M1

matemática

Horacio Itzcovich
Andrea Novembre [coordinadores]

Gustavo Carnelli
Cecilia Lamela
Lidia Lindenbaum

tinta fresca

Polimodal | Educación Secundaria Superior

95

T
51
1 POLI
M392
TF

M1

matemática

Polimodal | Educación Secundaria Superior

Horacio Itzcovich
Andrea Novembre [coordinadores]

Gustavo Carnelli
Cecilia Lamela
Lidia Lindenbaum

323400

tintafresca

Biblioteca Pública Municipal
Gral. MANUEL BELGRANO
Calle 222 - Nº. 1493
7600 Mar del Plata

Matemática 1
Para Polimodal | Educación Secundaria Superior

tinta**fresca**

Editor general
Jorge Ezequiel Sánchez
Directora editorial
Susana Pironio
Vicedirectora
Alina Baruj

Autores
Horacio Itzcovich [Coordinador]
Andrea Novembre [Coordinadora]
Gustavo Carnelli
Cecilia Lamela
Lidia Lindenbaum

Editoras
Silvia Altman
Claudia Comparatore
Liliana Kurzrok
Asistente de Edición
Ariel Blatman
Corrector
Ricardo Rodríguez

Director de arte
Pablo Alarcón
Coordinadora gráfica
Eugenia Escamez
Diseñador de maqueta
Pablo Alarcón
Diseñadora de tapa
Mariela Vilarin
Asistente de arte
Lucio Marquez
Diseñadoras gráficas
Patricia Baggio
Mariela Vilarin
Archivo fotográfico
Andrea Balbi
Marcela Baccarelli
Ilustraciones
DEROCALAMOLE [A. Romero]
Luciana Geraci

© **Tinta fresca ediciones S.A.**
Piedras 1743
(C1140ABK) Ciudad de Buenos Aires

Hecho el depósito que establece
la ley 11 723.
Libro de edición argentina.
Impreso en la Argentina.
Printed in Argentina.

ISBN: 987-576-079-X

Matemática 1
Horacio Itzcovich... [et.al.]. - 1a ed.
Buenos Aires: Tinta Fresca, 2006.

192 p.: il.; 28 x 21 cm.

