá un cuadrado de 5 cm de lado.
- Encontrá el centro de la circunferencia que lo inscribe y dibujala.
 - ¿Cuánto mide su radio? ¿Tuviste que hacer alguna cuenta para saberlo? Si hiciste alguna, indicá cuál, y si no, explicá cómo te diste cuenta.
 - Marcá la apotema. ¿Cuánto mide? ¿Tuviste que hacer alguna cuenta para saberlo? Si hiciste alguna, indicá cuál, y si no, explicá cómo te diste cuenta.
 - ¿Cuánto mide cada ángulo central?
- 29.** Indicá cuáles de estas afirmaciones no son ciertas.
- Ningún polígono regular tiene ángulos interiores agudos.
 - Ningún polígono regular tiene ángulos interiores rectos.
 - Ningún polígono regular tiene ángulos interiores de más de 180° .
- 30.** Calculá la medida del lado que falta en cada triángulo rectángulo (aproximá a los centésimos).
- Los catetos miden 2 cm cada uno.
 - Los catetos son iguales y la hipotenusa mide 10 cm.
 - Un cateto es el doble del otro y la hipotenusa mide 20 cm.
- 31.** Calculá el perímetro y el área de cada uno de estos polígonos regulares.
- El segmento rojo es la apotema.
 - El segmento rojo es la apotema.

Circunferencias y rectas



¿Circunferencia o círculo?

- El **círculo** está formado por todos los puntos del plano que están a una distancia **menor o igual** que **r** respecto de un punto **o**.

La **circunferencia** es el borde del círculo, es decir, todos los puntos que están a una distancia **igual** que **r** respecto de **o**. En ambos casos, el punto **o** es el centro y **r** es el radio.

- Si se unen dos puntos de la circunferencia en línea recta, se determina una **cuerda**, y si se unen sobre la circunferencia, se determinan dos **arcos**. Un **diámetro** es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. Mide el doble del radio y divide la circunferencia en dos semicircunferencias.

- Para calcular el **perímetro del círculo**, o la **longitud de la circunferencia**, y el **área** del círculo se usan estas fórmulas:

$$\text{Long. circunf.} = 2 \cdot \pi \cdot r \quad \text{Área círculo} = \pi \cdot r^2$$

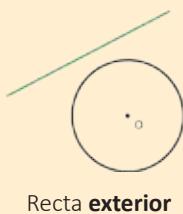
Si se quiere calcular la longitud de un arco o el área de un sector circular (como una porción de pizza), debe tenerse en cuenta el ángulo que abarca, considerando que a la circunferencia completa le corresponde un ángulo de 360° . Por ejemplo, para un ángulo de 30° :

$$\text{Long. arco} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot 30^\circ}{360^\circ} \quad \text{Área sector circular} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 30^\circ}{360^\circ}$$



Posiciones relativas de una recta y una circunferencia

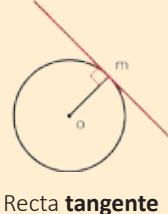
- Una recta puede ser **exterior** a una circunferencia si no la toca, **secante** si la corta en dos puntos, o **tangente** si la toca en un solo punto, llamado punto de tangencia.



Recta **exterior**



Recta **secante**

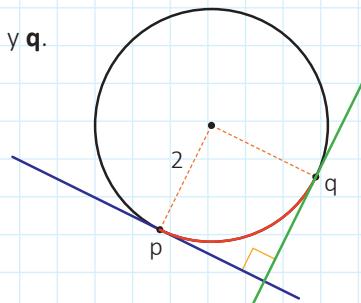


Recta **tangente**

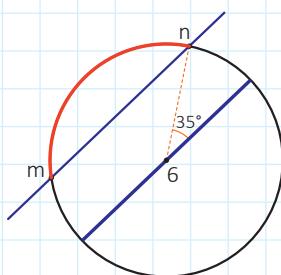
La recta tangente es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.

- 32.** Las rectas representadas son tangentes a la circunferencia en los puntos **p** y **q**.

Mirá los otros datos de la imagen y realizá lo que se pide en cada caso.



- a. Determiná el ángulo que forman los dos radios.
b. Calculá la longitud del arco **pq** coloreado.
- 33.** En la circunferencia se marcaron un radio y un diámetro. Además, se trazó una recta secante en **m** y **n** paralela al diámetro. Calculá la longitud del arco **mn** coloreado. Considerá las medidas indicadas en la figura.



Tengo tarea

- 34.** ¿Quién tiene razón?

¿Por qué?

Rosa: –El centro del círculo es uno de sus puntos y también es punto de la circunferencia.

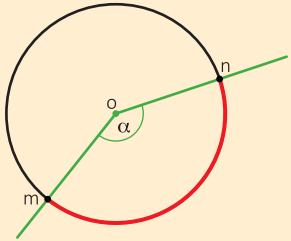
Juan: –No, Rosa; es cierto en el círculo, pero no en la circunferencia.

Ángulos en la circunferencia



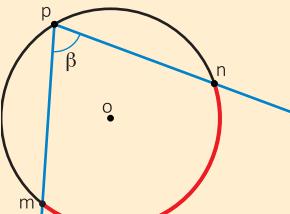
Ángulos centrales, inscritos y semiinscritos

- En la circunferencia, los ángulos reciben diferentes nombres según la ubicación del vértice y la posición de sus lados.



Ángulo central

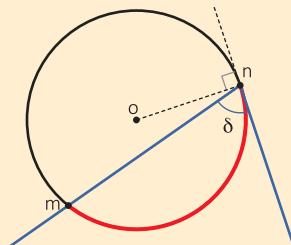
Vértice en el centro.



Ángulo inscrito

Vértice en la circunferencia.

Los lados son secantes.

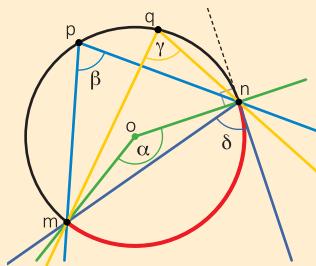


Ángulo semiinscrito

Vértice en la circunferencia.

Un lado es secante y el otro, tangente.

- Todos estos ángulos abarcan un arco de circunferencia. Si dos ángulos **del mismo tipo** abarcan el mismo arco, o arcos de igual longitud, entonces miden lo mismo.



El ángulo α es un ángulo central.

Los ángulos β y γ son ángulos inscritos.

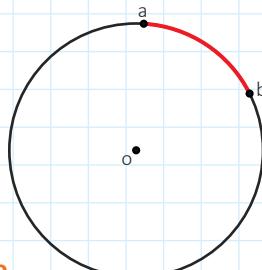
El ángulo δ es un ángulo semiinscrito.

Todos abarcan el arco **mn** coloreado. Por eso, los ángulos β y γ miden lo mismo.

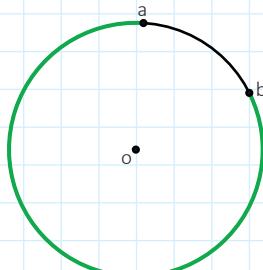
- Una propiedad importante de estos ángulos es que cada ángulo central mide el **doble** que cualquier inscrito o semiinscrito que abarque el mismo arco.

En la imagen, el ángulo α mide el doble que los ángulos β , γ y δ porque todos abarcan el mismo arco.

- 35.** La profe les repartió a los alumnos copias de una circunferencia con los puntos **a** y **b** marcados, y les pidió que pintaran el arco **ab** y midieran el ángulo central correspondiente. Mirá lo que hicieron Pedro y Julián.



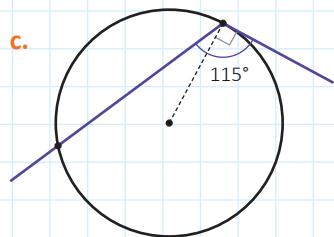
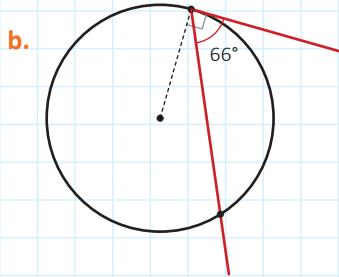
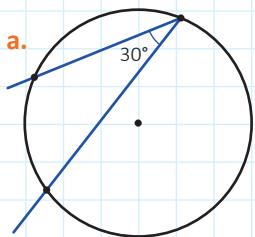
Pedro



Julián

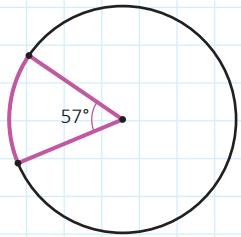
- Marcá el ángulo central en cada caso.
- Si el ángulo central que midió Pedro es de 60° , ¿cuánto mide el de Julián? ¿Cómo te diste cuenta?
- ¿Dónde deberían ubicarse los puntos **a** y **b** para que los arcos y los ángulos de Pedro y Julián midan lo mismo?

- 36.** Señalá si cada uno de estos ángulos es inscripto o semiinscripto y pintá el arco que abarca. Después trazá el ángulo central correspondiente y calculá su medida.

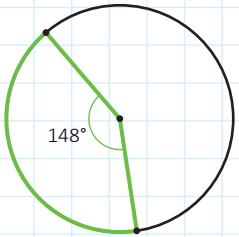


- 37.** Dibujá ángulos que abarquen el mismo arco que el ángulo central representado en cada circunferencia según lo pedido en cada caso. Después calculá la medida de cada uno.

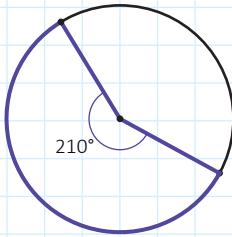
a. Un ángulo inscripto.



b. Un ángulo semiinscripto.



c. Un ángulo inscripto.



- 38.** Dibujá una circunferencia y dos puntos **a** y **b** sobre ella. También podés hacerlo sin la compu.

- Marcá un ángulo inscripto que abarque el arco **ab** y desplazá el vértice de manera que siempre se abarque el mismo arco. Si lo hacés sin la compu, dibujá tres ángulos con estas características.
- Después señalá dos ángulos semiinscriptos que también abarquen el mismo arco **ab**.
- ¿Qué relación hay entre las medidas de los ángulos inscriptos y los semiinscriptos que trazaste? ¿Por qué?



- 39.** Dibujá una circunferencia y trazá uno de sus diámetros; llámalo **a** y **b** a sus extremos. También podés hacerlo sin la compu.

- Pintá un arco **ab** y señalá un ángulo central que lo abarque. ¿Cuánto mide?
- Trazá un ángulo inscripto que también abarque el arco **ab**. ¿Cuánto mide? Podés desplazar el vértice por la semicircunferencia y ver qué ocurre.
- ¿Cuánto mide un ángulo semiinscripto que también abarca el arco **ab**? Dibujalo.

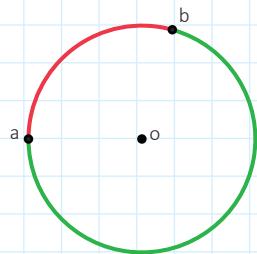
- 40.**  **Estrategia: empiezo por el final** Mirá lo realizado en la actividad anterior.

¿Cómo usarías esa información para dibujar un triángulo rectángulo **apb**, con el ángulo recto en **p**? Dibujalo.

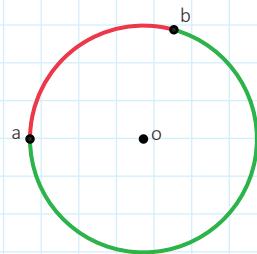


- 41.** En la circunferencia se colorearon los arcos con extremos **a** y **b**.

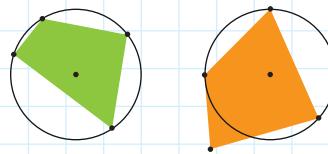
a. Marcá un ángulo inscripto que abarque el arco **ab** rojo y otro que abarque el arco **ab** verde. ¿Qué relación hay entre las medidas de los dos ángulos inscriptos? ¿Cómo te diste cuenta?



b. Marcá un ángulo semiinscripto que abarque el arco **ab** rojo y otro que abarque el arco **ab** verde, ambos con vértice en **a**. ¿Qué relación hay entre las medidas de los dos ángulos semiinscriptos?

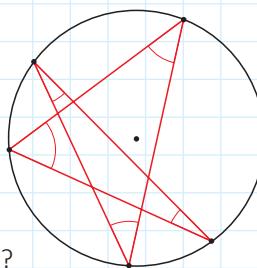


- 42.**  **Estrategia: analizo y comparo** Mirá lo realizado en la actividad anterior, recordá las propiedades de los cuadriláteros y explicá por qué algunos cuadriláteros pueden inscribirse en una circunferencia, mientras que otros no.



- 43.** En la imagen se observa un pentágono estrellado inscripto en una circunferencia.

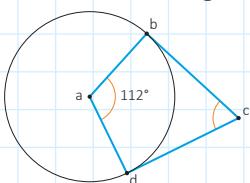
a. Trazá los ángulos centrales que abarcen los mismos arcos que los ángulos marcados.
b. ¿Cuánto suman los ángulos marcados? ¿Cómo te diste cuenta?



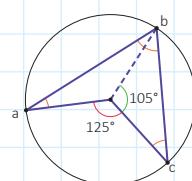
c. ¿Creés que cambiaría la suma si los vértices se desplazasen sobre la circunferencia?

- 44.** Con los datos de la figura, calculá la medida de los ángulos señalados. Explicá cómo lo hiciste.

a. Dos lados son tangentes a la circunferencia.



b. Los vértices **a**, **b** y **c** pertenecen a la circunferencia.



Puntos notables de un triángulo



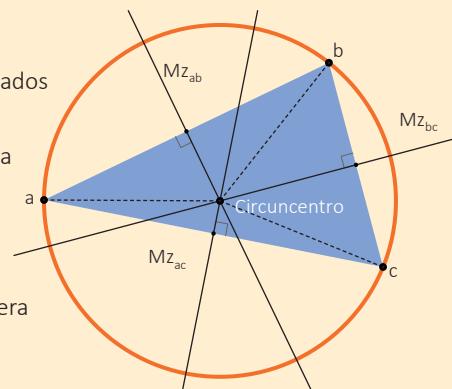
Algunos puntos importantes

- El **circuncentro** es el punto donde se cortan las **mediatrices** de los lados de un triángulo.

Como está en las tres mediatrices, se encuentra a la misma distancia de los tres vértices.

Por eso, es el centro de la circunferencia circunscripta al triángulo, es decir, la que pasa por sus vértices.

El radio de la circunferencia es la distancia entre el centro y cualquiera de sus vértices.

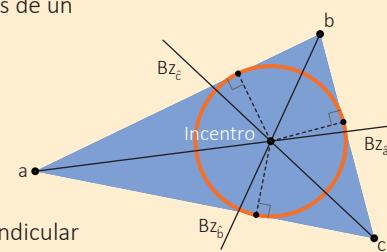


- El **incentro** es el punto donde se cortan las **bisectrices** de los ángulos de un triángulo.

Como está en las tres bisectrices, se encuentra a la misma distancia de los tres lados.

Por eso, es el centro de la circunferencia inscripta en el triángulo y sus lados son tangentes a ella.

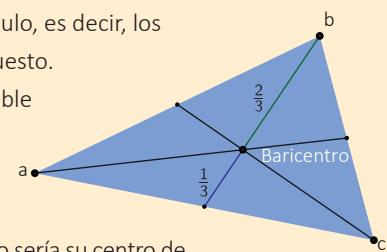
Para hallar el radio de la circunferencia, se traza un segmento perpendicular a cualquiera de sus lados con un extremo en el incentro y el otro extremo en ese lado.



- El **baricentro** es el punto donde se cortan las **medianas** de un triángulo, es decir, los segmentos que unen el punto medio de cada lado con el vértice opuesto.

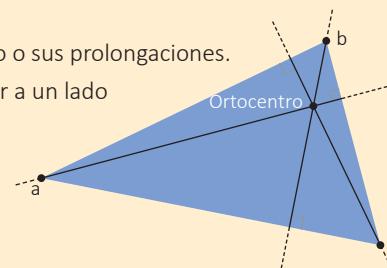
El baricentro divide cada mediana de manera que una parte es el doble de la otra. Así, una parte mide un tercio de la mediana y la otra, dos tercios.

Además, si se pudiese construir un triángulo de manera que el material que lo formase estuviese distribuido en forma homogénea, el baricentro sería su centro de masa, es decir, podría mantenerse en equilibrio si se lo apoyase sobre la cabeza de un alfiler justo en ese punto.



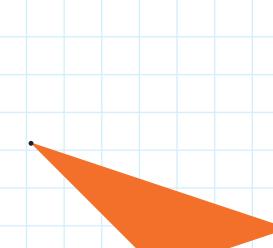
- El **ortocentro** es el punto donde se cortan las **alturas** de un triángulo o sus prolongaciones.

Cada triángulo tiene tres alturas. Además, cada una es perpendicular a un lado y contiene al vértice opuesto.

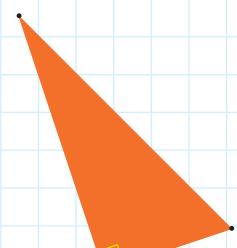


45. Encontrá el circuncentro de cada triángulo y trazá la circunferencia que contiene a los vértices.

a. El triángulo es obtusángulo.



b. El triángulo es rectángulo.

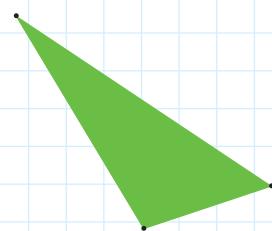


46.  **Estrategia: analizo y comparo** Mirá lo anterior y respondé.

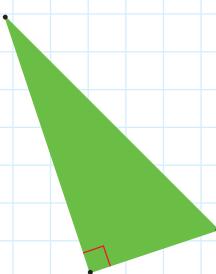
- ¿Cómo se ubica el circuncentro, considerando la clasificación del triángulo según sus ángulos?
- ¿Pensás que pasará lo mismo con el incentro? Si no te animás a arriesgar la respuesta, fijate hallando el incentro de los triángulos anteriores.

47. Encontrá el ortocentro de cada triángulo.

- a. El triángulo es obtusángulo.



- b. El triángulo es rectángulo.



48.  **Estrategia: analizo y comparo** Mirá lo anterior y respondé.

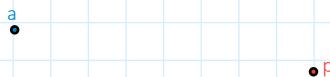
- ¿Cómo se ubica el ortocentro, considerando la clasificación del triángulo según sus ángulos?
- ¿Pensás que pasará lo mismo con el baricentro? Si no se te ocurre la respuesta, fijate hallando el baricentro de los triángulos anteriores.



49. Dibujá un triángulo escaleno, uno isósceles y uno equilátero. Encontrá los cuatro puntos notables de cada uno. Podés hacerlo sin la compu.

- ¿En qué caso los puntos notables coinciden?
- ¿En qué caso los cuatro puntos notables quedan alineados (sobre una misma recta)?
- Tres puntos notables siempre quedan alineados, sin importar el tipo de triángulo que sea. ¿Cuáles son?

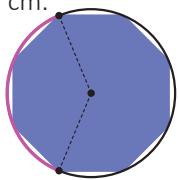
50.  **Estrategia: empiezo por el final** El punto **p** es el baricentro de un triángulo y el punto **a**, uno de sus vértices. Reconstruí un triángulo y explicá cómo lo hiciste. Compará con tus compañeros, ¿todos lo hicieron igual?



51. Calculá la longitud del arco coloreado, considerando que los polígonos son regulares.

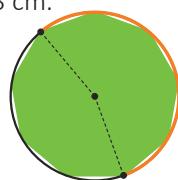
a. El radio mide

5 cm.



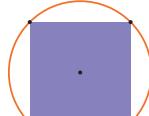
b. El radio mide

3 cm.



52. Mariano inscribió un cuadrado en una circunferencia. Al mirar el dibujo que le quedó, escribió un montón de conclusiones, pero...

¿todas son ciertas? ¿Por qué?



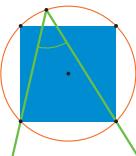
- La recta tangente a la circunferencia que pasa por un vértice es perpendicular a la diagonal del cuadrado.
- Cada lado del cuadrado forma un ángulo de 45° con la recta tangente que pasa por cada uno de sus extremos.
- El arco comprendido entre dos vértices consecutivos del cuadrado es una semicircunferencia.
- Dos rectas tangentes a la circunferencia que pasan por dos vértices del cuadrado son perpendiculares.

53. **Estrategia: analizo y comparo** Releé las conclusiones a las que llegó Mariano.

- Inscribí un cuadrado en una circunferencia, como hizo él, y después trazá las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por los vértices del cuadrado.
- Marcá los puntos donde se cortan esas rectas y remarca el cuadrilátero que se forma.
- ¿Qué tipo de cuadrilátero es el que se formó? ¿Cómo te das cuenta?

54. Mariano sigue con el cuadrado inscripto en la circunferencia.

Ahora dibujó un ángulo y asegura que es muy fácil calcular su medida.

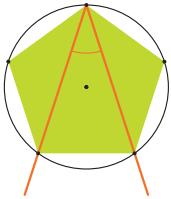


a. ¿Cuánto mide? ¿Cómo lo calculaste?

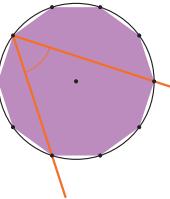
b. ¿Cuánto medirá otro ángulo con vértice en un vértice del cuadrado y que pasa por otros dos consecutivos? ¿Cómo te das cuenta?

55. Calculá el ángulo señalado, considerando que los polígonos son regulares.

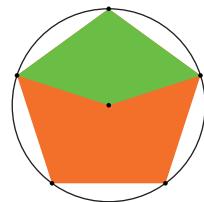
a.



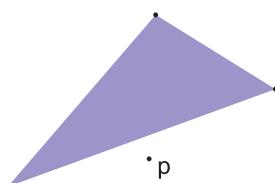
b.



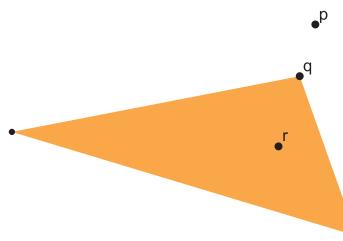
56. ¿Qué cuadrilátero se forma al unir el centro de la circunferencia con tres vértices consecutivos del pentágono regular? ¿Cómo te diste cuenta?



57. ¿Cuál de los puntos notables del triángulo es el punto **p**? Explicá cómo lo sabés.



58. **Hacé de profe** Mariela marcó el ortocentro de este triángulo, pero no le puso el nombre y ahora no recuerda cuál es. Señalá el correcto y explicá cómo lo sabés.



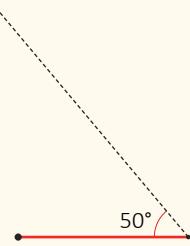
59. Carolina quiere ubicar una luz especial para estimular el crecimiento de sus plantas. Debe que esté a la misma distancia del helecho que de cada uno de los bonsáis. Entonces pensó en formar un triángulo con vértices en las tres plantas y ubicar la luz en uno de sus puntos notables. ¿En cuál? ¿Por qué?



Repaso todo

60. Dibujá un rombo con un ángulo de 50° . ¿Cuánto miden los otros ángulos?

61. Completá un rombo considerando el lado y el ángulo interior representados.



62. **Estrategia: analizo y comparo** Mirá los rombos que construiste en las dos actividades anteriores.
- ¿Son congruentes? Si no lo son, señala en qué se parecen y en qué no.
 - ¿Cuántos rombos diferentes podrías haber dibujado en cada caso?

63. Dibujá un rombo con solo una diagonal de 4 cm.

64. Dibujá un rombo con las dos diagonales de 4 cm.

65. **Estrategia: analizo y comparo** Mirá los rombos que construiste en las dos actividades anteriores.
- ¿Son congruentes? Si no lo son, señala en qué se parecen y en qué no.
 - ¿Cuántos rombos diferentes podrías haber dibujado en cada caso?
 - ¿Qué rombo particular es el que dibujaste en la actividad 64?

66. Completá el trapecio isósceles considerando que el siguiente segmento es una de sus diagonales y que las dos diagonales se cortan en el punto rojo.



67. **Estrategia: analizo y comparo** Compará el trapecio que construiste en la actividad anterior con el de tus compañeros.

- ¿Cómo lo hizo cada uno?
- ¿Qué otro dato podrías agregar para que todos los trapecios construidos sean congruentes?

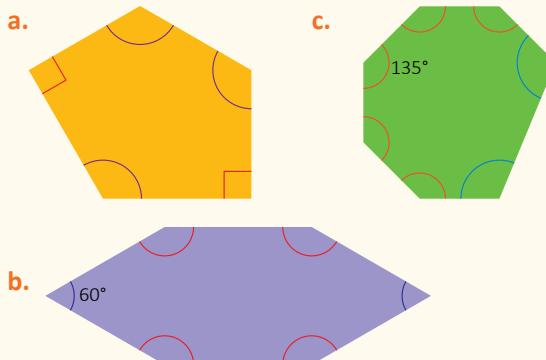
68. Tres compañeros tienen que llevar a la escuela cuadriláteros dibujados en cartulina. Para no hacer todos el mismo, se ponen de acuerdo en cuál hará cada uno. El único inconveniente es que no recuerdan sus nombres. Mirá lo que dicen. ¿A qué cuadrilátero se refiere cada uno?

Dani: –Yo hago el que tiene diagonales distintas, pero lados iguales.

Sol: –Y yo, el que tiene dos pares de lados paralelos, pero diagonales distintas. Además, todos sus lados son iguales.

Mirta: –Entonces yo puedo hacer el de diagonales perpendiculares, ese en el que solo una corta a la otra por la mitad.

69. Calculá la medida de los ángulos coloreados en cada polígono. Considerá que los ángulos de igual color miden lo mismo.



70. ¿Cuáles de estos valores pueden corresponder a los ángulos centrales de polígonos regulares? ¿Cómo te das cuenta?

10°	15°	25°	36°
40°	45°	55°	60°
69°	70°	81°	90°
100°	120°	150°	180°



- 71.** **Estrategia: analizo y comparo** Mirá en la actividad anterior las medidas que corresponden a ángulos centrales de polígonos regulares.

- ¿Cuál es la mayor medida que puede tener un ángulo central de un polígono regular? ¿Por qué?
- ¿Hay algún ángulo central de un polígono regular cuya medida sea, por ejemplo, $22^\circ 30'$? Si pensás que sí, señala cuántos lados tiene, y si creés que no, explicá por qué.
- ¿Hay alguna medida que sea la menor que puede tener un ángulo central de un polígono regular? ¿Por qué?

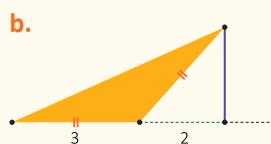
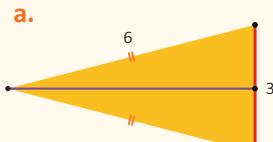
- 72.** **Estrategia: empiezo por el final** Analizá algunas características del polígono regular de nueve lados.

- ¿Cuánto mide cada ángulo central?
- Hacé un dibujo de análisis y marcá un ángulo central. Los lados de ese ángulo forman un triángulo con un lado del polígono. ¿Cuánto mide cada ángulo de la base de ese triángulo?
- Construí un triángulo con esas características.
- A partir del triángulo anterior, construí el polígono regular de nueve lados.

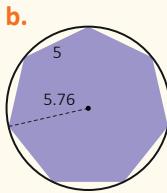
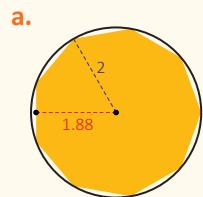
- 73.** **Estrategia: analizo y comparo** Releé lo que hiciste en la actividad anterior para dibujar el eneágono regular. Luego, escribí las instrucciones que le darías a un compañero para que pueda construir cualquier polígono regular.

- 74.** ¿Cuánto mide cada uno de los lados congruentes de un triángulo isósceles, si el lado desigual mide 5 cm y su altura es de 7 cm?

- 75.** Calculá la altura que se trazó en cada triángulo isósceles representado.



- 76.** Calculá el perímetro y el área de cada uno de los polígonos regulares representados.

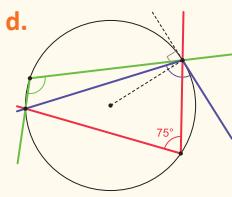
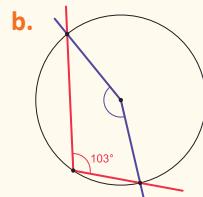
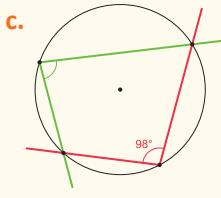
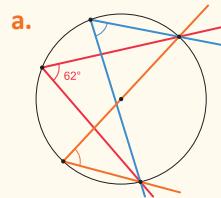


- 77.** ¿Cuánto mide la diagonal de un cuadrado de 25 cm^2 de área?

- 78.** **Estrategia: analizo y comparo** Mirá cómo resolvieron tus compañeros la actividad anterior.

- Marcelo dice que para calcular la diagonal, tuvo que usar el teorema de Pitágoras. ¿Cómo pudo haberlo hecho?
- Carla, en cambio, llegó al mismo resultado sin usar ese teorema. Dice que pensó en el cuadrado como un rombo y calculó directamente la medida de la diagonal. ¿Qué fórmula usó?
- ¿Usaste alguna de esas formas para resolver la actividad anterior? ¿Cuál te parece más fácil?

- 79.** Calculá la medida de los ángulos señalados. Explicá cómo lo hiciste.



- 80.** Dibujá un segmento de 6 cm.

- Considerá el segmento como altura de un triángulo y reconstruilo.
- ¿Cuántos triángulos distintos podrías construir?
- Si además te dicen que un extremo del segmento es uno de los puntos notables del triángulo, ¿de qué punto notable podría tratarse? ¿Cómo sería el triángulo? Construilo.

Saquen una hoja



Marcá la opción correcta.

1. ¿Cuál de estos cuadriláteros no puede tener las diagonales iguales?

- Rectángulo.
- Trapecio rectángulo.
- Trapezoide común.
- Romboide.

2. ¿Cuál de estos cuadriláteros puede tener exactamente tres lados de la misma medida?

- Rombo.
- Trapecio rectángulo.
- Trapecio isósceles.
- Paralelogramo común.

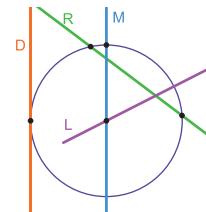
3. ¿Cuál de estos ángulos no es el ángulo interior de ningún polígono regular?

- 128°
- 135°
- 144°
- 150°

4. ¿Cuáles son el área y el perímetro aproximado de un cuadrado que tiene 4 cm de diagonal?

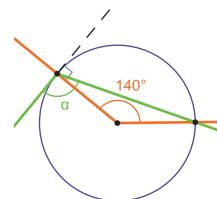
- 16 cm^2 y 16 cm.
- $11,31 \text{ cm}^2$ y 8 cm.
- 8 cm^2 y 4 cm.
- 8 cm^2 y 11,31 cm.

5. ¿Cuál de las rectas representadas es tangente a la circunferencia?



- D
- R
- M
- L

6. ¿Cuánto mide el ángulo α ?



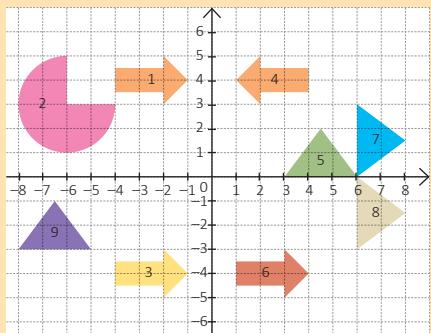
- 70°
- 90°
- 110°
- 280°

7. ¿Cuál es el punto notable que está a la misma distancia de los tres lados del triángulo?

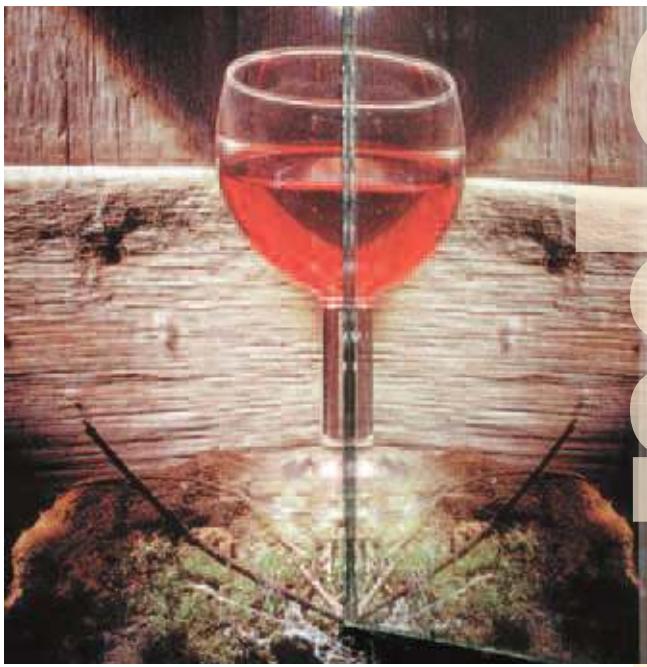
- Circuncentro.
- Incentro.
- Baricentro.
- Ortocentro.

Esto ya lo sabía...

- ## **1.** Observá las figuras en el plano.



- a. Si se doblase el papel por el eje **x**, habría algunas figuras que coincidirían. Lo mismo pasaría si se doblase por el eje **y**. ¿Qué figura se obtendría en cada caso a partir de la figura 1?
 - b. María afirma que al doblar por el eje **y**, la 3 coincide con la 6, pero Sole le dice que, en realidad, esta última se obtiene al trasladar la 3. ¿Quién te parece que tiene razón?
 - c. ¿Qué figura se puede obtener al rotar la figura 5?



El espejo nos devuelve una imagen de los objetos que se reflejan en él.

Si el espejo es plano y no tiene imperfecciones, la imagen reflejada es igual al objeto en tamaño y forma, aunque la percibamos “al revés”.

Por eso, a veces los sentidos pueden engañarnos al mirar una imagen y su reflejo.

Como en la foto, que si la mirás rápido y sin detenimiento, parece que se observara una copa, mientras que en realidad es solo media copa y su reflejo en el espejo.

- Algunos creen que las que siguen son todas letras, pero en realidad hay entre ellas un número frente al espejo. ¿De qué número se trata y dónde está el espejo? Representalo con un segmento.

A H M

TV

Simetrías



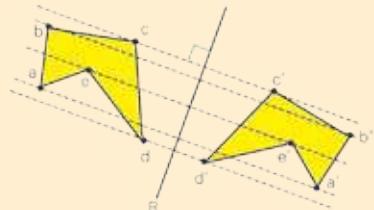
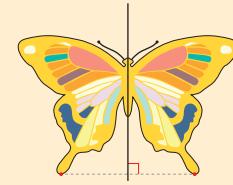
Simetría axial

- En algunas cosas se puede observar un eje de simetría, como en el ejemplo de la mariposa. El eje de simetría es una recta. Si se doblase la imagen por el eje de simetría, las dos partes coincidirían.
- Se puede hallar una imagen simétrica a otra marcando algunos puntos de referencia y encontrando el simétrico de cada punto.

Por ejemplo, para encontrar el simétrico de un polígono respecto de una recta **R**, hay que hallar el simétrico de cada vértice y luego unir los puntos obtenidos que serán los vértices del nuevo polígono, reflejo del anterior. Para encontrar el simétrico de cada vértice, digamos, de **a**, se traza una recta perpendicular al eje **R** que pasa por **a**. Luego se toma la distancia de **a** hasta **R** y se marca del otro lado de **R**, para obtener **a'**.

La **simetría axial** o **simetría de eje R** se anota como S_R .

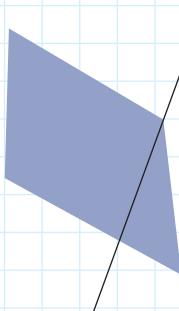
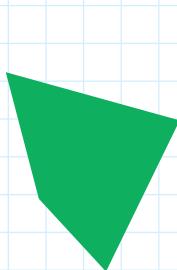
- La imagen obtenida por una simetría tiene el mismo tamaño y forma que la figura original, aunque se ve invertida.



2. **Estrategia: ensayo y error** Marcá los ejes de simetría de cada figura. ¿Hay alguna que no tenga ninguno?



3. Encontrá el simétrico de cada polígono.



Fijate bien

Uní los puntos reflejados en el mismo orden que los originales porque, si no, la figura puede cambiar.

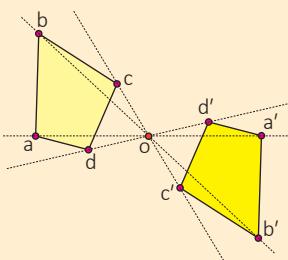


Simetría central

- También pueden obtenerse imágenes simétricas considerando un centro de simetría, en vez de un eje.

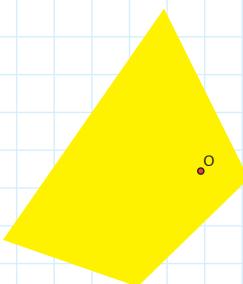
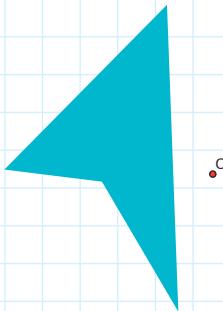
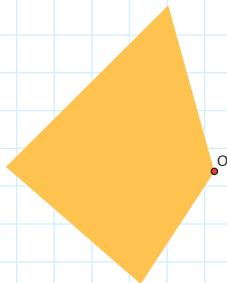
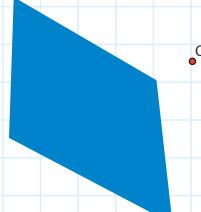
Por ejemplo, para encontrar el simétrico de un polígono respecto de un punto **o**, hay que hallar el simétrico de cada vértice y luego unir los puntos obtenidos que serán los vértices del nuevo polígono. Para encontrar el simétrico de cada vértice, digamos, de **a**, se traza una recta que pasa por **a** y por **o**. Luego se toma la distancia de **a** hasta **o** y se marca del otro lado de **o**, para obtener **a'**.

La **simetría central** o **simetría de centro o** se anota como S_o .



- Al igual que en la simetría axial, la imagen obtenida por una simetría central tiene el mismo tamaño y forma que la figura original, aunque distinta orientación.

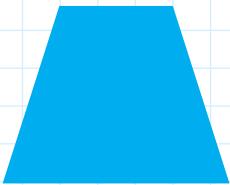
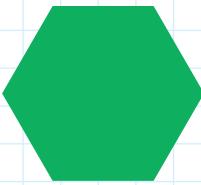
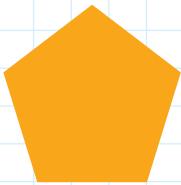
4. Encontrá el simétrico de cada polígono.



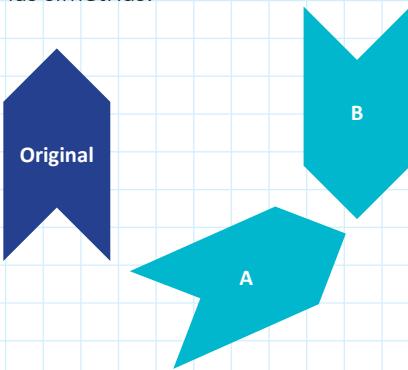
5. **Estrategia: analizo y comparo** Mirá las simetrías axiales y centrales que hiciste en las actividades 3 y 4, y respondé.
 - ¿En qué casos ocurre que algún punto de la figura original coincide con la de su simétrica?
 - ¿Hay casos en los que la figura original y su simétrica quedan superpuestas?

6. Algunos polígonos tienen uno o varios ejes de simetría; también pueden tener centros de simetría. Sin embargo, hay otros en los que no puede encontrarse ninguna simetría.

Identificá cuáles de estos polígonos tienen ejes y centros de simetría; marcá los primeros con rojo y los segundos con azul.



7. **Estrategia: pensar al revés** En la imagen se observa una flecha original más oscura y otras dos que se obtienen a partir de ella: una, al realizar una simetría axial, y la otra, una simetría central. Sin embargo, no pueden verse el eje ni el centro de las simetrías.

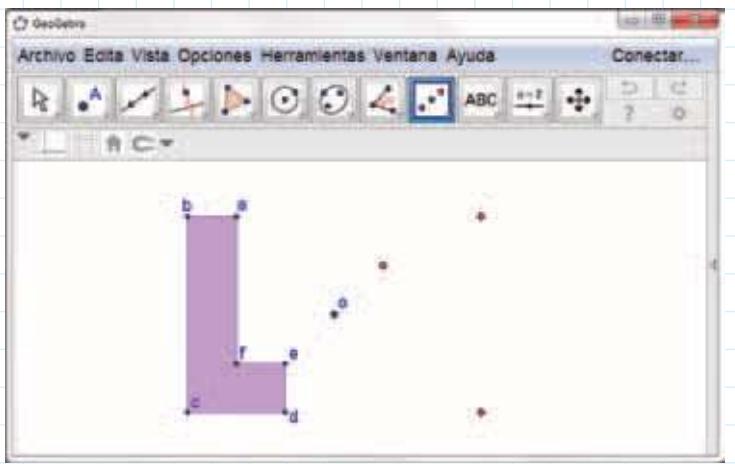


a. ¿Cuál corresponde a cada simetría? ¿Cómo te diste cuenta?

b. En la imagen anterior dibujá el eje y marcá el centro de cada simetría.



8. Lili está hallando la imagen de una L por una simetría de centro **o**, pero le faltan algunos puntos. Nombrá cada uno de los que halló, así: si el original es **a**, a su simétrico llámalo **a'**. Después encontrá los que faltan y unílos para formar la L. (En la imagen de GeoGebra se destaca la herramienta que permite hallar simetrías centrales).



9. Dibujá un polígono que cumpla lo pedido en cada caso.

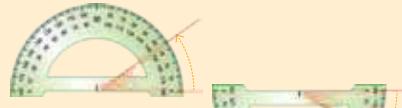
- Con un centro de simetría, pero sin un eje.
- Con al menos un eje de simetría, pero sin centro.
- Con un centro de simetría y al menos un eje.
- Sin eje ni centro de simetría.

Rotación



Ángulos orientados

- Un ángulo puede trazarse en sentido **positivo** (al revés que las agujas del reloj) o en sentido **negativo** (como las agujas del reloj).



Positivo: $+35^\circ$

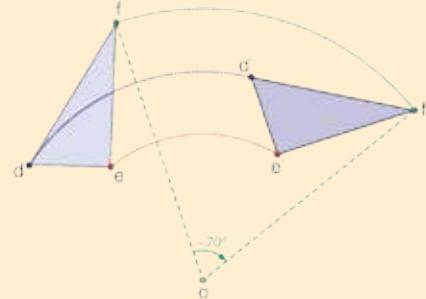
Negativo: -35°

Rotaciones

- Una figura puede rotarse alrededor de un centro \mathbf{o} , con un ángulo α . Para hacerlo, se eligen y rotan algunos puntos de referencia.

Por ejemplo, para rotar el triángulo **def** 70° en sentido negativo alrededor del centro \mathbf{o} , se une cada vértice, por ejemplo el \mathbf{f} , con \mathbf{o} y luego se traza el ángulo considerando a $\overrightarrow{\mathbf{of}}$ como uno de sus lados; sobre el otro lado del ángulo se marca \mathbf{f}' , a la misma distancia de \mathbf{o} que \mathbf{f} . Despues de rotar cada vértice, se unen para obtener el nuevo triángulo.

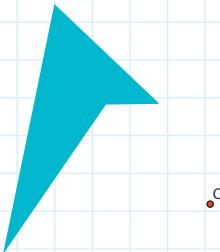
La **rotación de centro \mathbf{o} y ángulo α** se anota como $R(\mathbf{o}, \alpha)$. La del ejemplo, $R(\mathbf{o}, -70^\circ)$.



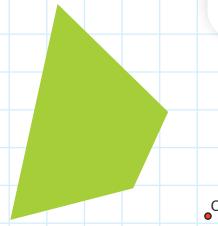
- Como en las simetrías, la imagen obtenida por una rotación tiene el mismo tamaño y forma que la figura original.

10. Realizá las rotaciones indicadas.

a. $R(\mathbf{o}, +100^\circ)$



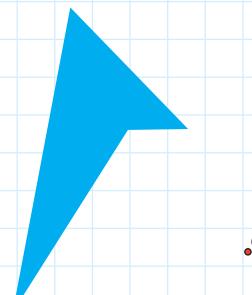
c. $R(\mathbf{o}, +180^\circ)$



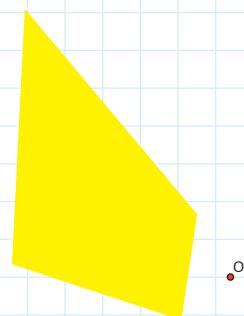
Fijate bien

Recordá unir los puntos obtenidos en el mismo orden que los originales.

b. $R(\mathbf{o}, -100^\circ)$

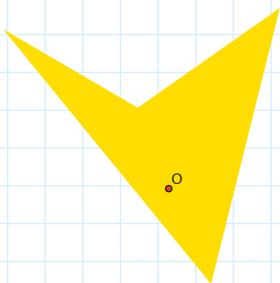


d. $R(\mathbf{o}, -80^\circ)$



11. ¡Más rotaciones!, pero ahora con el centro en la figura. Realizalas.

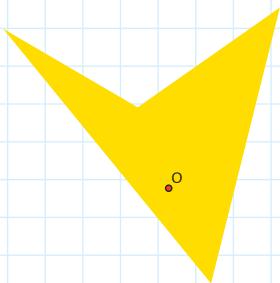
a. $R(o, +90^\circ)$



c. $R(o, +70^\circ)$



b. $R(o, -90^\circ)$



d. $R(o, -70^\circ)$



12. **Estrategia: analizo y comparo** Mirá las rotaciones que hiciste en las actividades 10 y 11, y respondé.

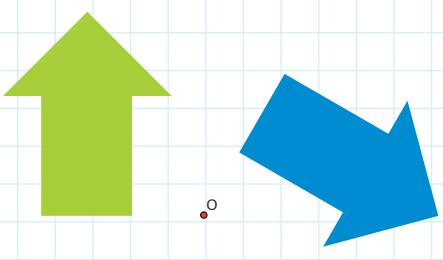
- ¿Es cierto que si dos rotaciones tienen el mismo centro y sus ángulos son opuestos, las imágenes obtenidas coinciden?
- ¿Dónde se ubica el centro de rotación si solo un vértice de la figura original coincide con el de la rotada?
- ¿Cuál podría ser el ángulo de giro para que todos los vértices de la figura original coincidieran con los de la rotada? En ese caso, ¿dónde puede ubicarse el centro de rotación?
- Una de las rotaciones equivale a una simetría central. ¿Cuál?

13. ¿Cuál puede ser el ángulo de giro en cada caso si en ambos la flecha original es la que señala hacia arriba?

a.



b.