ISBN 987-576-079-X

1. Matemática-Enseñanza Media.
CDD 510.712

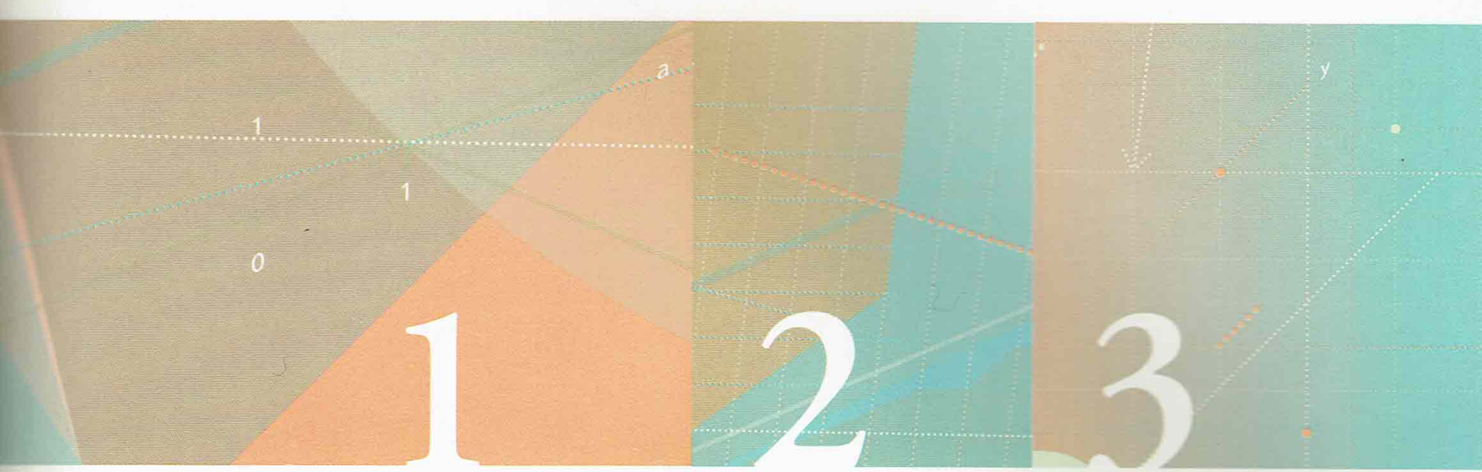
LA FOTOCOPIA MATA AL LIBRO Y ES UN DELITO

Este logo alerta al lector sobre la amenaza que fotocopiar libros representa para el futuro de la escritura. En efecto, la fotocopia de libros provoca una disminución tan importante de la venta de libros que atenta contra la posibilidad de los autores de crear nuevas obras y de las editoriales de publicarlas.

La reproducción total o parcial de este libro en cualquier forma que sea, idéntica o modificada, y por cualquier medio o procedimiento, sea mecánico, electrónico, informático o magnético y sobre cualquier tipo de soporte, no autorizada por los editores, viola derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

La editorial está a disposición de los poseedores de los derechos de eventuales fuentes iconográficas no identificadas.

En español, el género masculino en singular y plural incluye ambos géneros. Esta forma propia de la lengua oculta la mención de lo femenino. Pero, como el uso explícito de ambos géneros dificulta la lectura, los responsables de esta publicación emplean el masculino inclusor en todos los casos.


1
2
3


4
5
6

7

8

A1

A2

1 NÚMEROS REALES

CONTENIDOS

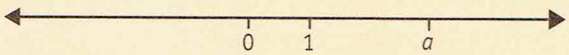
- Los números racionales
- Los números irracionales
- Propiedades de los números reales
- Ubicación en la recta numérica
- Intervalos
- Módulo de un número real

Hay numerosas situaciones que, para ser resueltas, requieren del uso de los números. En algunas oportunidades se usan los números para determinar una cantidad. En otras ocasiones los números se utilizan para establecer una medida o bien una distancia. A veces se recurre a ellos para dar cuenta de una relación, como podría ser una proporción.

Por otro lado, hay diferentes maneras de representar los números. Se pueden usar los símbolos ya conocidos, a veces se apela a las letras, o bien se los puede ubicar en una recta numérica. Sobre los números, sus características, sus modos de representación trata este capítulo, ya que muchos de estos números resultan conocidos, pero otros no tanto.

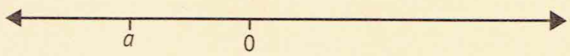
Problema 1

a. En la siguiente recta numérica están ubicados los números 0 ; 1 y a:



¿Dónde se ubican los números $a+1$; $-a$ y $-a+1$?