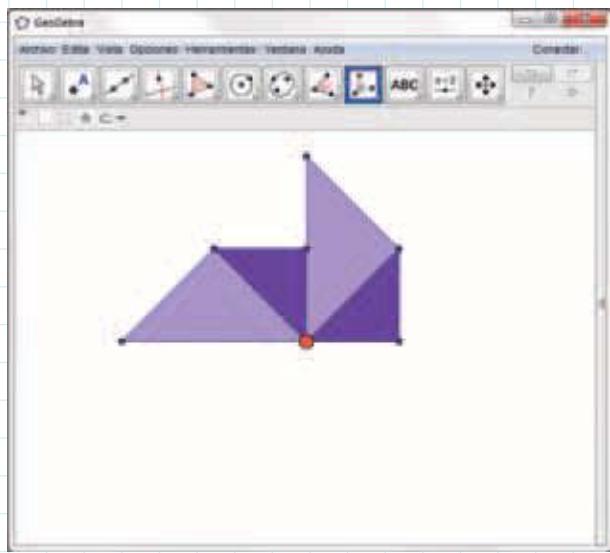


14. **Estrategia: pensar al revés** Al resolver la actividad anterior, Marisa y Ariel encontraron distintos ángulos, pero ambos están seguros de que son correctos. Si los dos de Marisa son positivos, mientras que los dos de Ariel son negativos, ¿cuáles son los ángulos que escribió cada uno y qué relación hay entre ellos?



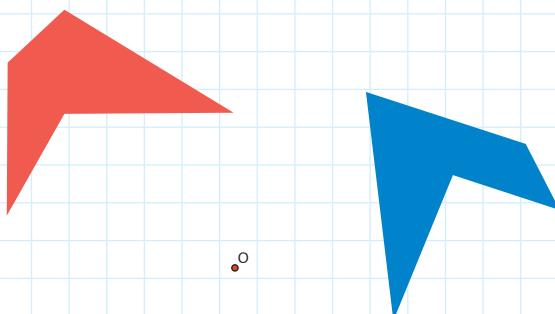
15. Fer quiere dibujar un molinete de viento como los que se venden en la plaza. Para hacerlo, empezó dibujando dos triángulos que simulan el pliegue del papel (por eso pintó uno más claro y el otro más oscuro). Después los rotó y obtuvo otros dos, iguales a los anteriores.

- a. Mirá la imagen y señalá cuál es el centro de rotación y cuál puede ser al ángulo de giro.



- b. Completá el molinete. Podés hacerlo acá o en la compu. (En la imagen de GeoGebra se destaca la herramienta que permite hacer las rotaciones).

16. **Hacé de profe** Mara realizó una rotación, y aunque todos los ángulos están bien medidos, no logra obtener una figura igual a la original. ¿Cuál fue su error?



Tengo tarea

17. ¿Quién tiene razón: Maru o Dulce? ¿Por qué?

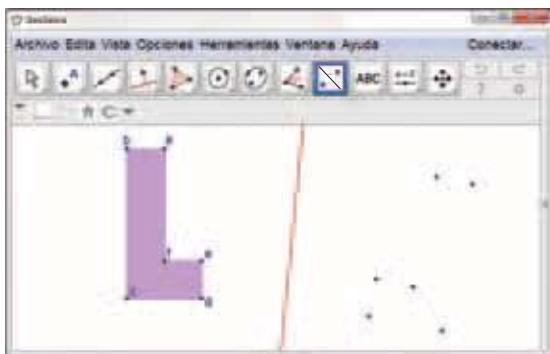
Mile: —Roté una figura un ángulo positivo y con el mismo centro la roté otro ángulo, pero negativo, y las dos imágenes coincidieron. ¿Está bien?

Maru: —No puede ser, porque son distintas rotaciones.

Dulce: —Sí, son diferentes rotaciones, pero en algún caso pueden coincidir. Me parece que depende de los ángulos.



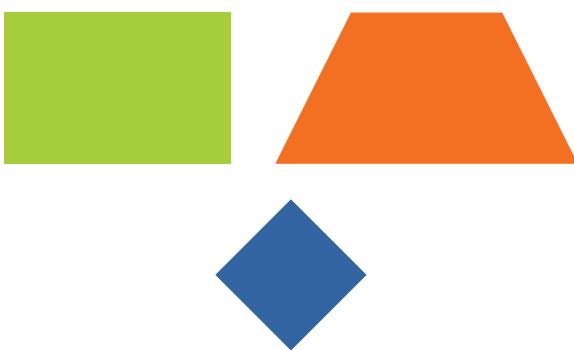
- 18.** Lili sigue trabajando en GeoGebra, tratando de hallar la imagen de una L por una simetría, aunque esta vez se decidió por una simetría axial. Ya encontró los puntos simétricos de todos los vértices de la L, pero todavía tiene que unirlos. Nombrá cada uno de los puntos que halló y unilos para formar la L. (En la imagen se destaca la herramienta que permite hallar simetrías axiales).



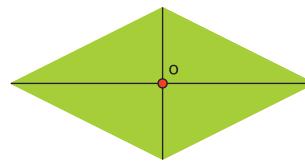
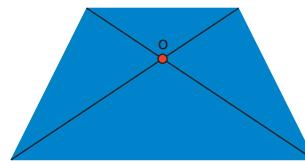
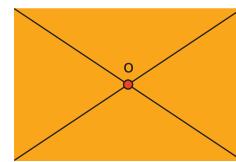
- 19.** Realizá las simetrías indicadas (podés hacerlas en la compu o en la carpeta).
- Dibujá un cuadrado, trazá una recta R que contenga a una de sus diagonales. Hallá el simétrico del cuadrado respecto de R.
 - Dibujá un romboide, trazá una recta S que contenga a una de sus diagonales. Hallá el simétrico del romboide respecto de S.

- 20.** **Estrategia: analizo y comparo** Mirá lo que hiciste en la actividad anterior y respondé. ¿En qué casos la figura obtenida coincide con la figura original? ¿En cuáles depende de la diagonal trazada? ¿Por qué creés que pasa eso?

- 21.** Mirá estos polígonos e indicá si en alguno de ellos sus diagonales son ejes de simetría.



- 22.** Analizá si al aplicarle a cada figura una simetría de centro **o**, alguna de sus imágenes coincide con la figura original.

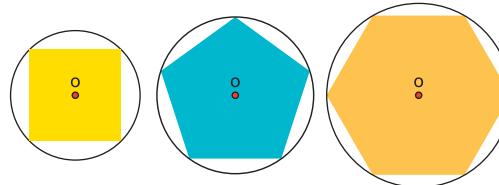


- 23.** Dibujá un triángulo acutángulo y llamá **o** a uno de sus vértices. Rotá el triángulo 90° respecto del punto **o**. Despues hacé lo mismo con un triángulo rectángulo y con un triángulo obtusángulo (podés trabajar en la compu o en la carpeta).

- 24.** **Estrategia: analizo y comparo** Mirá lo que hiciste en la actividad anterior y respondé.

- ¿En qué casos la figura obtenida se superpone con la figura original? ¿Depende del vértice elegido? ¿Por qué?
- ¿Puede ser que la figura original y la rotada queden con dos lados “pegaditos”? Si te parece que sí, indicá en qué caso; y si creés que no, explicá por qué.

- 25.** Marce tiene que rotar cada uno de estos polígonos regulares alrededor del centro de la circunferencia que los inscribe. ¿Cuál es el menor ángulo positivo con el que debería hacer cada rotación para que la nueva figura coincida con la original? ¿Cómo te das cuenta?



Traslaciones



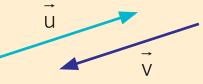
Vectores

- Los **vectores** se usan para indicar desplazamientos. Por eso tienen una medida o **módulo**, que señala de cuánto será el desplazamiento; una **dirección**, dada por la recta que lo contiene; y un **sentido**, indicado por la flecha.



Se nombran con una letra minúscula y una flecha sobre ella (\vec{v}).

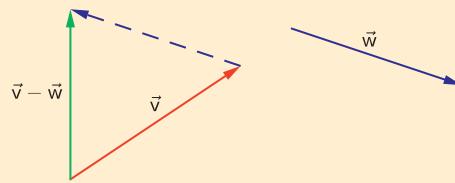
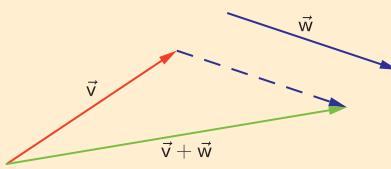
Los vectores \vec{u} y \vec{v} tienen igual módulo (miden lo mismo) e igual dirección, pero sentido contrario.



- Los vectores pueden sumarse y restarse.

Para sumarlos, se dibujan uno a continuación del otro y luego se une el origen del primero con el extremo del último.

Para restarlos, el procedimiento es similar, pero se invierte el sentido del vector que se resta, manteniendo la dirección y el módulo.



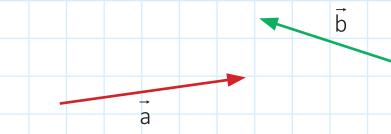
- También puede multiplicarse un vector por un número real, obteniéndose otro vector de igual dirección.



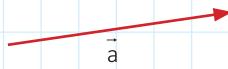
El vector $2\vec{a}$ tiene el mismo sentido que \vec{a} , mientras que $-2\vec{a}$ tiene el sentido contrario. En ambos casos, el módulo se duplicó.

26. Realizá las operaciones indicadas en cada caso.

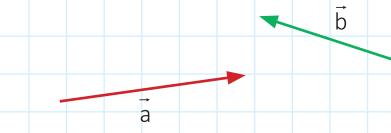
a. $\vec{a} + \vec{b}$



c. $1,5\vec{a}$



b. $\vec{a} - \vec{b}$



d. $-0,5\vec{a}$



27. **Estrategia: analizo y comparo** Mirá la actividad anterior y señalá verdadero (V) o falso (F), según corresponda.

El vector $\vec{a} + \vec{b}$ es otro vector de igual dirección y módulo que el vector $\vec{a} - \vec{b}$, pero de sentido contrario.

Al multiplicar un vector por un número con coma, el módulo del vector que se obtiene es menor que el del original.

Al multiplicar un vector por un número entre -1 y 1 , el módulo del vector que se obtiene es menor que el del original.



Traslación

- Una **traslación** es un desplazamiento. Una figura puede trasladarse en determinada dirección y sentido, y con una medida determinada. Por eso, para indicar una traslación, se emplea un vector y se indica $T(\vec{v})$.

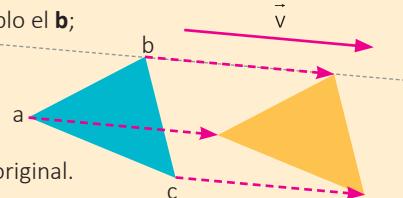
Igual que con los otros movimientos, pueden trasladarse algunos puntos de referencia que luego permitirán dibujar la figura.

Por ejemplo, para trasladar el triángulo **abc** según el vector \vec{v} , se traslada cada vértice para obtener los de la nueva figura. Para eso:

- ✓ primero se traza una recta paralela a \vec{v} que pase por un vértice, por ejemplo el **b**;
- ✓ luego se toma la medida de \vec{v} y se marca sobre la recta desde **b**, respetando el sentido del vector.

Lo mismo se realiza con los otros vértices.

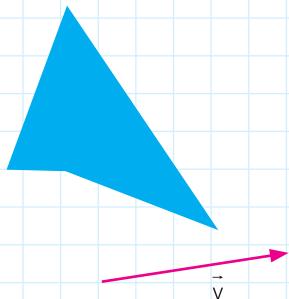
Finalmente, se unen los puntos obtenidos, respetando el orden de la figura original.



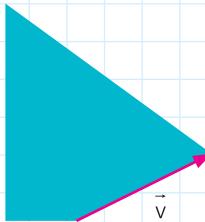
- En una traslación, como en los otros movimientos, se mantienen la forma y el tamaño de la figura, es decir, la longitud de los lados y la amplitud de los ángulos no cambian. Además, en este movimiento tampoco cambia la orientación de la figura.

28. Realizá las siguientes translaciones.

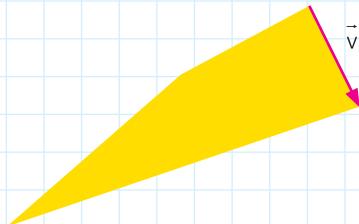
a. $T(\vec{v})$



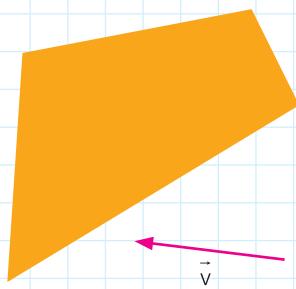
c. $T(\vec{v})$



b. $T(\vec{v})$



d. $T(\vec{v})$

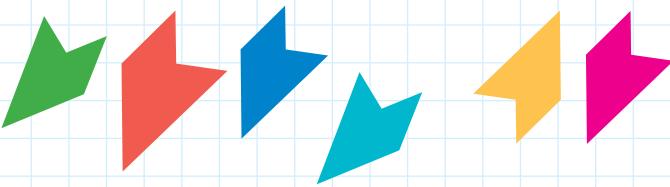


29. **Estrategia: analizo y comparo** Mirá lo realizado en la actividad anterior y respondé.

- a. ¿Es cierto que si el vector coincide con un lado de la figura, las imágenes obtenidas se superponen?

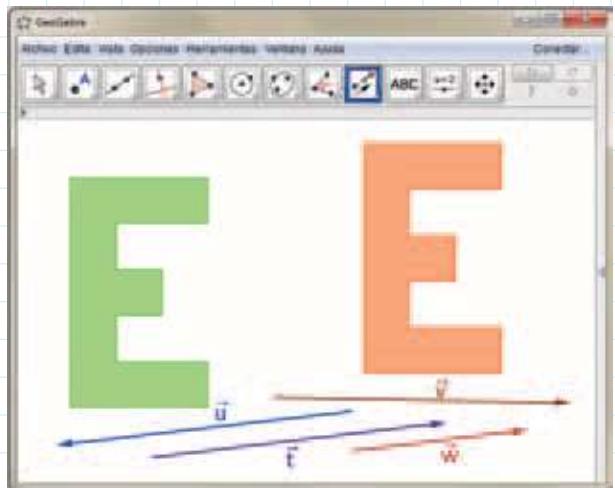
- b. ¿La figura original puede coincidir con la trasladada? ¿Por qué?

- 30.** Solo una de estas imágenes es la que resulta de trasladar el polígono azul. ¿Cuál? ¿Cómo te diste cuenta?

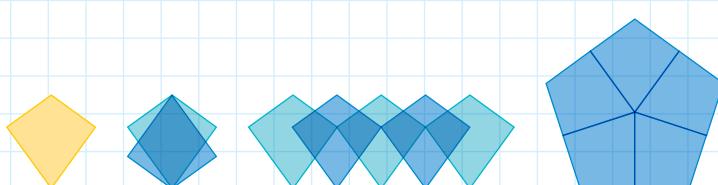


- 31.** Matías trasladó la letra E y obtuvo otra E. Marisa mira lo que hizo Matías, tratando de descubrir qué vector pudo haber usado. (En la imagen se destaca la herramienta que permite realizar traslaciones). Mirá vos también las imágenes y respondé.

- ¿Qué vector pudo haber usado para trasladar la E verde y obtener la anaranjada? ¿Cómo te diste cuenta?
- Si la figura original hubiese sido la anaranjada y a partir de ella se hubiese hallado la verde, ¿cuál podría haber sido el vector empleado?
- ¿Hay alguna relación entre ambos vectores? Explicá tu respuesta.



- 32.** **Hacé de profe** Romina armó varios diseños a partir de la imagen amarilla. Tres de sus amigos discuten acerca de la forma en la que pudo haber realizado los diseños. ¿Quién o quiénes tienen razón? ¿Cómo te das cuenta?



Emi
Estoy seguro de que en el último diseño no usó traslaciones.

Flor
Solo usó traslaciones en el segundo diseño, donde desplazó la imagen hacia el costado.

Fede
No, el tercero es el único en el que no usó traslaciones, porque en el primero también desplazó la imagen, pero hacia abajo.



Tengo tarea

- 33.** Realizá estas traslaciones en la compu o en tu carpeta.

- Dibujá un cuadrado y marcá una de sus diagonales. Trasladá el cuadrado usando la diagonal como vector. ¿De cuántas formas puede realizarse la traslación? ¿Por qué?
- Dibujá un trapecio rectángulo. Considerá la base menor como vector y trasladá el trapecio hacia la izquierda. ¿De cuántas formas puede realizarse la traslación en este caso? ¿Por qué?

Composición de movimientos

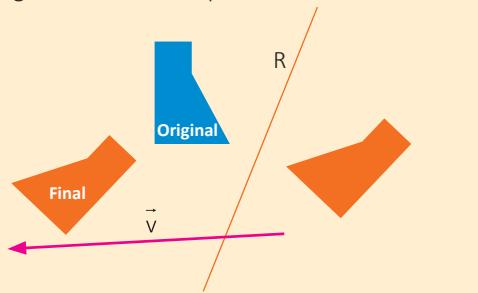


Movimientos sucesivos

- A una figura se le pueden realizar movimientos sucesivos, ya sean de igual o de distinto tipo.

Por ejemplo, puede buscarse la imagen de un polígono a partir de una simetría axial y luego trasladar esa imagen para obtener un tercer polígono de la misma forma y tamaño que la figura original.

La aplicación sucesiva de movimientos se denomina **composición de movimientos**.



Para simbolizar la composición de movimientos, se los escribe en el orden inverso en el que se realizan, unidos por “ \circ ”. En el ejemplo, $T(\vec{v}) \circ S(R)$.

Primero se realizó la simetría y luego la traslación.

34. Realizá en cada caso las composiciones indicadas.

a. $S(R) \circ R(o, 45^\circ)$



R

o

c. $T(\vec{v}) \circ S(o)$



o

\vec{v}

b. $R(o, 45^\circ) \circ S(R)$



R

o

d. $S(o) \circ T(\vec{v})$



o

\vec{v}

35.  **Estrategia: analizo y comparo** Mirá lo realizado en la actividad anterior. ¿Es cierto que si se cambia el orden de los movimientos, siempre se obtiene la misma figura?

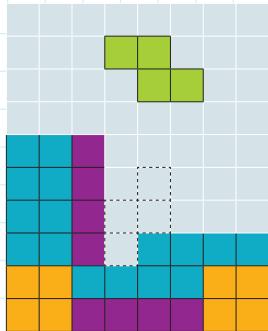
36.  **Estrategia: ensayo y error** ¿Qué ocurre al realizar dos veces la misma simetría axial, es decir, $S(R) \circ S(R)$? Probá con varias figuras y escribí tu conclusión. Podés usar el GeoGebra.

37.  **Estrategia: ensayo y error** Al realizar dos veces el mismo movimiento, ¿pasa lo mismo que con las simetrías axiales? Probá con varias figuras y escribí tu conclusión. Podés usar el GeoGebra.

! **Fijate bien**

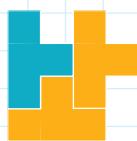
Recordá aplicar el primer movimiento a la figura original y el segundo, a su imagen.

38. La imagen muestra un juego de video en el que se aplican distintos movimientos para ubicar cada figura sin que queden espacios libres.
Mirá la próxima jugada y señala cuáles son los movimientos que podrían realizarse para que la figura encaje en el espacio señalado.

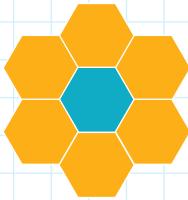


39. ¿Cómo podrías hacer, con movimientos sucesivos, para obtener en cada caso las imágenes amarillas a partir de la celeste?

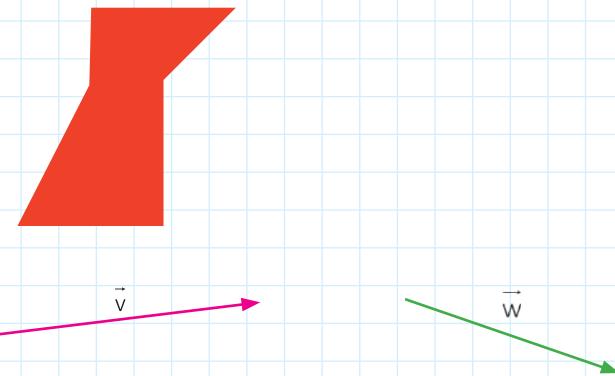
a.



b.



40. Trasladá el polígono según el vector \vec{v} y luego trasladá su imagen según \vec{w} .



41. **Estrategia: ensayo y error** Clarita y sus amigos "se engancharon" con las traslaciones y siguen dándole vueltas a la actividad anterior. ¿Quién o quiénes tienen razón? Podés ensayar con la imagen de arriba.

Si primero traslado según \vec{w} , y a su imagen la traslado según \vec{v} , obtengo la misma imagen final.

Rony

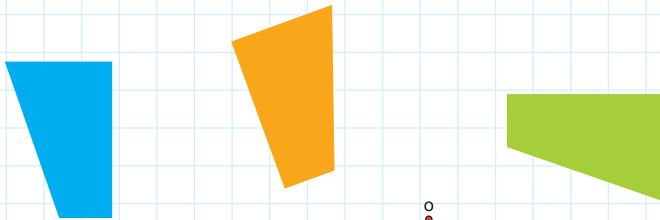
No solo la imagen final es igual, también la que se obtiene con la primera traslación.

Clarita

También se obtiene la misma imagen final haciendo una sola traslación, pero usando el vector $\vec{v} + \vec{w}$.

Ceci

42. Mirá estas imágenes. La azul es la original y la verde, la última obtenida después de realizar primero una simetría y después una rotación de centro \bullet .



a. ¿La simetría es axial o central? ¿Cómo te das cuenta? Hallá el eje o el centro de la simetría.

b. ¿Cuál es el ángulo de rotación?

Tengo tarea

43. Catalina realizó cinco rotaciones sucesivas con el mismo centro, hasta que la última imagen obtenida coincidió con la original.

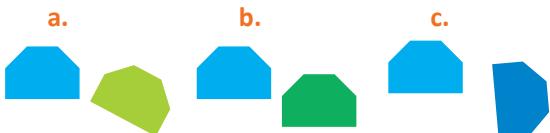
- ¿Cuál fue el ángulo de giro, si los cinco eran iguales y agudos?
- ¿Podría pasarse lo mismo usando cinco ángulos diferentes? Si pensás que no, explicá por qué y si creés que sí, da un ejemplo.
- Si Cata hubiese realizado las cinco rotaciones usando otro centro de rotación, ¿le habría pasado lo mismo? ¿Por qué?

44. Dibujá en cada caso dos vectores que cumplan lo pedido. Después sumalos y restalos.
- De igual dirección y sentido, pero distinto módulo.
 - De igual dirección y módulo, pero distinto sentido.
 - De igual dirección, pero distinto sentido y módulo.
 - De distinta dirección, sentido y módulo.

45. **Estrategia: analizo y comparo** Mirá lo realizado en la actividad anterior y respondé.

- ¿Cómo tienen que ser dos vectores para que al sumarlos su módulo sea cero?
- ¿Cómo tienen que ser dos vectores para que al restarlos su módulo sea cero?
- ¿Cómo tienen que ser dos vectores que tienen igual dirección para que al sumarlos su módulo sea mayor que el de cada uno de ellos?
- ¿Cómo tienen que ser dos vectores que tienen igual dirección y sentido para que al sumarlos su módulo sea el doble del módulo de cualquiera de ellos?

46. ¿Cuál o cuáles de estos movimientos no corresponden a una traslación? Explicá tu respuesta.



47. Señalá los vectores que direccionan el movimiento de la rana.



1. Sale de acá...



2. Con el primer salto
llega hasta acá...

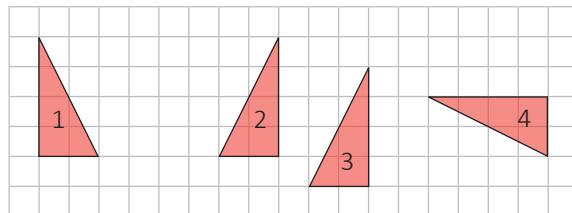


3. Y con el segundo...

4. Por último, salta y vuelve a la posición inicial.

48. Al observar la actividad anterior, Mariano dice que si suma los tres vectores, obtiene uno de módulo cero. ¿Es cierto? ¿Cómo se pudo dar cuenta?