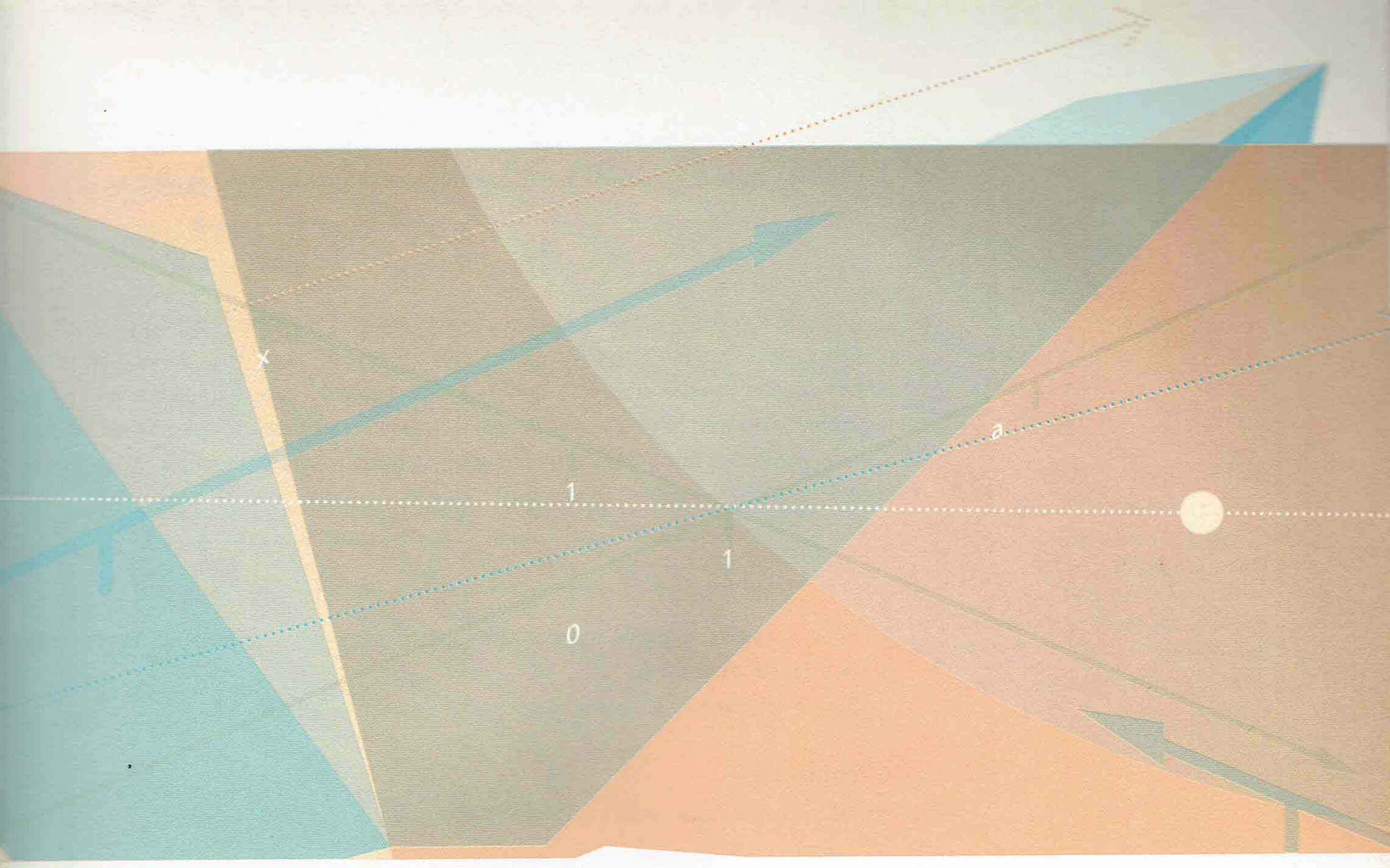
b. En la siguiente recta están ubicados los números 0 y a.
¿Dónde se ubica el número $-a$?



Problema 2

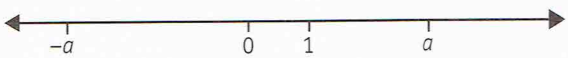
Para preparar una pintura de determinado color se mezclan 5 litros de pintura blanca con 3 litros de pintura azul. Juan quiere hacer una mezcla que tenga la misma tonalidad pero usando 10 litros de pintura blanca. ¿Cuántos litros de pintura azul debe usar? ¿Y si usa 8 litros de pintura blanca?

Para encontrar las respuestas a estos y otros problemas es que se usan los números enteros, los racionales y otros tipos de números, que serán el tema de trabajo de este capítulo.

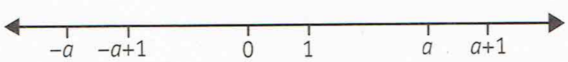


En el primer problema hay que ubicar los números $a+1$; $-a$ y $-a+1$ en la siguiente recta, conociendo la ubicación de 0, 1 y a:

Como se conoce la ubicación del número a y del 0, es posible determinar el lugar donde está el número $-a$, pues la distancia entre a y 0 debe ser la misma que la distancia entre $-a$ y 0.



El número $a + 1$ está ubicado a una unidad hacia la derecha del número a. Medir una distancia de una unidad es medir la distancia que hay entre 0 y 1 o entre dos números enteros consecutivos cualesquiera. Para ubicar el número $a + 1$ hay que tomar la medida que hay entre 0 y 1 y marcar un segmento con esa medida comenzando en a hacia la derecha. De igual forma se puede ubicar el número $-a + 1$, a una unidad hacia la derecha de $-a$.