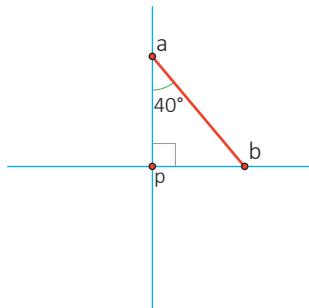
49. Señalá qué movimientos se realizaron para obtener la figura 4 a partir de la figura 1.



50. Mariela y José tienen dos imágenes iguales con las que practican movimientos. Mariela realizó dos rotaciones sucesivas de igual centro y ángulo de giro. Cuando terminó, le quedó igual que a José, que hizo solo una simetría central.

- ¿Qué ángulo de giro pudo usar Mariela?
- ¿Qué tiene que pasar con el centro de rotación de Mariela y el centro de la simetría de José para que la imagen inicial y la final de uno puedan superponerse simultáneamente a las del otro?

51. A partir de movimientos sucesivos del segmento ab, Luli quiere construir un rombo. ¿Qué movimientos puede realizar? Verificalo realizando la composición propuesta.



52. Mirá lo que dicen tres amigos de la actividad anterior.

Juli: –Yo solo usé simetrías axiales.

Pablo: –Y yo solo trabajé con rotaciones.

Male: –En cambio, yo usé las dos.

¿Qué movimientos pudo realizar cada uno?

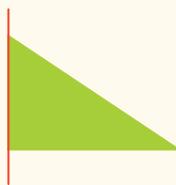
¿Podrá haber otras formas de resolverlo?



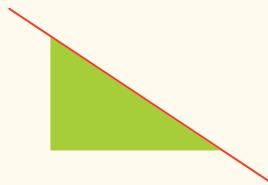
Reaso todo

53. Realizá las simetrías axiales indicadas.

- a. Del triángulo rectángulo, considerando uno de los catetos como eje de simetría.



- b. Del triángulo rectángulo, considerando la hipotenusa como eje de simetría.



54. **Estrategia: analizo y comparo** Mirá lo realizado en la actividad anterior. Considerá la figura que se forma uniendo la imagen original y su simétrica y respondé.

- a. ¿Cómo tiene que ser el triángulo original para obtener un cuadrado?
- b. ¿Cómo tiene que ser el triángulo original para que la figura final sea un triángulo equilátero?

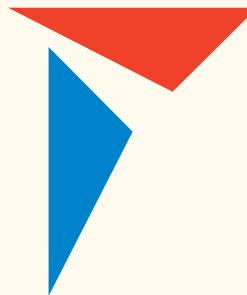
55. Dibujá un triángulo rectángulo y hallá su imagen a partir de una simetría central. Después uní la figura original a su imagen para obtener una nueva figura, como hiciste en las actividades anteriores. ¿Dónde puede ubicarse el centro de la simetría para que la figura final sea un rectángulo?

56. **Estrategia: ensayo y error** Elías rotó un triángulo rectángulo isósceles y dice que la figura formada por la original y su imagen es otro triángulo. ¿Dónde podría ubicarse el centro de rotación?

57. Rodri dice que pueden darle cualquier figura, por más complicada que sea, y cualquier punto para usar de centro, que siempre puede hacer una rotación que le devuelva la figura original; es decir, la figura y su imagen coinciden en todos sus puntos.

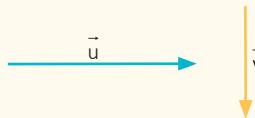
Male todavía no se da cuenta de si Rodri es un genio, o lo dice porque es algo muy sencillo. ¿Qué pensás? Explicalo con un ejemplo.

58. Encontrá el centro y el ángulo de rotación que transforma el triángulo azul en el rojo.



59. Copiá los vectores en tu carpeta y encontrá en cada caso los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.

a.



b.



c.



d.

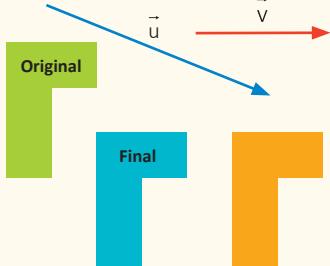


60. **Estrategia: analizo y comparo** Mirá lo realizado en la actividad anterior. Señalá si cada afirmación es verdadera o falsa y explicá con ejemplos.

- a. La suma de dos vectores a veces tiene mayor módulo que la resta de esos mismos vectores.
- b. La suma de dos vectores nunca tiene menor módulo que la resta de esos mismos vectores.
- c. La suma de dos vectores no puede tener el mismo módulo que la resta de esos mismos vectores.
- d. La suma y la resta de dos vectores de igual dirección tienen la misma dirección que ellos.



- 61.** Camila realizó dos traslaciones sucesivas, a partir de los vectores \vec{u} y \vec{v} . Sin embargo, el resultado no es el esperado. ¿Cuál pudo haber sido su error?



- 62.** **Estrategia: analizo y comparo** Mirá lo realizado en la actividad anterior y respondé sin hacer más traslaciones.

- Si Camila hubiese realizado las traslaciones de manera correcta, ¿la figura final estaría más cerca o más lejos que ahora de la original?
- Si hubiese realizado las traslaciones según los vectores $-\vec{u}$ y $-\vec{v}$, es decir, con el sentido opuesto, ¿qué distancia habría entre la figura original y la final, en comparación con la traslación respecto de los vectores \vec{u} y \vec{v} ? ¿Cómo te das cuenta?

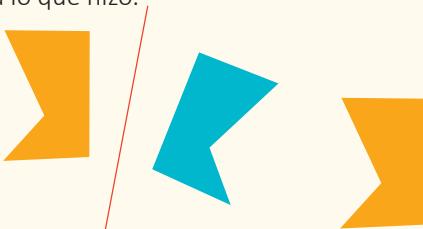
- 63.** Remarcá en la imagen el menor sector que permita, a partir de movimientos, completar el mosaico. Luego indicá de qué movimientos se trata.



- 64.** Dibujá un trapecio isósceles **abcd** en el que los lados **ab** y **cd** sean iguales (también podés hacerlo en la carpeta). A partir de él...

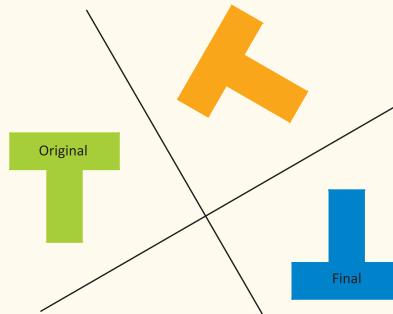
- ¿Qué movimiento podrías hacer para que la base mayor de la imagen se superponga a la base menor de la figura original? Realizalo.
- ¿Con qué movimiento podrías transformar la imagen obtenida en otra en la que la base mayor se superponga a uno de los lados congruentes de la figura original? Realizalo.

- 65.** Matu realizó dos simetrías axiales sucesivas. Mirá lo que hizo.



- Encontrá el eje de simetría que falta. ¿Qué relación hay entre ambos ejes?
- Helena le dice que podía haber obtenido la figura anaranjada a partir de la celeste realizando solo un movimiento. ¿A cuál se refiere?

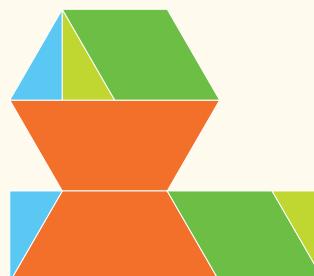
- 66.** Lucas realizó dos simetrías axiales sucesivas y obtuvo la misma imagen que si hubiese hecho una simetría central.



- ¿Cómo serían los ejes de simetría para que eso sea posible?
- En tal caso, ¿cuál sería el centro de la simetría?

- 67.** Marce tenía que calcular el área de un hexágono, pero no recordaba la fórmula. Entonces seccionó el hexágono y reacomodó las partes hasta obtener un rectángulo. En algunos casos hizo solo un movimiento y en otros tuvo que hacer más de uno.

- ¿Cómo movió cada sector?
- ¿Pensás que de esta forma puede hallar el área que buscaba? ¿Por qué?



Saquen una hoja



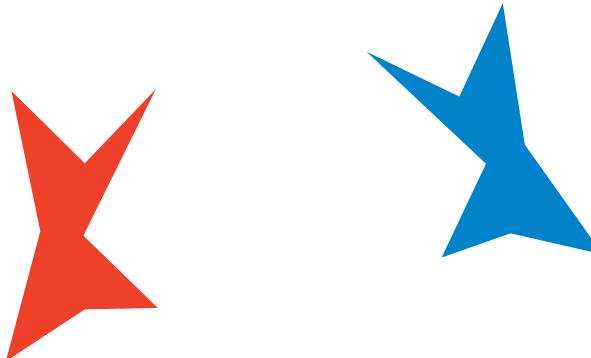
Marcá la opción correcta.

1. ¿Cómo completarías la oración?

Al aplicar un movimiento cualquiera a una figura se obtiene una imagen que mantiene...

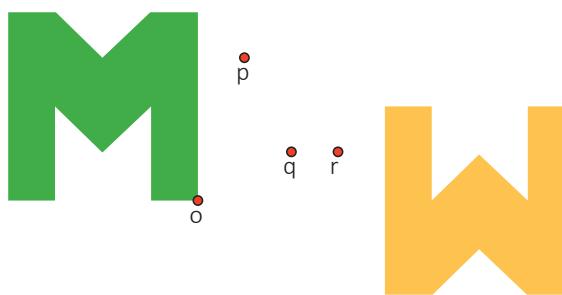
- ... la posición de la figura original.
- ... la forma, el tamaño y la posición de la figura original.
- ... el tamaño de la figura original, pero varían la forma y la posición.
- ... la forma y el tamaño de la figura original, pero varía su posición.

2. ¿Qué movimiento transforma la figura roja en la azul?



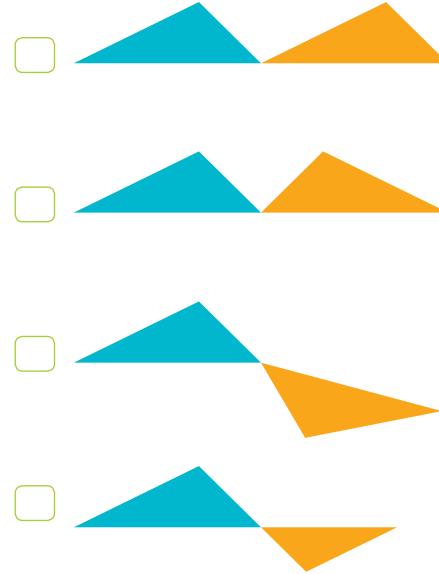
- Una simetría axial.
- Una simetría central.
- Una rotación.
- Una traslación.

3. ¿Cuál es el centro de esta simetría?



- El punto **o**.
- El punto **p**.
- El punto **q**.
- El punto **r**.

4. ¿En cuál de estos casos se realizó una rotación?



5. ¿En qué caso el módulo del vector que se obtiene al sumar otros dos vectores es igual a la suma de los módulos de cada uno de ellos?

- Si los dos tienen la misma dirección y sentido.
- Si los dos tienen la misma dirección y sentido opuesto.
- Si los dos tienen distinta dirección y sentido.
- Si los dos tienen el mismo módulo.

6. Al trasladar una recta siempre se obtiene...

- ... una recta que corta a la anterior.
- ... una recta paralela a la anterior.
- ... una recta perpendicular a la anterior.
- ... la misma recta.

7. ¿En cuál de estas composiciones la imagen final no coincide con la figura original?

- Tres rotaciones de igual centro y ángulo de 120°.
- Dos simetrías axiales con el mismo eje.
- Tres rotaciones de igual centro y ángulo de 180°.
- Dos traslaciones con vectores de igual dirección y módulo, pero distinto sentido.

Esto ya lo sabía...

1. Mirá todos estos rectángulos. Solo uno de ellos resulta de reducir el azul como se haría con una fotocopiadora. ¿Cuál? ¿Cómo te das cuenta?



La edición de imágenes fotográficas consiste en la modificación de estas, ya sea para retocarlas, eliminar fallas o emplear otro tipo de técnicas de manipulación.

Algunos de los efectos que se pueden aplicar son oscurecer, aclarar, ampliar, rotar, cambiar a blanco y negro, etcétera.

Sin embargo, para que la imagen no se deforme, al agrandarla o reducirla se debe respetar la escala, modificando el largo y el alto de la imagen en la misma proporción.

- Mirá esta foto. Es una modificación de la que está arriba.
¿Creés que se respeta la escala? ¿Cómo te das cuenta?



Razones y proporciones



Proporcionalidad numérica

- Como se vio en el Capítulo 2, una **razón** es el cociente entre dos números; por ejemplo, la razón entre 2 y 5 es $\frac{2}{5} = 0,4$.
 - Se recuerda también que una **proporción** se forma al igualar dos razones: $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$. Esta proporción puede leerse: “2 es a 5 como 6 es a 15”. Al numerador de la primera fracción y al denominador de la segunda se los denomina **extremos** porque son el primero y el último en mencionarse (en este caso, 2 y 15), mientras que a los otros dos valores se los llama **medios**.
 - La **propiedad fundamental** de las proporciones es que el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es una proporción, entonces $ad = bc$.

En el ejemplo, $\frac{2}{5} = \frac{6}{15} \rightarrow 2 \cdot 15 = 5 \cdot 6$.

2. Completá con los números que corresponda para que se formen proporciones.

$$\frac{7}{9} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{8}{5} = \frac{20}{ }$$

$$\frac{12}{\square} = \frac{3}{11}$$

$$\frac{18}{\textcircled{8}} = \dots$$

3.  **Estrategia: analizar y comparar** Mirá cómo completaron tus compañeros la última proporción de la actividad anterior

a. ¿Todos lo hicieron de la misma forma? Si hay más de una respuesta, analizá si todas son correctas.

b. ¿Cómo la completarías si te dijiesen que los dos valores que faltan son iguales?

4.  **Hacé de profe** Analizá la conversación de este grupo de amigos. ¿Es cierto todo lo que dicen con respecto a las proporciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$? Explicá tu respuesta y mostrá ejemplos.

Si los medios son iguales, los extremos también son iguales.



Luna

Me parece que no. Porque en ese caso, si uno de los extremos es 1, entonces el otro es el cuadrado de cada uno de los medios.



Ema

¡Pero cuidado! Porque tampoco puede ser cualquiera. El 1 siempre está en el numerador de la primera fracción.



Pablo

Relaciones proporcionales



Proporcionalidad directa

- Una variable **y** es **directamente proporcional** a otra variable **x** cuando se relacionan a partir de la fórmula $y = k \cdot x$, siendo **k** un número real constante no nulo.

El número **k** es la **constante de proporcionalidad** directa.

- Si en vez de tener la fórmula que define la relación, se tienen dos valores que se relacionan (uno de cada variable), entonces la constante de proporcionalidad es la razón entre el valor de **y** y el de **x** (si no son cero).

- Al representar una relación de proporcionalidad directa, los puntos quedan sobre una **recta** que pasa por el origen.

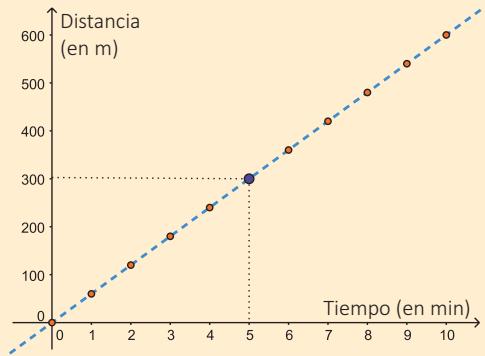
Por ejemplo, si una persona que sale a caminar mantiene siempre el mismo ritmo, entonces la distancia (**d**) que recorre es directamente proporcional al tiempo (**t**) que dura la caminata.

En ese caso, la fórmula que define la relación es $d = v \cdot t$.

La constante de proporcionalidad es la **rapidez** (**v**), y puede calcularse a partir de las coordenadas de uno de los puntos del gráfico.

Como el punto señalado tiene coordenadas (5; 300), entonces la rapidez será:

$$\frac{300 \text{ m}}{5 \text{ min}} = 60 \text{ m/min}$$



5. Sergio observa el plano de una casa. En el plano, la casa de 12 m de largo y 7 m de ancho se representó con un rectángulo de 120 cm de largo y 70 cm de ancho. Sergio describe el plano, pero al hacerlo comete algunos errores. ¿Cuáles de estas afirmaciones tienen esos errores? ¿Qué debería decir Sergio en esos casos?

a. El alto de una ventana de un metro está representado en el plano por 100 cm.

b. Otra ventana, que en el plano mide 18 cm de ancho, en la realidad mide 1,80 m.

c. El espacio destinado para la cama es de 2 cm de largo por 1 cm de ancho, es decir, de 2 m de largo por 1 m de ancho.

d. En el plano, en la vista del frente de la casa, la altura de la planta baja es de 280 cm.



Fijate bien

Los planos son representaciones a escala de los lugares o espacios. Las medidas reales y las representadas en el plano son directamente proporcionales.



6. Tomá los datos de la actividad anterior antes de corregirlos y representá las medidas del plano (eje y) en función de las reales (eje x). ¿Cómo te das cuenta, desde el gráfico, cuáles son los valores equivocados? También podés representarlos sin la computadora.



Proporcionalidad inversa

- Una variable **y** es **inversamente proporcional** a otra variable **x**, cuando se relacionan a partir de la fórmula $y = \frac{k}{x}$, siendo **k** un número real constante. En este caso, **x** y **k** no pueden ser cero.

El número **k** es la **constante de proporcionalidad** inversa.

- Si se desconoce la fórmula que define la relación, pero se tienen dos valores que se relacionan (uno de cada variable), entonces la constante de proporcionalidad es el producto entre el valor de **x** y el de **y**.

- Al representar una relación de proporcionalidad inversa, los puntos quedan sobre una curva denominada **hipérbola**. Por ejemplo, la duración (**t**) de un viaje en avión es inversamente proporcional a la velocidad promedio del vuelo (**v**). Para llegar a Miami desde Buenos Aires con un Cessna 172P, viajando a 200 km/h, se tardaría alrededor de 35,48 horas (casi 35 horas y media), mientras que con un Airbus A320, que viaja a 800 km/h se tardaría 8,87 h (casi 9 horas) y con un Airbus A380, a 945 km/h, la duración del vuelo sería de 7,51 h (poco más de 7 horas y media).

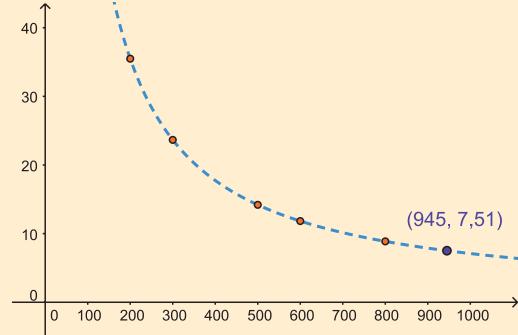
En ese caso, la fórmula que define la relación es $t = \frac{d}{v}$.

La constante de proporcionalidad es la distancia Buenos Aires-Miami, y puede calcularse a partir de las coordenadas de uno de los puntos del gráfico.

Con las coordenadas que se observan en el gráfico (que coinciden con los datos del Airbus A380) se calcula esa distancia:

$$d = 945 \text{ km/h} \cdot 7,51 \text{ h}$$

$$d = 7.097 \text{ km} \text{ (aproximadamente)}$$



7. En la fábrica de Pepe, 3 máquinas iguales producen 1.800 latas de conservas en 6 horas. ¿Cuántas latas de conservas producirán 5 de estas máquinas en el mismo tiempo?

8. Un caño que vierte 25 litros por minuto (L/min) llena un tanque en 2 horas y 20 minutos. ¿Cuánto tardará en llenar el tanque otro caño que vierte 20 L/min?

9. Dos ruedas están unidas por una correa transmisora. La primera tiene un radio de 25 cm y la segunda de 75 cm. Cuando la primera ha dado 300 vueltas, ¿cuántas vueltas habrá dado la segunda?

10. Representá las relaciones que se observan en cada tabla. Determiná si cada una corresponde a una proporcionalidad; en tal caso, indicá si es directa o inversa y hallá la constante de proporcionalidad.

a.

x	2	3	4	5	6
y	3	4,5	6	7,5	9

d.

x	3	4	5	6	7
y	2,5	3	3,5	4	4,5

b.

x	1	2	2,5	3	4
y	1	4	6,25	9	16

e.

x	2	4	5	6	8
y	10	5	4	3,3	2,5

c.

x	2	3	5	6	8
y	3	2	1,2	1	0,75

f.

x	3	4	5	6	7
y	1,5	2	2,5	3	3,5

11.  **Estrategia: analizar y comparar** Mirá las relaciones de proporcionalidad de la actividad anterior. ¿Cómo podrías llenar la tabla para que sea de proporcionalidad directa? ¿Y la de proporcionalidad inversa?

Directa

x	1	2	3	4	5	6
y			12			

Inversa

x	1	2	3	4	5	6
y			12			

Proporcionalidad de segmentos. Teorema de Thales



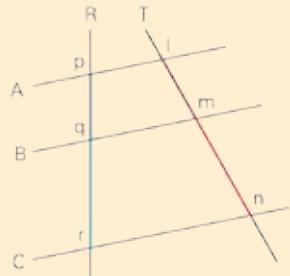
Segmentos proporcionales

- La proporcionalidad de segmentos se establece a partir de la proporcionalidad de sus medidas. Es decir, se dice que cuatro **segmentos** son **proporcionales** si sus medidas forman una proporción.

Teorema de Thales

- Pueden observarse segmentos proporcionales al cortar tres o más rectas paralelas por dos transversales.

Al respecto, el **Teorema de Thales** establece que si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos transversales R y T, la razón entre las medidas de dos segmentos sobre R es igual a la razón entre las medidas de los segmentos correspondientes sobre T. En consecuencia, los segmentos determinados entre las paralelas son proporcionales.



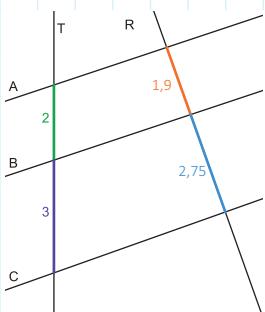
$A \parallel B \parallel C$ (A, B y C son paralelas). R y T son transversales.

$$\frac{\overline{pq}}{\overline{qr}} = \frac{\overline{lm}}{\overline{mn}}$$

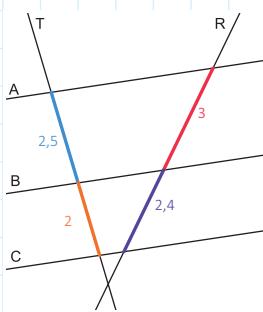
También vale con otros segmentos: $\frac{\overline{pr}}{\overline{qr}} = \frac{\overline{ln}}{\overline{mn}}$ y $\frac{\overline{pr}}{\overline{pq}} = \frac{\overline{ln}}{\overline{lm}}$.

12. ¿En qué caso podés asegurar que las rectas A, B y C son paralelas?

a.



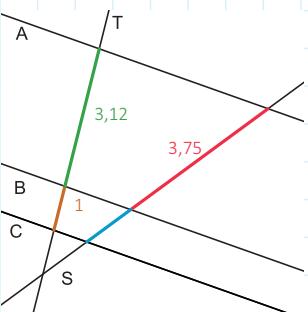
b.



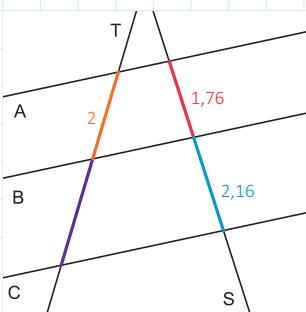
Si los segmentos no son proporcionales, las rectas no son paralelas.

13. Hallá la medida que falta, considerando que las rectas A, B y C son paralelas.

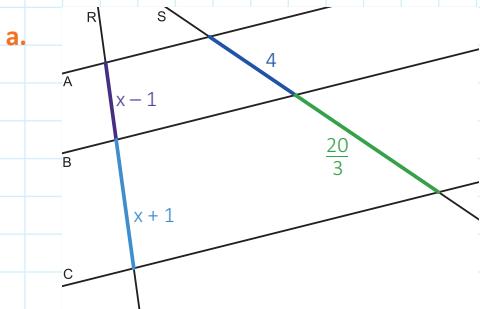
a.



b.