En numerosas oportunidades, para representar números se usan las letras. En este caso, la letra a está representando un número cualquiera.

Los números a y $-a$ se denominan **inversos aditivos** u **opuestos** y verifican que:

$$a + (-a) = 0$$

Así, por ejemplo 3 y −3 son opuestos pues $3 + (-3) = 0$.
Los números naturales, sus opuestos y el cero forman el **conjunto de números enteros**.
A los números enteros se los designa con el símbolo: $\mathbb{Z}$.

En el ítem **b.** del problema 1, hay que ubicar en la recta numérica el número $-a$.

¿Por qué el número a está ubicado a la izquierda del 0? ¿Por qué no tiene un signo menos?

Esto resulta extraño, pero como a es el representante de un número, puede estar ubicado en cualquier lugar. Como a está ubicado a la izquierda del cero, entonces es un número negativo. Saber esto hace que no sea necesario ponerle el signo menos delante. De esta manera, el número $-a$ es el opuesto de a y se sitúa a la misma distancia del 0 a la que se encuentra a, pero en sentido contrario:

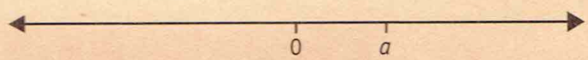
Los números que se encuentran ubicados a la izquierda del 0 se llaman **números negativos**.

Es decir, como el número a se encuentra a la izquierda del 0, es negativo, por lo tanto, su opuesto, $-a$, es positivo.

Por ejemplo, si $a = -5$, $-a = 5$; si $a = -6$, $-a = 6$; si $a = -12$, $-a = 12$.

Problema 3

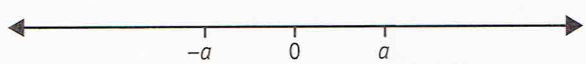
En la siguiente recta numérica están ubicados el 0 y el número positivo a.



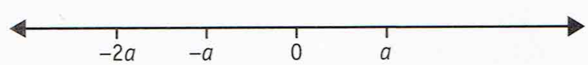
a. Ubicar en la misma recta numérica el número $-2a$.

b. Ubicar en dicha recta numérica $-(-a)$.

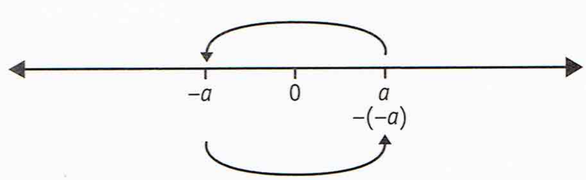
En esta recta numérica es posible dibujar el número $-a$, dado que se encuentra a la misma distancia del 0 que el número a pero en sentido contrario.



Finalmente, el número $-2a$ está al doble de distancia del 0 que el número $-a$, con lo cual puede ubicarse en la recta de la siguiente forma:



Al intentar ubicar el número $-(-a)$ se observa un juego de signos. Ocurre que $-a$ es negativo, pues a es positivo. Por lo tanto, $-(-a)$ es positivo y coincide con a.



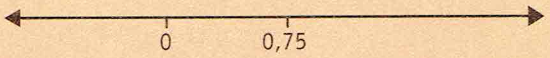
Los números racionales

Los números racionales y la recta numérica

La recta numérica es una buena herramienta para aprender distintas cuestiones sobre los números racionales. Éstos números pueden ser escritos de dos maneras diferentes: con expresiones decimales o con expresiones fraccionarias.

Problema 4

En la siguiente recta numérica están ubicados los números 0 y 0,75:

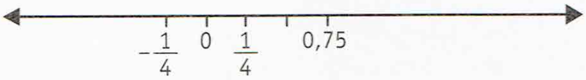


¿Dónde se puede ubicar el número $-\frac{1}{4}$?

Al conjunto de todos los números racionales se los representa con la letra Q. Dentro de éste conjunto de números se encuentran los naturales, los enteros y todos los números que se pueden expresar como fracciones.