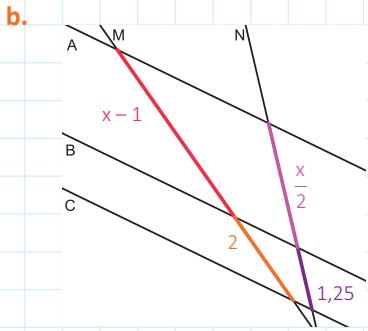


14. Calculá las medidas que faltan de los segmentos, considerando que las rectas A, B y C son paralelas.

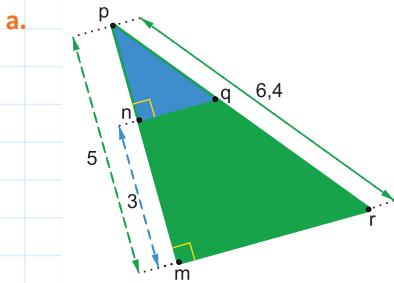


! Fijate bien

Después de hallar el valor de x , tenés que calcular la medida de los segmentos.

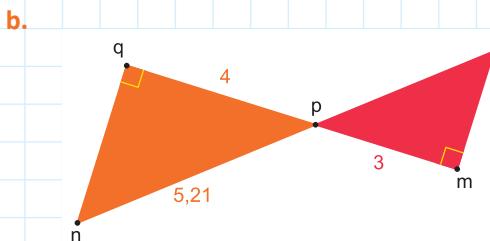


15. Estrategia: trazar una recta paralela por p. ¿Cuánto miden los lados que faltan de cada triángulo? Considerá que los lados nq y mr son paralelos. Aproximá los resultados a los centésimos.



! Fijate bien

Recordá que, en los triángulos rectángulos, cuando se tienen dos lados, se puede calcular el tercero usando el teorema de Pitágoras.

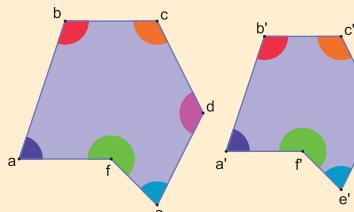


Figuras semejantes



Semejanza de polígonos

- Dos polígonos son **semejantes** si sus ángulos son congruentes y si los lados correspondientes son proporcionales, como se muestra en el ejemplo.

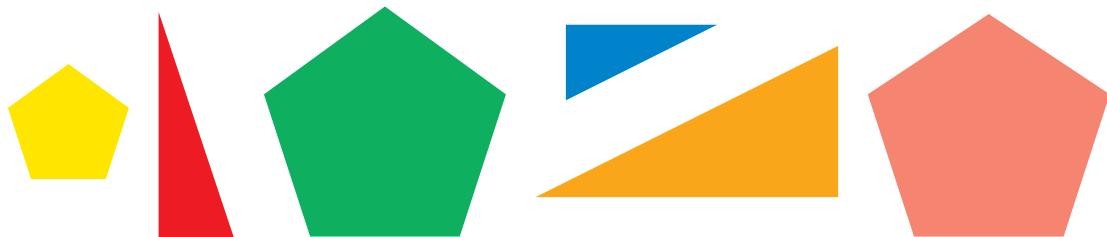


Los polígonos abcdef y a'b'c'd'e'f' son semejantes porque:

- $\frac{\overline{ab}}{\overline{a'b'}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{b'c'}} = \frac{\overline{cd}}{\overline{c'd'}} = \frac{\overline{de}}{\overline{d'e'}} = \frac{\overline{ef}}{\overline{e'f'}} = \frac{\overline{fa}}{\overline{f'a'}}$.
- $\hat{a} = \hat{a}'; \hat{b} = \hat{b}'; \hat{c} = \hat{c}'; \hat{d} = \hat{d}'; \hat{e} = \hat{e}'; \hat{f} = \hat{f}'$.

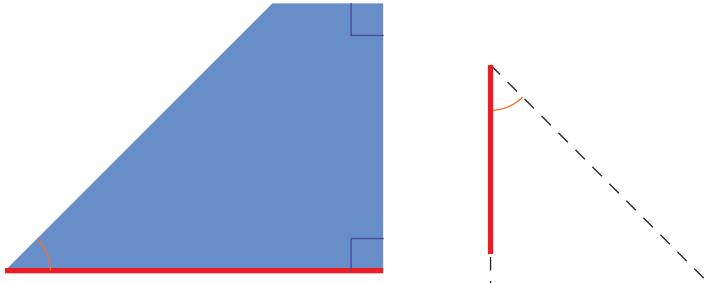
Y el cociente entre dos lados correspondientes es la **razón de semejanza**.

16. Tomá las medidas que creas necesarias y encontrá las figuras semejantes.



17. Completá las figuras para que resulten semejantes. ¿Cuál es, en cada caso, la razón de semejanza?

- a. Se trazaron un lado y un ángulo.



- b. Todos los lados miden lo mismo, y ya se trazó un lado.

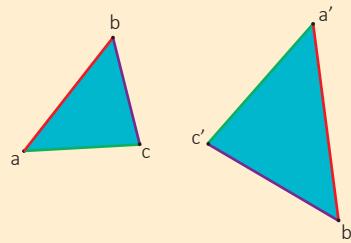




Triángulos semejantes

- En el caso particular de los triángulos, hay algunos **criterios** que permiten establecer la semejanza sin tener que medir todos los lados y todos los ángulos.

LLL: Lado- Lado- Lado →



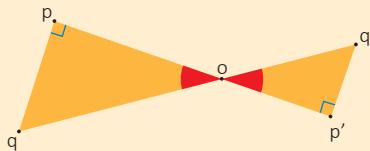
Si dos triángulos tienen sus lados proporcionales, entonces son semejantes.

Los triángulos abc y a'b'c' son semejantes porque:

$$\bullet \frac{\overline{ab}}{a'b'} = \frac{\overline{bc}}{b'c'} = \frac{\overline{ca}}{c'a'}$$

AA: Ángulo- Ángulo →

Si dos ángulos de un triángulo son iguales a dos ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.

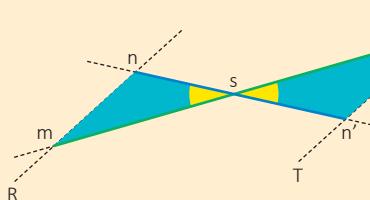


Los triángulos pqr y p'q'r' son semejantes porque:

- $\widehat{qpo} = \widehat{q'p'o}$ (o sea, $\hat{p} = \hat{p}'$ porque los dos son rectos).
- $\widehat{poq} = \widehat{p'q'o}$ (son opuestos por el vértice).

LAL: Lado- Ángulo- Lado →

Si dos triángulos tienen dos de sus lados correspondientes proporcionales y en los dos triángulos el ángulo comprendido entre ellos mide lo mismo, entonces son semejantes.



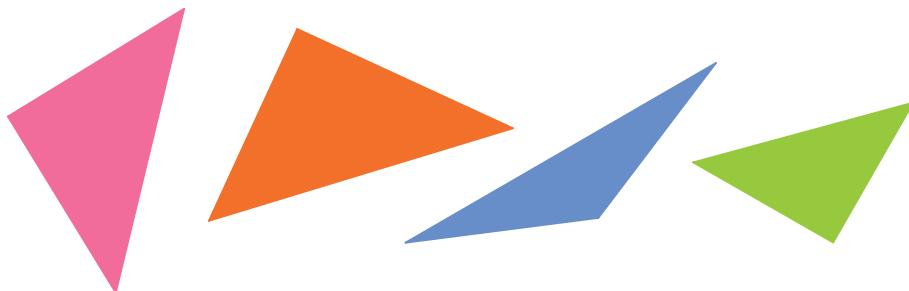
Los triángulos mns y m'n's' son semejantes porque:

- $\frac{\overline{ms}}{\overline{m's}} = \frac{\overline{ns}}{\overline{n's}}$ (por el teorema de Thales, considerando $R // T$).
- $\widehat{nsm} = \widehat{n'sm'}$ (son opuestos por el vértice).

18. A simple vista, señalá cuál de estos triángulos seguro no es semejante al resto y explicá por qué lo descartás tan rápido. Después, de los tres que quedan, solo dos son realmente semejantes. Tomá las medidas que creas necesarias y determiná cuáles. ¿Qué criterio de semejanza usaste?

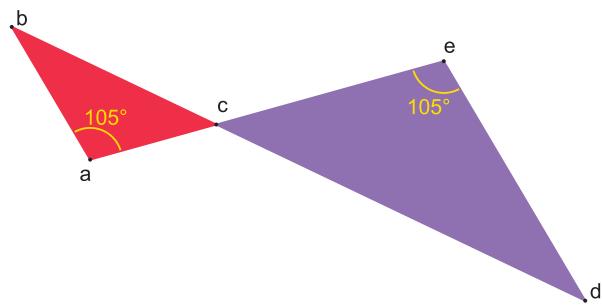


Las figuras semejantes tienen la misma forma.

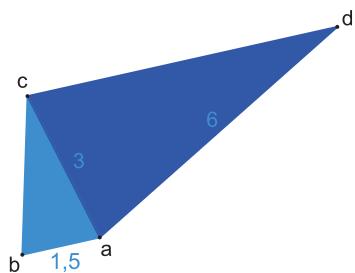


19. Los triángulos presentados son semejantes. Explicá por qué usando el criterio que te convenga en cada caso.

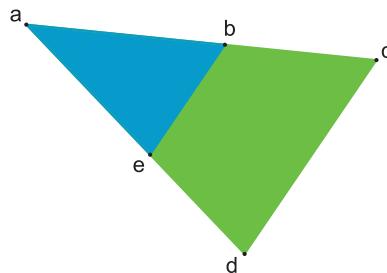
a.



b. Los triángulos son isósceles.



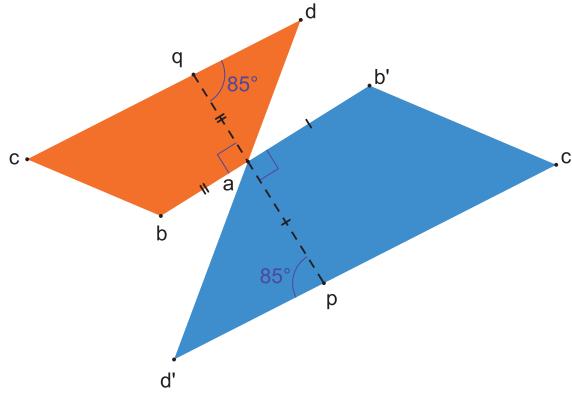
c. Los lados eb (del triángulo abe) y dc (del triángulo acd) son paralelos.



20. Para un trabajo de la escuela, Mariana tiene que dibujar un barrio. Hizo casitas con un cuadrado como base y un triángulo isósceles como techo. Cuando las terminó, dijo que todas las casitas son semejantes, pero Claudio encontró una que no lo es. ¿Cuál? ¿Cómo lo sabés a simple vista? ¿Qué más podés decir de los otros triángulos?



- 21.**  **Estrategia: descomponer en figuras más simples** Los polígonos $abcd$ y $ab'c'd'$ son semejantes. Explicá por qué, sin medir todos los lados y todos los ángulos. Como ayuda, se indican algunas medidas y se señalan algunos segmentos congruentes. Podés seguir descomponiendo la figura y tomar solo dos medidas más.



 **Fijate bien**

Si descomponés la figura en triángulos, en cada uno podés usar los criterios para ver si las figuras son semejantes.

- 22.** Analizá cada una de las afirmaciones y explicá la validez o no de cada una.

- Todos los triángulos equiláteros son semejantes.
- Todos los triángulos isósceles son semejantes.
- Todos los triángulos rectángulos son semejantes.
- Todos los triángulos rectángulos que son isósceles son semejantes.
- Todos los cuadrados son semejantes.
- Todos los rectángulos son semejantes.
- Todos los pentágonos regulares son semejantes.

 **Fijate bien**

Para mostrar que una afirmación es falsa, alcanza con mostrar un “contraejemplo” (un ejemplo de algo que no la cumpla).

 **Tengo tarea**

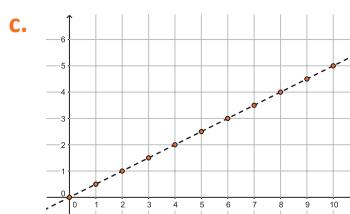
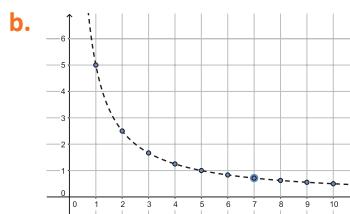
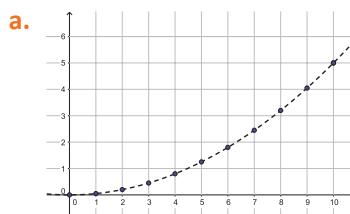
- 23.** Dibujá un triángulo rectángulo con un cateto de 12 cm y el otro de 16 cm.
- ¿Cuánto mide la hipotenusa?
 - Dibujá un triángulo semejante al anterior con un cateto de 4 cm. ¿Cuánto pueden medir los otros lados? ¿Hay una sola posibilidad?

- 24.** Los números que forman una proporción pueden mencionarse ordenados. Por ejemplo: 1; 2; 4; 8 forman una proporción porque $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$.

Señalá cuáles de estas cuaternas ordenadas forman una proporción.

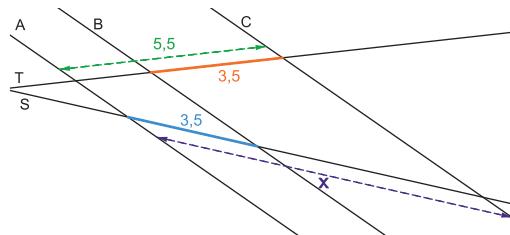
- a. 3; 2; 5; 4.
 - c. 2,5; 7; 5; 14.
 - b. 3; 2; 6; 4.
 - d. 1; 2; 2; 1.
- 25.** Indicá cuáles de estas situaciones corresponden a una proporcionalidad directa o inversa y, en ese caso, resolvela.

- a. Marcela recibe diariamente \$ 125 por semana para comprar galletitas en los recreos. Esta semana solo asistirá a clases tres de los cinco días. ¿Cuánto dinero debería recibir?
 - b. Nico tiene seis meses y ya le salieron cuatro dientes. ¿Cuántos tendrá al año y medio?
 - c. Tres máquinas de igual rendimiento terminan un trabajo en un día completo de labor. ¿Cuánto se tardaría en hacer el mismo trabajo si solo se emplearan dos máquinas como esas?
- 26.** Señalá cuáles de estos gráficos corresponden a una proporcionalidad directa o inversa y, en ese caso, encontrá la constante de proporcionalidad.

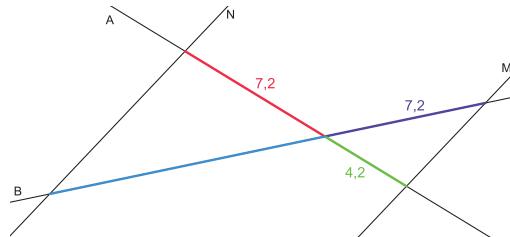


- 27.** Calculá el valor del segmento señalado.

- a. Las rectas A, B y C son paralelas.



- b. Las rectas M y N son paralelas.

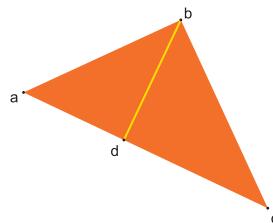


- 28.** Cuatro segmentos forman una proporción. Indicá cuáles de estas afirmaciones acerca de ellos no son ciertas.

- a. Si el primero es el doble del segundo, entonces el tercero es el doble del cuarto.
- b. Si el primero es dos unidades menos que el segundo, entonces el tercero también es dos unidades menos que el cuarto.
- c. Si el primero es la tercera parte del segundo, entonces el tercero también es la tercera parte del cuarto.

- 29.** El triángulo **abc** es rectángulo e isósceles con **ab** y **bc** de 5 cm. Dibujá otro semejante a él, si la razón de semejanza es 1,5. Indicá la medida de todos sus lados.

- 30.** El triángulo **abc** es rectángulo en **b** y el segmento **bd** es su altura. Usá los criterios de semejanza para explicar por qué **abc**, **abd** y **bcd** son semejantes.



Razones trigonométricas



Distinguiendo catetos

- Uno de los lados de un triángulo rectángulo se distingue fácilmente de los otros dos: el lado mayor o la **hipotenusa**, es decir, el lado opuesto al ángulo recto. Los otros dos son los catetos.



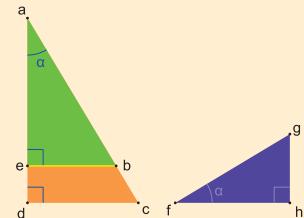
Para diferenciar un cateto del otro, se marca un ángulo de referencia (que no sea el recto). Al cateto que está sobre uno de los lados de ese ángulo se lo llama **adyacente**, y al otro, **opuesto**.

Razones trigonométricas

- Todos los triángulos rectángulos que además tienen un ángulo agudo α en común (o de igual medida), como los de la figura, son semejantes y, en consecuencia, sus lados son proporcionales.

Por ejemplo, si se considera ese ángulo α , la razón entre el cateto opuesto a α y la hipotenusa en uno de los triángulos es igual a la razón entre el cateto opuesto a α y la hipotenusa en otro.

$$\frac{\overline{eb}}{\overline{ba}} = \frac{\overline{dc}}{\overline{ca}} = \frac{\overline{hg}}{\overline{gf}}$$



Esa razón no varía al cambiar las medidas de los lados, mientras que el ángulo siga siendo el mismo. Por eso, las razones entre los lados de los triángulos rectángulos, denominadas **razones trigonométricas**, se mencionan en función de sus ángulos agudos.

Seno del ángulo $\rightarrow \sin \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto a } \alpha}{\text{Hipotenusa}}$

Cosecante del ángulo $\rightarrow \csc \alpha = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto a } \alpha}$

Coseno del ángulo $\rightarrow \cos \alpha = \frac{\text{Cateto adyacente a } \alpha}{\text{Hipotenusa}}$

Secante del ángulo $\rightarrow \sec \alpha = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente a } \alpha}$

Tangente del ángulo $\rightarrow \tan \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto a } \alpha}{\text{Cateto adyacente a } \alpha}$

Cotangente del ángulo $\rightarrow \cot \alpha = \frac{\text{Cateto adyacente a } \alpha}{\text{Cateto opuesto a } \alpha}$

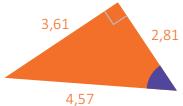
↓
Razones trigonométricas fundamentales.

↓
Recíprocas de las fundamentales.

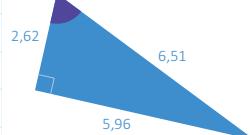
- Debe tenerse en cuenta que las razones trigonométricas no tienen unidad de medida, sin importar cuál sea la unidad de longitud empleada para medir los lados.

31. Hallá las razones trigonométricas del ángulo agudo señalado en cada triángulo rectángulo.

a.



b.





Trigonometría con la calculadora

Las calculadoras científicas permiten hallar las razones trigonométricas de un ángulo.

Si los ángulos se miden en grados sexagesimales, como en nuestro caso, la calculadora tiene que estar en modo DEG (en el visor se puede observar una D pequeña).

Las teclas para hallar el seno, el coseno y la tangente son **sin**, **cos** y **tan**.

- Por ejemplo, para calcular $\operatorname{tg} 48^\circ 20'12''$ se presionan: **tan** **4** **8** **0''** **2** **0** **0''** **1** **2** **0''** **=** (en el visor se observa **tan 48°20'12''**, pero la calculadora los reconoce como grados, minutos y segundos).

El número que se lee al apretar el igual es la tangente de $48^\circ 20'12''$: 1,123822556 (aproximadamente).

- También puede ocurrir que se sepa el valor de una de las razones trigonométricas de un ángulo, pero se desconozca la medida de ese ángulo. Esto también puede averiguarlo con la calculadora. Por ejemplo, si se sabe que $\cos \alpha = 0,5$, para saber la medida de α se puede hacer así: **shift** **cos** **0** **.** **5** **=** **0''**. Entonces $\alpha = 60^\circ$.



32. Encontrá las siguientes razones trigonométricas.

a. $\cos 25^\circ =$

d. $\cos 75^\circ =$

g. $\operatorname{sen} 48^\circ 23' 45'' =$

b. $\operatorname{sen} 25^\circ =$

e. $\operatorname{sen} 75^\circ =$

h. $\operatorname{sen} 48^\circ 45'' =$

c. $\operatorname{tg} 25^\circ =$

f. $\operatorname{tg} 75^\circ =$

i. $\operatorname{tg} 45^\circ =$



33. Encontrá la medida del ángulo en cada caso.

a. $\cos \alpha = 0,707$

d. $\cos \alpha = 0,25$

g. $\cos \alpha = 0,5$

$\alpha =$

$\alpha =$

$\alpha =$

b. $\operatorname{sen} \alpha = 0,707$

e. $\operatorname{sen} \alpha = 0,5$

h. $\operatorname{sen} \alpha = 0,99$

$\alpha =$

$\alpha =$

$\alpha =$

c. $\operatorname{tg} \alpha = 0,707$

f. $\operatorname{tg} \alpha = 0,42$

i. $\operatorname{tg} \alpha = 2$

$\alpha =$

$\alpha =$

$\alpha =$



34. Investigá con tu calculadora y después respondé.

a. ¿Entre qué valores varía el seno de un ángulo agudo? ¿Y el coseno?

b. ¿Pasa lo mismo con la tangente de un ángulo agudo?

c. ¿Qué relación hay entre el seno de un ángulo y el coseno de su complementario? Intentá explicarlo a partir del triángulo rectángulo.

Resolución de triángulos rectángulos

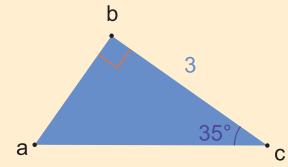


Calculando las medidas que faltan

La trigonometría se usa para resolver triángulos rectángulos, es decir, para calcular las medidas de los lados y los ángulos que se desconocen. Para hacerlo, se necesitan dos datos, además del ángulo recto, donde al menos uno debe ser la medida de un lado.

• Si se conocen un lado y un ángulo agudo...

Para calcular el ángulo que falta, alcanza con recordar que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180° . Como uno es recto, los otros dos deben sumar 90° . Luego, en el triángulo abc, si $\hat{c} = 35^\circ$, entonces $\hat{a} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.



Para calcular los lados, se emplean las razones trigonométricas considerando, en este caso, que el lado conocido, \overline{bc} , es el cateto adyacente al ángulo dado.

Para calcular el otro cateto, es decir, el opuesto, se usa la tangente porque es la razón que relaciona ambos catetos. $\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$, de donde se deduce que: $\overline{ab} = 3 \cdot \operatorname{tg} 35^\circ = 2,10$ (aproximado a los centésimos).

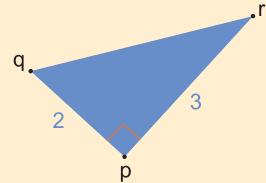
De manera similar puede calcularse la hipotenusa, \overline{ac} , aunque ahora se usará el coseno porque relaciona al adyacente (el cateto conocido) con la hipotenusa.

$\cos 35^\circ = \frac{\overline{bc}}{\overline{ac}}$, de donde se deduce que: $\overline{ac} = \frac{3}{\cos 35^\circ} = 3,66$ (aproximado a los centésimos).

• Si se conocen dos lados...

El tercer lado se calcula a partir del teorema de Pitágoras. En el triángulo pqr se desconoce la hipotenusa, que es \overline{qr} .

Entonces: $\overline{qr} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ (aprox. 3,61).