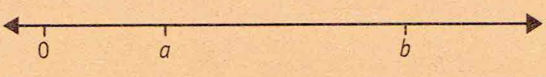
El número 0,75 se lee 75 centésimos y equivale a $\frac{75}{100}$ o a $\frac{3}{4}$.

Para ubicar el número $-\frac{1}{4}$ en la recta numérica hay varios caminos posibles. Uno de ellos consiste en pensar el número 0,75 como $\frac{3}{4}$. Si se divide la distancia entre 0 y $\frac{3}{4}$ en tres partes iguales es posible ubicar el número $\frac{1}{4}$ y, a partir de allí, determinar la posición de $-\frac{1}{4}$.



Problema 5

En la siguiente recta numérica se encuentran representados los números 0, *a* y *b*.



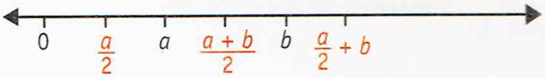
¿Dónde se ubican los números: $\frac{a}{2}$; $\frac{a+b}{2}$; $\frac{a}{2}+b$?

Una vez más, se recurre a las letras para representar cualquier número. En este caso, la única información adicional que podemos reconocer es que *a* y *b* son positivos y que *a* es menor que *b*, pues está representado a su izquierda.

Para poder determinar la ubicación de $\frac{a}{2}$ es suficiente con ubicar el punto medio entre 0 y a, ya que $\frac{a}{2}$ es la mitad de a.

Para indicar la ubicación de $\frac{a+b}{2}$, se puede buscar el lugar que corresponde a $a+b$, y luego dividir la distancia entre 0 y $a+b$ en dos partes iguales, o bien, recurrir a la idea de promedio, es decir, la expresión $\frac{a+b}{2}$ representa el punto medio entre a y b.

$\frac{a}{2}+b$ está ubicado a la derecha de b, a una distancia de $\frac{a}{2}$; o bien a la derecha de $\frac{a}{2}$ una distancia de b:

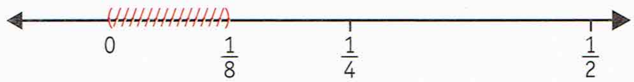


Problema 6

a. Si n es un número natural y se sabe que $\frac{1}{n}$ es menor que $\frac{1}{8}$. ¿Qué valores es posible que adquiera n?

b. Si n es un número natural y n es mayor que 8, ¿qué valores es posible que adquiera $\frac{1}{n}$?

a. Como $\frac{1}{n}$ es positivo y menor que $\frac{1}{8}$, en la recta numérica se ubica entre 0 y $\frac{1}{8}$.



¿Puede ser n = *2?* Evidentemente no, pues $\frac{1}{2}$ es mayor que $\frac{1}{8}$.

¿Puede ser n = *4?* Nuevamente, esto es imposible pues $\frac{1}{4}$ es mayor que $\frac{1}{8}$.

El número n debe ser mayor que 8, pues si se comparan fracciones con numerador uno, al ser más grande el denominador, la fracción es menor.

Se puede decir entonces que si $\frac{1}{n} < \frac{1}{8}$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces $n > 8$.

b. Si n es un número natural positivo y $n > 8$, entonces $\frac{1}{n}$ es una fracción con numerador 1 y denominador mayor a 8, luego queda $\frac{1}{n} < \frac{1}{8}$.

Del problema anterior se concluye que si n es un número natural entonces:

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{8} \quad \Leftrightarrow \quad n > 8$$

Si a y b son números naturales

$a < b \Leftrightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

Problema 7

Si un número racional m está entre 4 y 6, ¿entre qué números se encuentra $\frac{1}{m}$?

Como m está entre 4 y 6, entonces $4 < m < 6$.

Como m es mayor que 4 $\Rightarrow \frac{1}{m}$ es menor que $\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{m} < \frac{1}{4}$

Como m es menor que 6 $\Rightarrow \frac{1}{m}$ es mayor que $\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{m} > \frac{1}{6}$

Luego, si m es un número racional y $4 < m < 6$, entonces:

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{m} < \frac{1}{4}$$

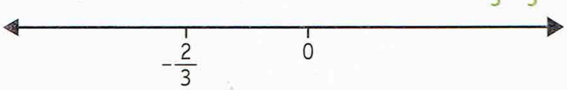
ACTIVIDADES

1. ¿Es cierto que, en el conjunto de números negativos, el número que está más cerca del 0 es el más chico?