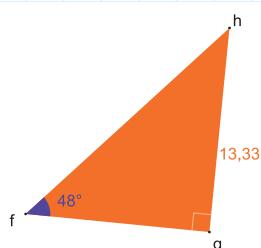
Para calcular la medida de cada ángulo, se usan las razones trigonométricas.

Por ejemplo, para calcular la medida de \hat{q} , hay que considerar que el cateto opuesto a \hat{q} es \overline{pr} , y el adyacente, \overline{qp} . Entonces $\operatorname{tg} \hat{q} = \frac{3}{2}$, con lo que $\hat{q} = 56^\circ 18' 36''$ (redondeando los segundos al entero).

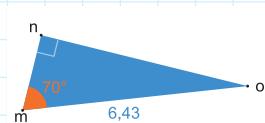
Para hallar la medida de \hat{r} , se procede en forma similar, pero teniendo en cuenta que ahora el cateto opuesto a \hat{r} es \overline{qp} , y el adyacente, \overline{pr} . Entonces $\operatorname{tg} \hat{r} = \frac{2}{3}$, y en consecuencia, $\hat{r} = 33^\circ 41' 24''$ (aproximadamente).

35. Encontrá las medidas del ángulo y los lados que faltan en cada triángulo.

a.



b.

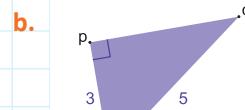
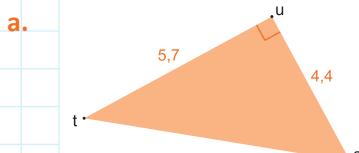


Fijate bien

Para ver si calculaste bien la medida de los lados, podés usar el teorema de Pitágoras.

Tené en cuenta que, al aproximar, podés tener alguna diferencia en los decimales.

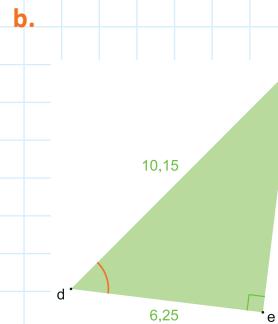
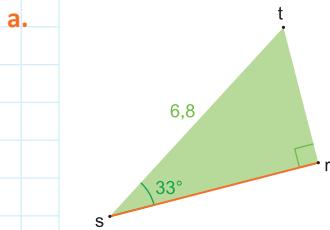
36. Encontrá las medidas del lado y los ángulos que faltan en cada triángulo.



! Fijate bien

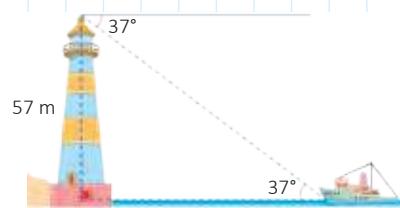
Para ver si calculaste bien la medida de los ángulos, podés ver si suman 180° .

37. Estrategia: buscar el camino más corto Encontrá la medida del lado o del ángulo señalado con anaranjado. Solo podés usar los datos que se dan y hacerlo en la menor cantidad de pasos posibles.

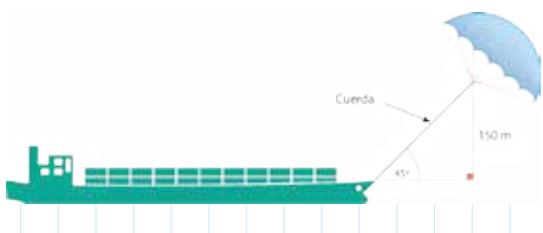


38. Resolvé.

- a. Desde lo alto de un faro a 57 m de altura y con ayuda de un instrumento artesanal (goniómetro), Andrés divisa un barco con un ángulo de depresión de 37° . ¿A qué distancia de la base de la torre está el barco?



- b. El 95% del comercio mundial se realiza por mar gracias a unos 50.000 buques. La mayoría de estos barcos utilizan motores diésel. Los ingenieros proponen utilizar la energía eólica para reducir el consumo de combustible, enganchando velas-cometas a los barcos. ¿Qué longitud debe tener la cuerda de la vela-cometa para tirar del barco que se muestra en el dibujo?



39.  **Estrategia: hacer un dibujo de análisis** Resolvé cada una de estas situaciones. Aproximá los resultados a los centésimos.

a. ¿Cuánto miden los lados congruentes de un triángulo isósceles si su base es de 2 cm y el ángulo que forman entre ellos es de 30° ?

b. ¿Cuánto miden los ángulos que forman las diagonales de un rectángulo si sus lados miden 3 cm y 4 cm?

c. Si los rayos del Sol forman un ángulo de 65° con el suelo y en ese momento la sombra de un arbusto es de 86 cm, ¿cuál es la altura del arbusto?

d. El aro de una canasta de básquet está a 3,3 m del piso, y los ojos del jugador están a 1,86 m del piso. Si el jugador se encuentra en la línea del tiro libre a 5 m del centro del aro de la canasta, ¿cuál es el ángulo de elevación de los ojos del jugador hacia el aro?

40.  **Hacé de profe** Nico y Sol calcularon la altura de un triángulo equilátero de 5 cm de lado de dos maneras diferentes. Analizá lo que dicen. ¿Pueden ser correctos ambos procedimientos? ¿Llegan al mismo resultado?

Yo usé razones trigonométricas.
¿Y vos qué hiciste?



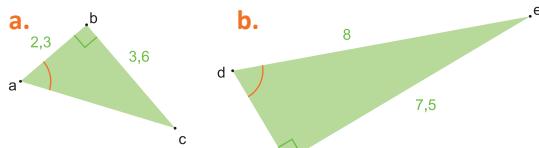
Nico

Me parece que no hacía falta,
porque yo lo resolví usando
el teorema de Pitágoras.



Sol

- 41.** Usá el teorema de Pitágoras para calcular la medida del lado que falta. Después calculá las razones trigonométricas de los ángulos agudos señalados.



- 42.** Calculá.

a. $\operatorname{sen} 73^\circ 10' =$

b. $\cos 73^\circ 10' =$

c. $\cos 73^\circ 10'' =$

d. $\cos 73' 10'' =$

e. $\operatorname{tg} 73^\circ 10' =$

- 43.** **Estrategia: analizar y comparar** Mirá los valores obtenidos en los ítems a, b y e.

- a. La razón entre dos de ellos es igual al tercer valor. ¿Cuál es esa razón?
- b. ¿Pasará lo mismo con otros ángulos? Usá la calculadora para ver qué ocurre.

- 44.** Hallá los ángulos.

a. $\operatorname{sen} \alpha = 0,97437$, entonces $\alpha = \dots$

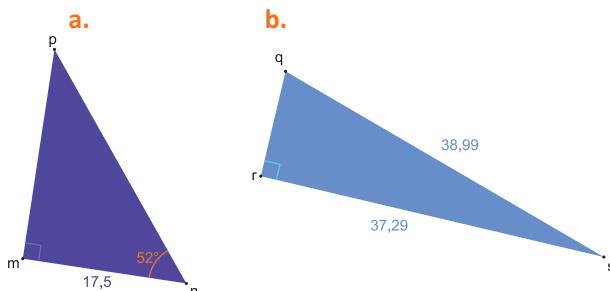
b. $\cos \alpha = 0,97437$, entonces $\alpha = \dots$

c. $\operatorname{tg} \alpha = 0,97437$, entonces $\alpha = \dots$

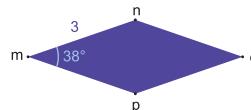
d. $\operatorname{sen} \alpha = 0,3173$, entonces $\alpha = \dots$

e. $\operatorname{tg} \alpha = 1,73205$, entonces $\alpha = \dots$

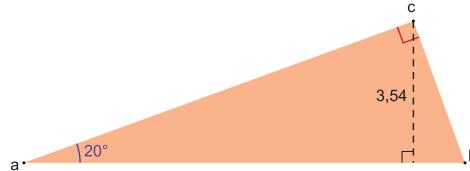
- 45.** Resolvé estos triángulos rectángulos.



- 46.** ¿Cuánto miden las diagonales del rombo?



- 47.** Hallá la medida de los lados del triángulo abc.



- 48.** ¿Cuánto miden los lados de un cuadrado si las diagonales miden 12,5 cm?

- 49.** **Estrategia: analizar y comparar** Para realizar la actividad anterior, pueden emplearse al menos dos procedimientos diferentes sin realizar mediciones.

- a. Compará tu resolución con la de tus compañeros. ¿Todos lo hicieron igual?

- b. Enuncien los procedimientos empleados y, si encontraron solo uno, busquen otro.

- 50.** ¿Cuánto miden los lados de un rectángulo si las diagonales miden 5 cm y cada una forma con uno de los lados un ángulo de 28° ? Hacé un gráfico de análisis.

- 51.** Una escalera de 3 m se apoya en una pared formando con el piso un ángulo de 77° . ¿Qué altura alcanza sobre la pared? Hacé un gráfico de análisis.



- 52.** Indicá cuáles de estas cuaternas ordenadas forman una proporción.

- a. 3; 5; 9; 15. d. 48; 20; 36; 15.
 b. 6; 4; 3; 2. e. 2,5; 4; 4; 2,5.
 c. 50; 32; 15; 9. f. 1,5; 5; 0,3; 1.

- 53.** Completá para formar una proporción.

a. $\frac{\dots}{36} = \frac{7}{12}$	d. $\frac{1,5}{20} = \frac{\dots}{30}$
b. $\frac{18}{25} = \frac{27}{\dots}$	e. $\frac{2,2}{11} = \frac{1,2}{\dots}$
c. $\frac{12}{\dots} = \frac{32}{54}$	f. $\frac{1}{\dots} = \frac{\dots}{100}$

- 54.** Identificá si cada una de estas tablas corresponde a una proporcionalidad directa o inversa y completala.

a.

x	1	5			20
y	2,5	12,5	17,5	30	

b.

x	1	4	8		40
y	20	5		2	

c.

x	1	5	15	20	
y		12		3	1,5

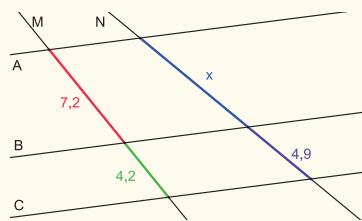
d.

x	1	6	8		25
y		3		5,5	12,5

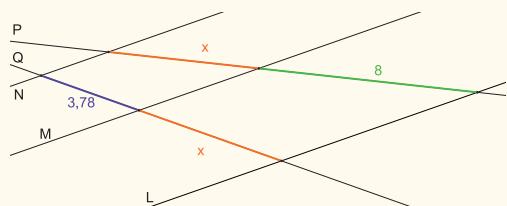
- 55.** Cami decide juntar dinero para sus vacaciones. Cada mes guardará la misma cantidad. ¿Los meses transcurridos y la cantidad de dinero acumulado guardan una relación de proporcionalidad? En tal caso, señalá si es directa o inversa.

- 56.** Hallá la medida de los segmentos coloreados que faltan. Aproximá los resultados a los décimos.

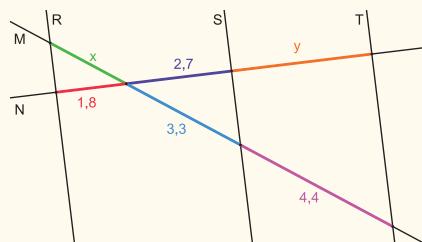
- a. A, B y C son paralelas.



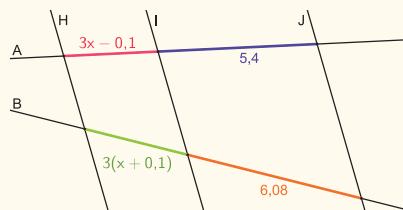
- b. L, M y N son paralelas.



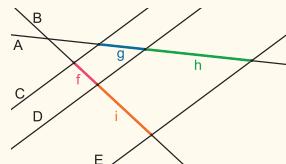
- c. R, S y T son paralelas.



- d. H, I y J son paralelas.



- 57.** Los cuatro segmentos de la imagen son proporcionales. Analizá cuáles de estas afirmaciones son verdaderas.



- a. Las rectas C, D y E son paralelas.

b. $\frac{f}{g} = \frac{i}{h}$.

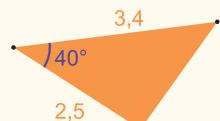
c. $\frac{f}{h} = \frac{g}{i}$.



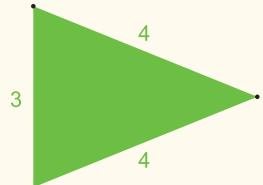
Repaso todo

- 58.** Dibujá un triángulo semejante al representado en cada caso, de manera que una razón de semejanza sea la indicada.

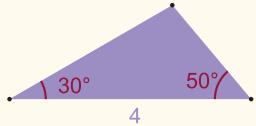
a. Razón: 3.



b. Razón: 0,5.

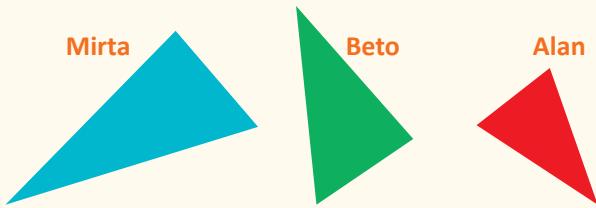


c. Razón: 1,5.



- 59.** **Hacé de profe** Tres compañeros de clase debieron realizar cada uno un triángulo semejante al representado.

Tomá las medidas que necesites e indicá quiénes lo hicieron correctamente.

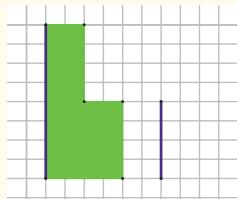


- 60.** Analizá estas afirmaciones. Explicá las verdaderas y mostrá un contraejemplo para las falsas.

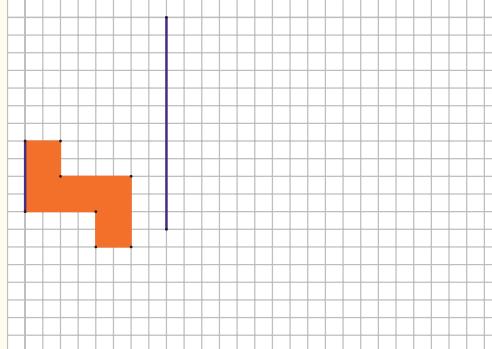
- Dos triángulos rectángulos son semejantes si un ángulo agudo de uno de ellos mide lo mismo que un ángulo agudo del otro.
- Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene la misma medida que la hipotenusa de otro triángulo rectángulo, entonces son semejantes.
- Si los catetos de un triángulo rectángulo son proporcionales a los catetos de otro triángulo rectángulo, entonces son semejantes.

- 61.** Completá las figuras para que resulten polígonos semejantes. Guiate con el cuadriculado de fondo.

a.



b.



- 62.** ¿Verdad o mentira? ¿Por qué?

- Si dos polígonos son semejantes, entonces al descomponerlos en triángulos, los triángulos que forman uno de los polígonos son semejantes a los que forman el otro polígono.
- Si la razón de semejanza entre dos polígonos es 3, entonces los lados de uno de ellos miden el triple que los lados del otro.
- Si la razón de semejanza entre dos polígonos es 3, entonces los ángulos de uno de ellos miden el triple que los lados del otro.
- Si una razón de semejanza entre dos polígonos es 4, entonces otra razón de semejanza entre los mismos polígonos es $\frac{1}{4}$.

- 63.** Hallá las razones trigonométricas del ángulo α .





64. Calculá.

- | | |
|-----------------------------|------------------------|
| a. $\sin 15^\circ 30'$ | d. $\sin 85^\circ 40'$ |
| b. $\cos 20^\circ 20' 20''$ | e. $\cos 79^\circ 42'$ |
| c. $\tg 40^\circ 40'$ | f. $\sen 82^\circ 12'$ |

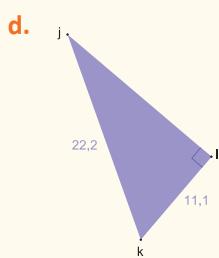
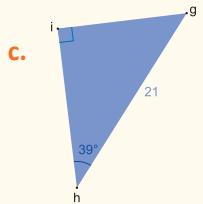
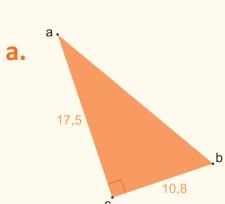
65. **Estrategia: analizar y comparar** Mirá los valores obtenidos en la actividad anterior. ¿Cuáles de estas afirmaciones son ciertas? Para las falsas, escribí qué sería lo correcto.

- a. El seno de un ángulo agudo aumenta de 0 a 1, a medida que los ángulos crecen.
- b. El coseno de un ángulo agudo aumenta de 0 a 1, a medida que los ángulos crecen.
- c. La tangente de un ángulo agudo aumenta de 0 a 1, a medida que los ángulos crecen.

66. Hallá los ángulos.

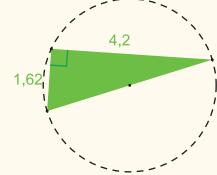
- | | |
|------------------------------|-----------------------------|
| a. $\sen \alpha = 0,8660254$ | d. $\sen \alpha = 0,98481$ |
| b. $\cos \alpha = 0,898794$ | e. $\cos \alpha = 0,422618$ |
| c. $\tg \alpha = 0,57735$ | f. $\tg \alpha = 5,67128$ |

67. Resolvé estos triángulos rectángulos.



68. El triángulo inscripto en la circunferencia es rectángulo y su hipotenusa es un diámetro.

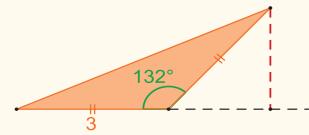
Calculá la medida del diámetro y el ángulo que forma con el mayor de los catetos.



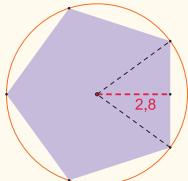
69. Pedro está parado al borde de una rampa y se le escapa la pelota que sostenía con un pie. La rampa tiene una altura de 2,5 m. Al caer, la pelota recorre sobre la rampa unos 12 m.

- a. ¿Qué ángulo forma la rampa con el piso?
- b. ¿Cuánto mide la base de la rampa?

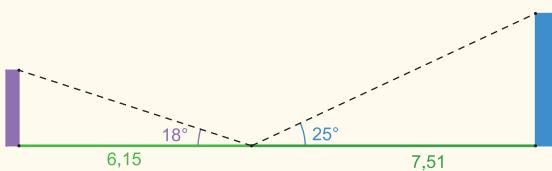
70. Calculá la altura del triángulo representado. Considerá que los lados señalados son congruentes.



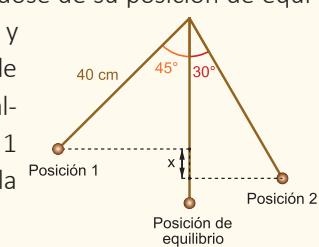
71. Calculá el perímetro y el área de este polígono regular.



72. Dos monumentos están separados por un gran parque. Un observador se acomoda en un lugar entre ambos y, gracias a algunos instrumentos de medición, logra realizar el siguiente esquema de su posición. ¿Cuál es la diferencia de alturas entre los monumentos?



73. Un péndulo que cuelga de un hilo de 40 cm de longitud oscila apartándose de su posición de equilibrio. Mirá la imagen y calculá la diferencia de alturas entre la que alcanza en la posición 1 y la que alcanza en la posición 2.



Saquen una hoja



Marcá la opción correcta.

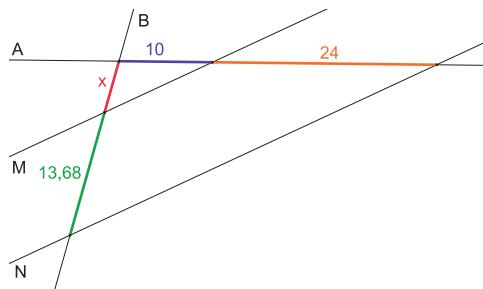
1. En la proporción $\frac{18}{a} = \frac{b}{50}$, ¿qué valores no pueden tomar a y b ?

- a = b = 30.
- a = 30 y b = 60.
- a = 45 y b = 20.
- a = 15 y b = 60.

2. ¿Cuál de estas afirmaciones es correcta?

- En todas las relaciones proporcionales, al aumentar una de las variables, aumenta la otra.
- En todas las relaciones proporcionales, al aumentar una de las variables, disminuye la otra.
- En las relaciones de proporcionalidad directa, el producto de dos cantidades que se corresponden es constante.
- En las relaciones de proporcionalidad inversa, el producto de dos cantidades que se corresponden es constante.

3. ¿Cuánto mide el segmento señalado (redondeado a los décimos)?

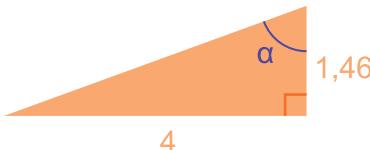


- 5,7
- 17,5
- 32,8
- 3,3

4. ¿En qué caso los datos que se dan no alcanzan para asegurar que las figuras son semejantes?

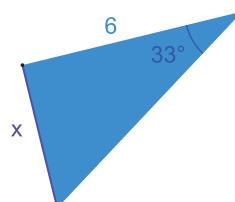
- Los dos polígonos son cuadrados.
- Los dos son triángulos rectángulos isósceles.
- Los dos triángulos tienen dos ángulos de 30° .
- Los dos polígonos son hexágonos.

5. ¿Cuánto mide aproximadamente el ángulo α ?



- 70°
- 20°
- 21°
- 68°

6. ¿Cuánto mide el lado señalado (redondeado a los centésimos)?



- 3,27
- 9,24
- 3,90
- 5,03

Esto ya lo sabía...

1. ¿Cómo se calcula el promedio entre estos valores?

5 7 8 4 9

a. $\frac{5+7+8+4+9}{2}$

b. $\frac{5+7+8+4+9}{10}$

c. $\frac{5+7+8+4+9}{5}$

d. $\frac{4+5+7+8+9}{4}$

2. Si el 30% de los alumnos de un curso son varones y en total hay 30 alumnos, ¿cuántos varones hay?

3. De 400 alfajores que se vendieron en el kiosco, solo 160 eran de fruta. Para la próxima compra en el mayorista, el kiosquero quiere comprar manteniendo esa relación. ¿Qué porcentaje del total de los vendidos eran de fruta?



La Estadística se ocupa de la recopilación, organización y análisis de datos a partir de los cuales se realizan inferencias y conclusiones que pueden colaborar en la toma de decisiones.

Por lo general, es usada por los gobernantes para conocer el estado de las cosas y, en función de ello, decidir acciones a seguir.

Y por eso recibe ese nombre, Estadística o *Statistik*, que fue usado por primera vez en Alemania en el siglo XVIII y proviene del italiano *statista* ("hombre de Estado"), que deriva del latín *status* ("estado o situación").

- Investigá acerca de la Estadística. ¿Cómo se llama, en Argentina, el organismo oficial nacional que se encarga de realizar estudios estadísticos? ¿Qué tipo de trabajos realiza? Mencioná algunos que te parezcan más relevantes.

Variables, tablas y gráficos estadísticos



Población y muestra. Tipos de variables

- En Estadística, todos los elementos que son objeto de estudio forman la **población**, aunque en ocasiones solo se trabaja con una parte de ella elegida al azar, es decir, con una **muestra**. Cada elemento de la población es un **individuo** (pueden ser personas, animales, cosas o situaciones).
- La característica o propiedad estudiada es la **variable**, que puede ser **cualitativa**, es decir, referida a una cualidad, o **cuantitativa**, si corresponde a una cantidad. A su vez, las variables cuantitativas pueden ser **discretas**, si toman valores aislados, como la cantidad de hermanos, el número de calzado, etc., o **continuas**, si pueden tomar cualquier valor intermedio, como el tiempo, la longitud o el peso, entre otros. Para poder trabajar con variables continuas, los valores se agrupan en **intervalos**. Por ejemplo, los pesos pueden agruparse cada 250 g, o cada 1 kg, etc., dependiendo de los valores que toma la variable analizada.

Tablas de frecuencias

- Cuando se quiere realizar un estudio estadístico, pueden organizarse encuestas. También pueden obtenerse los datos de registros o archivos confiables, o mediante la observación directa.
- Por lo general, los datos estadísticos se organizan de manera que su visualización permita un análisis adecuado. Una forma de organizarlos es a partir de una tabla como esta.

Dato	Frecuencia absoluta (f)	Frecuencia relativa (fr)	Frecuencia porcentual o porcentaje (f %)	Porcentaje acumulado (F %)
	Cantidad de veces que aparece cada dato.	Relación entre la frecuencia absoluta y la cantidad total de datos.	Porcentaje que corresponde a cada dato.	Suma de los porcentajes obtenidos.
		$fr = f : n$	$f \% = fr \cdot 100$	
Totales	Cantidad total de datos (n)			

La tabla puede tener otras columnas y también omitir alguna (por ejemplo, la última), según la comodidad del que realiza el análisis. Además, podría invertirse, colocándose los datos en la primera fila en vez de en la primera columna.

4. Se eligen al azar 8 alumnos de cada curso de una escuela y se realiza la siguiente encuesta.
- ¿Tenés celular?
 - ¿A qué edad tuviste tu primer celular?
 - ¿Con qué frecuencia utilizás el celular durante el día?
() Menos de tres horas. () De tres a seis horas. () De seis a nueve horas. () Más de nueve horas.
 - ¿Para qué utilizás más el celular?
() Para llamadas. () Para mensajes. () Para redes sociales. () Otros.
- a. ¿Cuál es la población que se está estudiando? ¿Se trabajó con una población o con una muestra?
- b. ¿A qué tipo de variable corresponde cada pregunta de la encuesta?

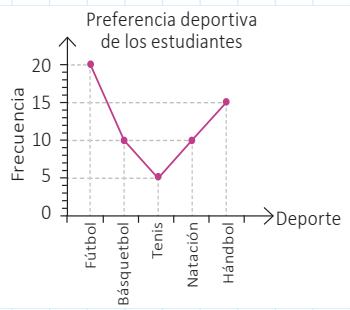
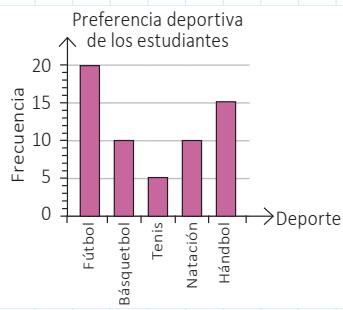
5. La tabla muestra los pesos, en kilogramos, de 40 personas inscriptas en un gimnasio.

Fastgym			Control de peso (kg)			Fecha: 15 de noviembre			
54,50	55,10	60,90	56,10	53,10	75,00	55,30	51,25	56,85	61,00
68,20	54,25	57,75	58,15	52,20	61,10	63,50	55,00	59,20	52,10
58,80	56,55	65,40	64,00	57,90	50,50	55,65	64,15	62,10	69,25
53,15	60,60	62,10	57,75	64,60	58,25	67,10	56,65	73,12	57,55

- a. Completá la tabla de frecuencias. Para hallar la frecuencia absoluta, contá la cantidad de personas que tengan pesos contenidos en cada intervalo.

Peso (en kg)	f	fr	f%	F%
[50; 55)				
[55; 60)				
[60; 65)				
[65; 70)				
[70; 75]				
Totales				

- b. ¿Qué intervalo de pesos es el más frecuente? ¿Qué porcentaje de las personas corresponde a ese intervalo?
- c. ¿Qué porcentaje de las personas tienen un peso inferior a 65 kg? ¿En qué columna de la tabla puede leerse directamente esa respuesta?
- d. **Estrategia: analizar y comparar** Observá los totales correspondientes a la frecuencia relativa y a la porcentual. ¿Cuánto dio cada una?
- e. Observá que esos totales no cambian, aunque la variable analizada sea otra. ¿Por qué?
6. Se realizó una encuesta sobre las preferencias de 60 socios de un club respecto de estas actividades deportivas: fútbol, básquetbol, tenis, natación y handbol. La información obtenida se presentó a partir de estos gráficos.



En este caso, ¿qué gráfico te parece más adecuado para presentar la información? ¿Por qué?



Gráficos estadísticos

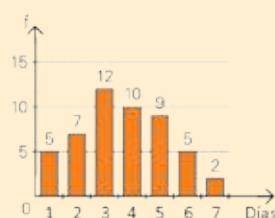
- Una forma de comunicar los resultados obtenidos tras un estudio estadístico es a partir de **gráficos**, que dependen de la variable involucrada. Algunos de los más usados son:
 - ✓ **Gráficos circulares.** Pueden usarse con cualquier tipo de variable. Para calcular el ángulo de cada sector, se hace $\frac{f}{n} \cdot 360^\circ$.
 - ✓ **Gráficos de barras.** Se usan con variables cualitativas o cuantitativas discretas y, para cada dato, la altura de la barra es la frecuencia absoluta.
 - ✓ **Histogramas.** Equivalentes a los gráficos de barra, pero con variable continua y por eso las barras están “pegaditas”. La altura de la barra que le corresponde a cada intervalo es la frecuencia absoluta de ese intervalo.
 - ✓ **Polígonos de frecuencias.** Unen el punto medio de la parte superior de cada barra de un histograma.

Gráfico circular



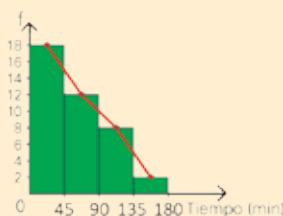
Clase de gimnasia elegida.

Gráfico de barras



Cantidad de veces por semana que asistiría al gimnasio.

Histograma y polígono de frecuencia



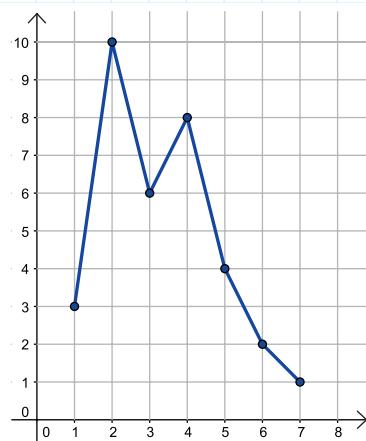
Duración diaria de entrenamiento.

7. Mario es artesano y representó en un gráfico circular la cantidad de vasijas que vendió durante cinco días. El miércoles vendió 90 vasijas y el jueves, el doble que el miércoles.

- ¿Cuál es la medida del ángulo que usó para representar la cantidad de vasijas que vendió el viernes?
- Aproximadamente, ¿qué porcentaje del total representa la cantidad de vasijas que vendió cada día?



8. El gráfico corresponde a un polígono de frecuencias.



- Reconstruí el histograma.
- ¿Cuáles fueron los intervalos considerados?

- ¿Cuántos elementos tenía la muestra analizada?

Tengo tarea

9. Armá un gráfico de barras para mostrar la cantidad de programas educativos que visitó un grupo de alumnos durante el último ciclo lectivo.

Cantidad de programas	f
2	3
3	10
4	15
5	0
6	2

Parámetros centrales



Moda, mediana y media

- En un estudio estadístico, el dato que más se repite –es decir, el de mayor frecuencia– es la **moda**. La moda no tiene por qué ser una sola. Si la mayor frecuencia se repite, entonces habrá más de una.
Cuando la variable es cuantitativa continua, por lo general no se tienen todos los datos a la vista y lo importante es en qué intervalo hay más datos. Por eso se habla del **intervalo modal** en vez de la moda.
- Si los datos son numéricos y pueden ordenarse de menor a mayor, el dato que ocupa la posición central es la **mediana**. Claro que a veces no hay una posición central, sino dos (cuando el total de datos es una cantidad par). En ese caso, la mediana se calcula haciendo el promedio de los dos datos centrales.
Como en el caso de la moda, cuando la variable es cuantitativa continua, se considera que la mediana cae en el primer intervalo en el que el porcentaje acumulado supera el 50%.
- Otro valor de interés es la **media** o promedio de los datos obtenidos, que se abrevia \bar{x} . Si la variable es cuantitativa continua, la media se calcula usando un “representante” de cada intervalo: su punto medio, llamado **marca de clase**. Esta puede calcularse haciendo el promedio de los extremos del intervalo.
- Todo en un ejemplo: se midió la estatura de un grupo de chicos de un jardín infantil. Los datos se muestran en la tabla.

Estatura (cm)	[80; 84)	[84; 88)	[88; 92)	[92; 96)	[96; 100]	Totales
f	7	8	15	12	8	50
fr	0,14	0,16	0,30	0,24	0,16	1
f %	14%	16%	30%	24%	16%	100%
F %	14%	30%	60%	84%	100%	

El intervalo modal es [88; 92) porque es el de mayor frecuencia, es decir, hay más chicos del jardín con alturas en ese rango que en cualquier otro.

La mediana cae en el mismo intervalo porque recién al llegar a ese intervalo se supera el 50% de los datos. O sea, se puede decir que la mitad de los alumnos mide menos de 90 cm, aproximadamente, y la otra mitad mide más (considerando que 90 cm es la marca de clase de ese intervalo).

Para calcular la media, primero hay que encontrar la marca de clase de cada intervalo. Además, hay que tener en cuenta las frecuencias absolutas. Por eso, a veces es cómodo agregar las marcas de clase en la tabla.

Intervalo	[80; 84)	[84; 88)	[88; 92)	[92; 96)	[96; 100]	Totales
Marca de clase	82	86	90	94	98	-----
f	7	8	15	12	8	50

Hay 7 datos en el intervalo [80; 84), cuya marca de clase es 82.
$$\bar{x} = \frac{82 \cdot 7 + 86 \cdot 8 + 90 \cdot 15 + 94 \cdot 12 + 98 \cdot 8}{50} = 90,48$$

En total hay 50 datos.

Entonces, la media o promedio de las alturas de los chicos del jardín es 90,48 cm.

10. Considera los datos de la actividad 9, cuyo gráfico hiciste de tarea.

a. ¿Cuál es la moda de la cantidad de programas educativos visitados?
¿Y la mediana?

b. Calculá la media de la cantidad de programas educativos que visitó ese grupo de alumnos durante el último ciclo lectivo.



Fijate bien

Si los datos son:

2 3 3 5 7

Dos datos centrales.

Mediana: 4 (la mitad entre ambos).

- 11.** Los padres se quejan de que los chicos gastan mucho en el kiosco de la escuela. Marisa investigó el tema con sus alumnos. El martes les pidió que, al entrar del recreo, anotaran en el pizarrón cuánto habían gastado en pesos.

25	26,5	30,5	35	39	41,1	33,5	33	41	44	54,8
42	51,8	53,5	27	30,6	35	39,8	54,3	41,5	50	51
50,5	46	25	30	25,2	51,5	41,2	35,6	53,1	52,3	47,5

- a.** Separá los datos en seis intervalos (redondeá su amplitud) y armá una tabla de frecuencias.

Dato									Total
f									
fr									
f%									
F%									

- b.** ¿Qué porcentaje de alumnos gastó menos de \$ 50 ese día?

- c.** Indicá cuál es el intervalo modal y a cuál pertenece la mediana.
- d.** ¿Cuál fue el gasto medio de esos chicos ese martes?

! Fijate bien

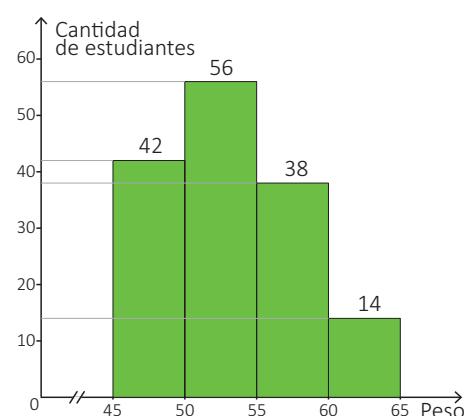
Las calculadoras también trabajan en modo estadística (SD). Investigá cómo se usa la tuya.

- 12.** Laura mostró en un histograma los resultados de una encuesta sobre el peso (en kilogramos) de los estudiantes de secundaria de su colegio.

- a.** ¿Cuál es la variable? ¿Y de qué tipo?

- b.** ¿Cuál es la población? ¿Y el tamaño de la muestra?

- c.** Aproximadamente, ¿qué porcentaje del total representan los estudiantes que pesan menos de 55 kilos?



- d.** ¿Cuál es el peso medio de los estudiantes de ese colegio? ¿A qué intervalo pertenece? ¿Coincide con el intervalo en el que se encuentra la mediana?

13. El gráfico muestra los sueldos mensuales de los empleados de una empresa.

- ¿Cuántos empleados tiene la empresa?
- El gerente dice que entre 8 y 10 personas ganan \$ 20.000 al mes. ¿Es cierto? ¿Por qué?

- También dice que el sueldo medio de sus empleados es de \$ 10.000 al mes, aproximadamente. ¿Es así? ¿Por qué?

- Considerá la marca de clase del intervalo al que pertenece la mediana. ¿Qué te parece que es más representativo de los sueldos de los empleados: este valor, la media, o ambos lo son? Explicá tu respuesta.

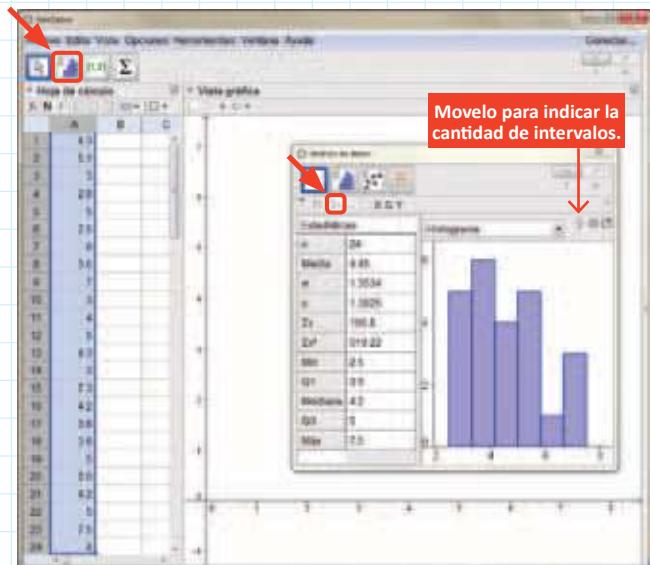


14. Manu ingresó en la hoja de cálculo de GeoGebra una lista de números, los seleccionó y cliqueó en el ícono del gráfico, luego en "Analiza" y armó el histograma con los datos agrupados en seis intervalos.

El gráfico apareció en una nueva ventanita; entonces hizo clic en el ícono que está al lado de la manito y se hicieron visibles un montón de números.

Para ver mejor el gráfico, cliqueó con el botón derecho del *mouse* y eligió la opción "Copia en la vista gráfica". Acomodó los ejes para visualizar los intervalos, y se puso a trabajar.

- Hacé como Manu y armá un histograma, pero usando cinco intervalos en vez de seis. Si no tenés la compu, podés hacerlo "a mano", tomando los datos de la columna A de la imagen.
- Calculá la media de los datos agrupados en los cinco intervalos. Calculala también usando los 24 datos. Compará ambos valores con el que te da GeoGebra. ¿Algunos coinciden? ¿Caen en el mismo intervalo?



- En el GeoGebra también aparece un valor para la mediana. ¿En qué intervalo cae? ¿Coincide con el primer intervalo en el que el porcentaje acumulado supera el 50%?
- ¿Qué podés concluir, observando los valores obtenidos? ¿Hay mucha diferencia entre trabajar con los datos agrupados y sin agruparlos? ¿De qué forma sería más sencillo?

- 15.** Analizá estas situaciones y señalá qué gráfico realizarías para representarlas. Explicá tu elección.
- El porcentaje de computadoras vendidas durante los últimos 5 años.
 - Comidas que prefiere un grupo de personas.
 - La cantidad de aviones que despegan de un aeropuerto entre las 7:00 y 21:00 horas.
 - La cantidad de asistentes a las películas que están en cartelera.
 - Distribución de la población de tu ciudad, según edad, en intervalos de 5 años.

- 16.** En la tabla se muestra la cantidad de juguetes vendidos durante 5 meses en una tienda.

Mes	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo
Cantidad de juguetes	80	65	50	60	75

- Armá una tabla de frecuencias.
- ¿Pueden hallarse todos los parámetros centrales (moda, mediana y media)? Si se pueden, señalá cada uno, y si no, explicá por qué.
- Realizá un gráfico circular.

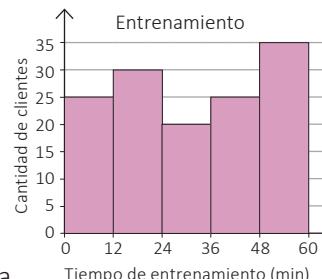
- 17.** En la plaza del barrio se convocó a una jornada solidaria a la que, a primera hora de la mañana, asistieron doce personas. Entre los asistentes había padres e hijos. Estas son sus edades: 12, 14, 56, 14, 8, 13, 25, 45, 17, 22, 45 y 30. Hallá la edad promedio de los asistentes.

- 18.** Andrés se tiene que mudar a Córdoba por motivos laborales y necesita alquilar un departamento durante un año. Buscó precios por todos lados y encontró 8 departamentos a \$ 3.500 mensuales; 7 a \$ 3.800; 7 a \$ 4.500; 2 a \$ 4.700; 11 a \$ 5.000; y 20 a \$ 5.500.
- ¿Cuál es la moda de los precios de los alquileres? ¿Qué significa en esta situación?
 - ¿Cuál es la mediana de los alquileres?
 - ¿Cuál es la media de los alquileres de esos departamentos?
 - ¿Cuál de los parámetros centrales te parece que representa más el precio de los alquileres? ¿Por qué?
 - Realizá el gráfico que creas más adecuado para esta situación.

- 19.** En un gimnasio se implementará un programa de acondicionamiento físico.

Para adecuarlo a las necesidades de sus clientes, se les preguntó a algunos de ellos por su tiempo de entrenamiento.

Los resultados se ven en el histograma.



- ¿Cuál es el intervalo modal? ¿Cómo puede distinguirse al mirar el gráfico?
- Indicá en qué intervalo está la mediana.
- Hallá la media del tiempo de entrenamiento de esos clientes.

- 20.** En un estudio preliminar de la velocidad límite en un tramo específico de una avenida se instaló un dispositivo para registrar la velocidad (en km/h) de los automóviles entre las 8 y las 9 de la mañana. El registro de un día se muestra en esta tabla:

Velocidad	[55; 70]	[70; 85]	[85; 100]	[100; 115]
f	7	24	11	3

- Si tras el estudio se detecta que, para que esa avenida sea segura, los automovilistas no deberían alcanzar una velocidad de 100 km/h, ¿qué cantidad de conductores entraron dentro de la franja segura? ¿A qué porcentaje corresponde?
- Para evitar embotellamientos, la velocidad no debería ser inferior a 70 km/h. ¿Qué porcentaje cumplió ambos requisitos?
- Hallá la media de las velocidades medidas en ese estudio.

- 21.** Los alumnos de 3.º harán un viaje de estudio. Como en el último trimestre no hubo ningún aplazo, la directora obsequiará el valor de un pasaje al curso que tenga el promedio más alto. Estas son las notas de cada curso:

Notas	[4; 6]	[6; 8]	[8; 10]
3.º A	2	15	7
3.º B	1	17	6

Si fueses la directora, ¿quiénes serían beneficiados con el valor del pasaje? ¿Por qué?

Combinatoria



Cómo contamos

- Algunas veces contar es muy fácil, pero en ocasiones puede ser bastante complicado. Por suerte, la **combinatoria** nos ayuda en muchos casos particulares, algunos de los cuales se ejemplifican a continuación.

- Para contar cuántos números de tres cifras se pueden formar con 1, 4, 6, 7 y 9, primero deberíamos preguntarnos si las cifras pueden repetirse o no.

Si se repiten, entonces hay tres “posiciones” y en cada una pueden ponerse cinco números $\rightarrow 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Si no se repiten, para la primera posición también hay cinco opciones, pero para la segunda habrá solo cuatro, porque no puede volver a ponerse el número que ya está. Luego, en la tercera posición solo podrán ponerse tres números $\rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

- De manera similar se pueden contar, por ejemplo, las formas de armar un menú con tres opciones de entrada, cinco de plato principal y siete de postre $\rightarrow 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

- También, siguiendo el mismo procedimiento, puede calcularse de manera sencilla cuántas maneras hay de ordenar, por ejemplo, seis objetos diferentes, haciendo $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. A este producto se lo conoce como **número factorial** y se lo abrevia $6!$.

Así, por ejemplo, $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

- Un poco más complicado es contar, por ejemplo, cuántas comisiones de tres personas pueden formarse si en total hay 25 que podrían integrar la comisión. En realidad, no es tan difícil.

Primero se cuentan cuántos grupos de tres personas se pueden formar, eligiendo entre los 25 $\rightarrow 25 \cdot 24 \cdot 23$.

En ese caso, se estaría designando a cada persona para un “puesto” determinado, cuando en verdad no importa el orden de las designaciones. Por eso, habría que dividir esa cantidad por los grupos formados por las mismas tres personas, pero en distinto orden $\rightarrow 3 \cdot 2 \cdot 1$.

En síntesis, la cantidad de comisiones se calcula haciendo $\frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2 \cdot 1}$.

- 22.** Marisa tiene siete tarjetas diferentes: el DNI, dos tarjetas de débito de distintos bancos, una de crédito, la SUBE, la tarjeta de puntos del supermercado y la tarjeta de puntos de la librería. Consiguió un tarjetero con espacio para diez.

- a. ¿De cuántas formas puede ordenarlas en su tarjetero si deja los tres espacios libres todos juntos al final?

- b. Si, por comodidad, ubica en la primera posición el DNI y deja la SUBE para el final, justo antes de los espacios libres, ¿de cuántas formas puede ordenarlas?

- c. **Estrategia: hacer un esquema** Ahora quiere dejar el DNI adelante y la SUBE al final, pero se dio cuenta de que prefiere dejar un espacio libre atrás del DNI, uno entre las tarjetas del banco y las de puntos, y el otro, antes de la SUBE. ¿De cuántas maneras puede ordenarlas con estas condiciones? Explicá cómo lo pensaste.



Fíjate bien

Las calculadoras tienen una tecla para calcular el factorial de un número.

Por lo general se indica $x!$ o $n!$.
¿La encontraste?

23. ¡Último sábado de vacaciones! Nicol quiere aprovecharlo y hacer todo lo que pueda. A la mañana puede desayunar con las chicas del gimnasio o con sus compañeras de escuela; para el mediodía tiene tres invitaciones: almuerzo con los abuelos, con su madrina o en lo de Leti, su amiga desde el jardín. Más tarde quiere ir a una de las cinco ferias artesanales que hay cerca de los cines, porque después tiene ganas de ver una de las siete películas que se estrenaron el jueves. Para la noche, cena en casa y después... baile, karaoke o juegos en red.

- ¿Cuántas opciones tiene Nicol para armar su día?
- Ya decidió algunas cosas: ¡almuerzo con los abuelos! Y eligió la película. Entonces, descartó las dos ferias más alejadas. ¿Cuántas opciones tiene ahora?

24. Para generar claves de seguridad, cada vez hay que tener en cuenta más cosas. Ayer, Clarita entró en una página donde decía:

¡Atención! Su nueva clave debe tener diez caracteres en total, todos distintos. Puede elegir números y letras y también incluir alguno de estos símbolos: () # \$ % & ? ¡ ! Recuerde que las letras pueden estar en mayúsculas o minúsculas, pero no llevar tildes ni diéresis.

- ¿Cuántas claves se podrían generar? Podés anotar el cálculo sin escribir el resultado.
 - De los diez dígitos, Clarita solo quiere usar números primos y, para no hacerse lío, las letras solo las usará en minúsculas. ¿Cuántas claves con estas características podría generar?
- 25.** Vale se anotó en un sorteo que vio en una red social. Menos mal que se publicó apenas unas horas, porque ya hay 15.600 participantes. ¡Y únicamente tres premios! Todos los premios son iguales y, como cada persona puede anotarse solamente una vez, puede ganar solo uno de los premios.

- ¿Cuántas ternas ganadoras puede haber con tantos participantes?
- ¿En cuántas de esas ternas Vale estaría entre los ganadores?

26.  **Hacé de profe** Matías contaba que, para ir desde Buenos Aires a Mar del Plata, hay dos rutas disponibles –la RP2, con peajes, y la RP29, sin peajes– y cuatro medios de transporte diferentes –auto, micro, tren y avión–. Al oírlo, Nadia dijo que, con lo aprendido en la escuela, podía calcular cuántas maneras distintas hay de viajar usando solo un medio de transporte, e hizo así:

$$2 \cdot 4$$

Rutas ↑
↓ Medios de transporte

¿Es correcto lo que calculó? Explicá tu respuesta.



- 27.** En una tienda comercial liquidan cuatro modelos de LCD. Por cada compra se regala un DVD o un **set** de parlantes a elección del cliente. ¿De cuántas maneras distintas es posible elegir un LCD y uno de los regalos?

Probabilidad



Sucesos aleatorios y probabilidad

- Cuando tiramos una moneda, esta puede caer de manera que se vea la imagen o que se vea su valor. Pero antes de mirarla, no podemos asegurar cuál de las dos cosas sucederá. A esto se denomina **sucedido aleatorio**: aunque se conocen las opciones de lo que podría pasar, no puede asegurarse el resultado antes de que ocurra porque interviene el azar.

Todos los posibles resultados forman el **espacio muestral**. En este ejemplo, está formado por "cara" y "ceca".

- En estos casos, en los que se conoce el espacio muestral (todas las opciones o casos posibles), puede calcularse la **probabilidad** de que ocurran algunas de las opciones previstas (casos favorables). Si designamos estos casos favorables con A, la probabilidad de que sucedan se calcula haciendo:

$$\text{Probabilidad}(A) = \frac{\text{Cantidad de casos favorables}}{\text{Cantidad de casos posibles}}$$

Por ejemplo, si una persona tiene 5 números de una rifa de la que se vendieron 100 números, la probabilidad de que gane el premio es: $P(\text{ganar}) = \frac{5}{100} = 0,2$.

- Para contar la cantidad de casos favorables y la de los posibles, se puede usar la combinatoria.

28. ¿Te acordás de Vale y el sorteo de la actividad 25? ¿Qué probabilidad tiene de ganar un premio?

29. Maricel va a cambiar la clave de acceso a su *netbook* porque Camilo le gasta la batería jugando en los recreos. Ya no sabe qué contraseña inventar. Entonces empezó a dar vueltas las letras de su nombre. Escribió: "ricelam"; "clemari"; "milacre"... Por un momento Camilo la vio, pero no entendió qué estaba haciendo. Ella siguió hasta que encontró una que le gustó. Cuando Camilo volvió a agarrar la compu y puso la clave: jerror! Entonces se dio cuenta: Maricel había estado buscando una clave nueva. Ahora a Camilo le quedan solo dos intentos antes de que la *netbook* se bloquee. ¿Qué probabilidad tiene de acertar la clave en el primer intento? ¿Y en el segundo?

30. Los dados con forma de dodecaedro tienen 12 caras iguales pentagonales, numeradas del 1 al 12.

- ¿Cuál es la probabilidad de que, al arrojar un dado de esos, la cara superior sea un número par?
- ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número primo?
- Mariano dice que sabe cuál es la probabilidad de que salga un 15 sin hacer ninguna cuenta. ¿Cómo sabe? ¿Cuál es esa probabilidad?

31. Calculá las siguientes probabilidades.

- a. La probabilidad de que al tirar un dado común salga un número menor que siete. →
- b. La probabilidad de que al tirar un dado común salga un número mayor que nueve. →
- c. Si en una bolsa hay caramelos de menta y de chocolate, la probabilidad de que al sacar con los ojos cerrados uno, este sea de menta o de chocolate. →
- d. Si en una bolsa hay caramelos de menta y de chocolate, la probabilidad de que al sacar con los ojos cerrados uno, este sea de dulce de leche. →
- e. La probabilidad de que el grupo sanguíneo de una persona sea A, B, AB u O. →
- f. La probabilidad de que el grupo sanguíneo de una persona no sea A, B, AB u O. →

32.  **Estrategia: analizar y comparar** Mirá las probabilidades que calculaste en la actividad anterior.

- a. ¿Cuáles fueron las probabilidades que obtuviste? ¿Cómo podés explicarlo?
 - b. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar una probabilidad? ¿Y el mayor?
- 33.** Alicia y Camila se encuentran para almorzar en un restaurante que ofrece un menú ejecutivo con entrada, plato principal y postre. Hay 4 tipos de entrada, 3 de plato principal y 6 postres diferentes. Alicia se retrasó. Mirá sus mensajes.

Camila pidió el menú completo para su amiga (así se estila en ese restaurante). Al llegar, Alicia advirtió que había solo una entrada y un postre que no le agradaban, pero no le dijo nada a Camila. Enseguida se pusieron a hablar de otra cosa.



- a. ¿Cuántos menús ejecutivos diferentes pueden armarse con esas opciones en ese restaurante?
 - b. ¿Cuál es la probabilidad de que a Alicia le agrade el menú que pidió Camila?
- 34.** Male y Mati tienen un mazo de 50 cartas españolas, en el que están los dos comodines. Querían saber qué probabilidad hay de que al tomar una al azar, fuera de oro o un comodín. Mirá cómo lo hicieron.

Male	Mati
$\frac{14}{50}$	$1 - \frac{36}{50}$

¿Obtuvieron el mismo resultado? Si son distintos, indicá cuál de los dos es el correcto, y si son iguales, explicá cómo pudo haberlo pensado cada uno.

Fijate bien

La probabilidad está entre 0 y 1. Además, la probabilidad de que un hecho ocurra, sumada a la de que no ocurra, siempre es 1.

- 35.** Marcela quiere ubicar unos libros que le regalaron en un estante de la biblioteca. En total le regalaron 10 libros.
- ¿De cuántas formas puede acomodarlos?
 - Uno de esos libros es su preferido. Para tenerlo más “a mano” quiere ponerlo en el primer lugar de la derecha. ¿De cuántas maneras puede acomodar los restantes?
 - Vivi, amiga de Marcela, le pidió que donara 3 libros para una escuela rural. ¿De cuántas maneras puede elegirlos entre los 10?
 - Marcela decidió no regalar su libro preferido. Además, apartó otro que empezó a leer y aún no terminó. ¿De cuántas maneras puede elegir los 3 para donar entre los que quedan?
- 36.** Bernardita irá a una fiesta y tiene 6 pantalones, 12 remeras, 3 abrigos y 3 pares de zapatitos. ¿Cuántas combinaciones podrá hacer con todas esas prendas?
- 37.** Se lanzan al aire en el mismo momento una moneda y un dado común. Al caer, podría ocurrir que la cara visible de la moneda sea cara y la del dado, 2, o cara y 5, o... ¿Cuántos son los posibles resultados? Escribílos todos.
- 38.** ¿Cuántos números de 6 cifras (iguales o distintas) se pueden formar si todas sus cifras deben ser números primos?
- 39.** Se quiere formar un número de 4 cifras con los dígitos 1, 2, 4, 5, 7 y 9. El 9 no puede ir al principio. ¿Cuántos números se pueden formar sin repetir los dígitos?
- 40.** De los 250 artículos producidos en un mes en una empresa, en promedio, hay 30 fallados. ¿Cuál es la probabilidad de que en un control de calidad de fin de mes se elija un producto sin fallas?
- 41.** En una bandeja de 30 huevos, 18 son de color y el resto, blancos. Al escoger un huevo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanco? ¿Y de que sea de color?
- 42.** Si por una cabina de peaje pasaron durante una hora 45 autos, 29 camionetas y 55 micros, ¿cuál es la probabilidad de que al elegir uno de estos vehículos al azar sea una camioneta?
- 43.** Noemí decide comer una fruta después del almuerzo. Si tiene 3 manzanas, 2 naranjas y 4 peras, ¿cuál es la probabilidad de que al elegirla al azar no escoja una naranja?
- 44.** En el estéreo de su auto, Alan tiene 32 canciones de rock, 19 de pop y 7 románticas. Si activa el sistema de reproducción aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de que la primera canción que se escuche sea de pop?
- 45.** Se quiere saber cuáles son las ensaladas favoritas de los clientes de un restaurante. Para eso, se entrevistó y se registró las preferencias de algunos de ellos en una tabla.

Ensalada	Cantidad de hombres	Cantidad de mujeres
De la huerta	10	20
De arroz con pollo	15	5
Con lentejas	13	10
Con pastas	4	7

- Si de ese grupo se elige una persona al azar, ¿qué probabilidad hay de que sea hombre?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir una persona al azar, prefiera la ensalada de la huerta o la que tiene lentejas?
 - ¿Y de que sea mujer y prefiera la ensalada de la huerta?
 - ¿Qué probabilidad hay de que una persona elegida al azar sea un hombre que no haya elegido la ensalada de arroz con pollo?
- 46.** ¿Cuál de estas afirmaciones es falsa con respecto a la probabilidad de un suceso? ¿Por qué?
- Puede ser cero.
 - Puede ser 0,5.
 - Se puede calcular a través de un cociente.
 - Puede ser mayor que 1.

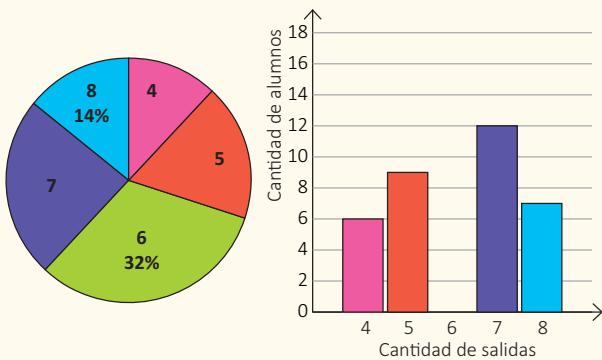


Repaso todo

47. Mili hizo una encuesta en la escuela para saber cuál era el tipo de música preferida por sus compañeros. ¡Está recontenta porque ganó el rock! Los 80 chicos que eligieron ese género equivalen al 40% del total de encuestados.

- ¿Cuál es la variable estudiada? ¿De qué tipo es?
- ¿Cuáles de los parámetros centrales pueden mencionarse en este caso? ¿Por qué? Si conocés alguno con la poca información que tenés, mencionalo.
- ¿Cuál es la cantidad total de alumnos encuestados?
- Si el 27% eligió el pop, ¿cuántos alumnos dieron esa respuesta?
- Solo 6 alumnos eligieron el rap. ¿A qué porcentaje corresponde?

48. Se realizó una encuesta a cierto número de estudiantes para saber cuántas salidas recreativas realizaron durante las vacaciones de invierno. Algunos resultados se muestran en los gráficos, pero otros se borraron. Comparalos.



- ¿Qué información relevante se observa en cada forma de presentar los datos?
- Entre los dos gráficos se presenta toda la información en relación con los que salieron 8 veces en las vacaciones. Usala para calcular la que falta en las restantes (la cantidad o el porcentaje de alumnos que optaron por cada respuesta).
- Con lo que obtuviste anteriormente, dibujá la barra que falta en el gráfico.
- ¿Cuál es la moda? ¿Dónde la visualizás más rápido?
- Encontrá la mediana de la cantidad de salidas.
- ¿Cuál es el promedio de las salidas realizadas por ese grupo de alumnos?

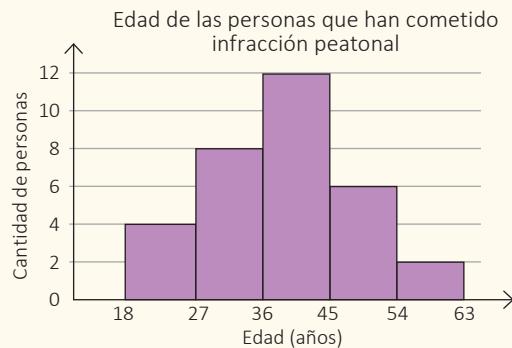
49. El fin de semana nació el hermanito de Lucas. Pesó 3 kg con 220 g. En la clínica acostumbran armar tablas con los datos de los bebés recién nacidos. Esta es una de ese fin de semana:

Peso (en kg)	[2,1; 2,5]	[2,5; 2,9]	[2,9; 3,3]	[3,3; 3,7]
Cantidad de bebés	8	8	11	5

- ¿En qué intervalo cayó el peso del hermano de Lucas?
- Armá una tabla de frecuencias.
- Una de las condiciones de la clínica para dar el alta el lunes es que el bebé haya pesado al menos 2 kilos y medio al nacer. ¿Qué porcentaje podría tener el alta ese lunes?
- ¿Cuál es la media de los pesos de esos chiquitos?
- ¿Qué tipo de gráfico corresponde a esta situación, el de barras o el histograma? ¿Cómo te das cuenta? Hacelo.

50. Algunas de las faltas más comunes que cometen los peatones son cruzar sorpresivamente por la mitad de cuadra o con luz roja. Esto aumenta el riesgo de accidentes, y por eso se está haciendo una campaña de concientización.

En una de las cuadras donde se realizó la campaña, el primer día se registró la edad de cada peatón infractor. Estos son los datos obtenidos.



- ¿Cuántos infractores hubo ese día en esa cuadra?
- ¿Entre qué edades se cometieron más infracciones? ¿A qué parámetro central corresponde esta respuesta?
- ¿A qué intervalo corresponde la mediana?
- ¿Cuál es la edad media de los infractores? ¿Pertenece al mismo intervalo que la mediana? ¿Y al intervalo modal?



51. Se midió la duración de un lote de pilas recargables y se obtuvieron estos datos.

Duración (hs)	Frecuencia
[40; 45)	22
[45; 50)	16
[50; 55)	10
[55; 60]	8

- a. ¿Cuántas pilas se controlaron?
 - b. ¿Cuál es la vida media de las pilas?
 - c. ¿Cuáles son los restantes parámetros centrales?
 - d. ¿Cuál de los tres parámetros centrales te parece más representativo? ¿Por qué?
52. La mamá de Sofi hizo helados de dos gustos: frutilla y vainilla. Para cubrirlos, batió crema, hizo una salsa de arándanos y derritió chocolate. Y para tomar, preparó cinco jarras de jugo: una de naranja, una de limón, una de manzana, una de durazno y una de banana. Las compañeras de Sofi llegaron para merendar y... ¡qué problema! ¡No se deciden!
- a. ¿De cuántas formas podrían combinar un gusto de helado con una cobertura y un jugo?
 - b. A Delfi no le gusta nada el limón, así que lo descartó enseguida. ¿Es cierto que para ella las combinaciones se redujeron a la mitad?
53. Francisca quiere colgar 4 cuadros en la pared, uno al lado del otro. ¿De cuántas formas diferentes puede hacerlo?
54. **Estrategia: armar un esquema de la situación**
Claudio, Gabriela, José, Daniela y Andrea quieren sentarse alrededor de una mesa circular. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ubicarse?
55. ¿De cuántas formas se puede formar el podio donde se premia el primer lugar, el segundo y el tercero de una final de 100 metros llanos en la que corren 8 atletas?
56. Se lanza un dado común y se observa el número que aparece en la cara superior.
- a. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 3?
 - b. Si tirás el dado 500 veces, ¿cuántas veces esperarías obtener el número 3, aproximadamente?

57. Carlos quiere cambiar la clave de su celular. La nueva debe ser de seis dígitos diferentes, entre el 0 y el 9, ambos inclusive.

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que la clave de Carlos termine en 5?
- b. ¿Y de que empiece en 8 y termine en 5?
- c. Carlos dice que la probabilidad de que tenga un 3 es la misma que la probabilidad de que no lo tenga. ¿Es cierto? ¿Por qué?

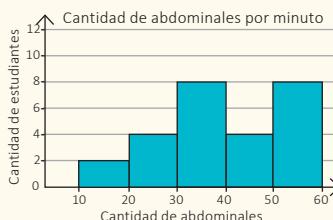
58. Con los ojos vendados, se saca una bolilla de este bolillero.
- 
- a. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bolilla roja?
 - b. ¿Y de sacar una verde?
 - c. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bolilla verde o azul?
 - d. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bolilla que no sea azul?
 - e. Pedro sacó justo la bolilla verde, pero se olvidó de regresarla al bolillero antes de que Julián extrajera la suya. ¿Creés que ahora la probabilidad de sacar una roja aumentó o disminuyó? ¿Por qué? Calculala y verificá tu respuesta.

59. Se tiran cuatro monedas. ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga igual número de caras que de cecas?

60. **Estrategia: resolver uno con cantidades menores**

En un juego de azar tenés que elegir 8 números de un total de 30. Si en el sorteo salen tus 8 números, ganaste. ¿Cuál es la probabilidad de ganar el juego?

61. El gráfico representa la distribución de la cantidad de abdominales por minuto que realiza un grupo de estudiantes de un curso.



- a. ¿Cuántos estudiantes hay en ese curso?
- b. ¿Cuál es la probabilidad de escoger uno de esos estudiantes al azar que haya realizado menos de 40 abdominales?

Saquen una hoja



Marcá la opción correcta.

En la tabla se muestra el tiempo que demoran los alumnos de un curso en llegar de su casa a la escuela. Con esa información, respondé las preguntas 1 a 7.

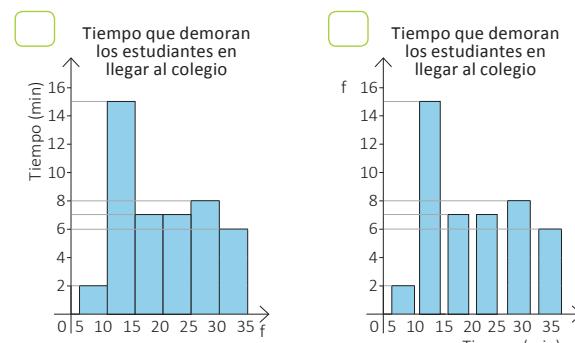
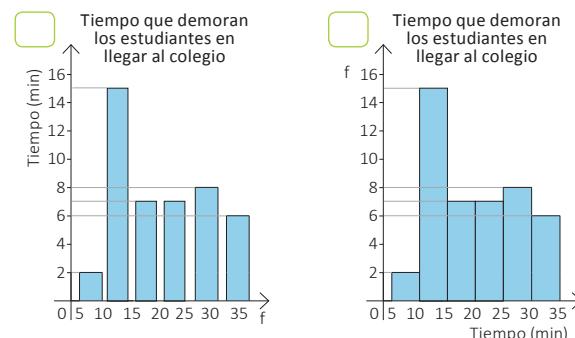
Tiempo (min)	f
[5; 10)	2
[10; 15)	15
[15; 20)	7
[20; 25)	7
[25; 30)	8
[30; 35]	6

- ¿Cuál es la variable en estudio y de qué tipo es?
 - Cantidad de alumnos de un curso, cualitativa.
 - Cantidad de alumnos de un curso, cuantitativa.
 - Tiempo utilizado en llegar a la escuela, cualitativa.
 - Tiempo utilizado en llegar a la escuela, cuantitativa.
- ¿Cuántos alumnos tardan 15 minutos o más?
 - 43 estudiantes.
 - 28 estudiantes.
 - 17 estudiantes.
 - 15 estudiantes.
- Aproximadamente, ¿qué porcentaje de alumnos tarda entre 20 y 30 minutos en llegar a la escuela?
 - 7%
 - 8%
 - 15%
 - 33%
- ¿Cuál es el intervalo modal?
 - [10; 15)
 - [25; 30)
 - [15; 20)
 - [30; 35]
- Aproximadamente, ¿cuál es el tiempo promedio que demoran esos alumnos en llegar a la escuela?
 - 15 minutos.
 - 23 minutos.
 - 20 minutos.
 - 25 minutos.

- ¿En qué intervalo se encuentra la mediana?

- [10; 15)
- [15; 20)
- [25; 30)
- [30; 35]

- ¿Cuál de estos gráficos representa esa situación?



- Una empresa brinda a sus empleados el almuerzo diario. Les es posible elegir entre tres ensaladas, dos platos principales, dos postres y dos bebidas. ¿Cuántos menús diferentes se pueden armar?

- 2^3
- $2^3 \cdot 3$
- $2 \cdot 3^2$
- $2 \cdot 3^3$

- En una empresa, 3 de sus 21 trabajadores diariamente llegan tarde. ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar a un empleado al azar, este haya llegado puntual?

- $\frac{3}{21}$
- $\frac{4}{21}$
- $\frac{20}{21}$
- $\frac{18}{21}$

Respuestas

Saque una hoja

CAPÍTULO 1

Divisibilidad de enteros.
Números racionales

1. 20
2. Cada 120 días.
3. $\frac{4.995}{9.990}$
4. $0.\overline{3}$
5. $-\frac{89}{45}$
6. 16
7. $\frac{41}{15}$
8. $\frac{45.000 \cdot 20.000}{0,0004}$

CAPÍTULO 2

Lenguaje algebraico

1. $-(a+1)$
2. $-8w^5 + \frac{4}{5}w^3$
3. $27a^2 + 11a$
4. $4f^4 - 1$
5. $16d^{10} + 24d^7 + 9d^4$
6. Tiene dos soluciones: $\frac{3}{2}$ y $-\frac{3}{2}$.
7. $\frac{1}{5}$
8. $\left[\frac{2}{7}; \infty \right)$

Si me equivoco en algo,
pido ayuda y aprendo.



CAPÍTULO 3

Números reales

1. Solo al de los números irracionales.
2. Solo I y III.
3. $\sqrt{20}$
4. $\sqrt{2} + \sqrt{2}$
5. $\sqrt{2}$
6. 2,71
7. 3,142
8. $(-\sqrt{15}; \sqrt{15}]$
9. $(-\sqrt{2}; -1)$

CAPÍTULO 4

Funciones. Sistemas
de ecuaciones

1. Creciente.
2. ... tiene una única raíz.
3. $y = -x + 7$
4. $y = -\frac{5}{2}x + 3$
5. ... tiene una sola solución para $x = 2$; $y = 11$.
6. ... a veces forman un sistema compatible indeterminado y otras, uno incompatible.
7. $f(x) = -2x^2 + 6x + 20$

Respuestas Saquen una hoja

CAPÍTULO 5 Figuras geométricas

1. Trapecio rectángulo.
2. Trapecio isósceles.
3. 128°
4. 8 cm^2 y 11,31 cm.
5. D
6. 110°
7. Incentro.

CAPÍTULO 7 Proporcionalidad, semejanza y trigonometría

1. $a = 30$ y $b = 60$.
2. En las relaciones de proporcionalidad inversa, el producto de dos cantidades que se corresponden es constante.
3. 5,7
4. Los dos polígonos son hexágonos.
5. 70°
6. 3,90

© Santillana SA. Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

CAPÍTULO 6 Movimientos

1. ... la forma y el tamaño de la figura original, pero varía su posición.
2. Una simetría axial.
3. El punto q.
4. En el tercer caso.
5. Si los dos tienen la misma dirección y sentido.
6. ... una recta paralela a la anterior.
7. Tres rotaciones de igual centro y ángulo de 180° .

CAPÍTULO 8 Estadística, combinatoria y probabilidad

1. Tiempo utilizado en llegar a la escuela, cuantitativa.
2. 28 estudiantes.
3. 33%
4. [10; 15)
5. 20 minutos.
6. [15; 20)
7. El gráfico de arriba a la derecha.
8. $2^3 \cdot 3$
9. $\frac{18}{21}$



Entre números

III

Actividades de Matemática



SANTILLANA

ISBN 978-950-46-5137-6

9 789504 651376