2. En la siguiente recta numérica se encuentran ubicados los números a y b:

¿Dónde se ubican los números $a+b$; $-(a+b)$ y $b-a$?

3. En la siguiente recta numérica ubiquen los números $\frac{1}{3}$ y $\frac{7}{3}$.



4. a. ¿Cuántas fracciones con denominador 2 hay entre 3 y 4?

b. ¿Cuántas fracciones con denominador 5 hay entre 3 y 4? ¿Y con denominador 9?

5. Si a y b son dos números racionales, con $2 < a < 8$ y $1 < b < 4$. ¿Entre qué valores se encuentran los siguientes números:

a. $a + b$ **b.** $\frac{1}{a+b}$ **c.** $\frac{a}{b}$

6. Sean m y n números naturales, con $n > m$, y a un número natural. Completen con >, < o =; justifiquen su elección.

$\frac{m}{n}$ .... $\frac{m+a}{n+a}$

Los números racionales y las proporciones

Hay numerosas situaciones que involucran proporciones que resultan imposibles de ser analizadas si no se dispone de este conjunto de números. Si se retoma el problema 2 de la página 6:

> Para preparar una pintura de determinado color se mezclan 5 litros de pintura blanca con 3 litros de pintura azul. Juan quiere hacer una mezcla que tenga la misma tonalidad pero usando 10 litros de pintura blanca. ¿Cuántos litros de pintura azul debe usar? ¿Y si usa 8 litros de pintura blanca?

Si se organiza la información en una tabla:

Pintura Blanca	5	10	8
Pintura Azul	3	.....	.....

Es sencillo reconocer que si se usa el doble de pintura blanca, se debe usar el doble de pintura azul. Entonces, si se usan 10 litros de pintura blanca hay que poner 6 litros de azul para obtener la misma tonalidad.

Pero si se usan 8 litros de pintura blanca, no es fácil darse cuenta cuántos litros de azul corresponden. Esta cuestión se puede pensar de la siguiente manera:

Si se usa 1 litro de pintura blanca (es decir, se dividió a 5 litros por 5) se deberán usar 3 : 5 litros de pintura azul, es decir, $\frac{3}{5}$ de litro de pintura azul.

Luego, para 8 litros de pintura blanca, se deben usar $8 \cdot \frac{3}{5}$ de pintura azul, es decir $\frac{24}{5}$ de azul.

Este razonamiento se puede explicar también en la tabla:

$\cdot\frac{8}{5}$

$\cdot 2$

Pintura Blanca	5	10	8
Pintura Azul	3	6	$\frac{24}{5}$

$\cdot 2$

$\cdot\frac{8}{5}$

Una fracción, puede indicar una relación entre dos variables. En este caso: cantidad de pintura blanca y cantidad de pintura azul, para mantener la misma tonalidad. Esta relación se puede escribir así: $\frac{5}{3}$ y se lee 5 es a 3 o bien por cada 5 litros de blanco, se usan 3 litros de azul.

En toda tabla de proporcionalidad directa, existe un número llamado la **constante de proporcionalidad** que es generalmente simbolizada por la letra *k*.
El cociente entre dos valores de las variables que se relacionan entre sí es siempre constante e igual a *k*.
Si $\frac{y}{x} = k$, entonces $y = k \cdot x$.

Esto quiere decir que el valor que se corresponde con el valor *x* de una de las variables puede obtenerse multiplicando a *x* por la constante de proporcionalidad.

---

7. Para preparar jugo se mezclan 4 vasos de jugo concentrado con 7 de agua.

a. ¿Qué otras combinaciones de jugo concentrado y agua permitirán obtener jugo del mismo gusto?

b. Inventen una fórmula que permita saber qué cantidad de agua se necesita, en función de la cantidad de jugo concentrado que se use.

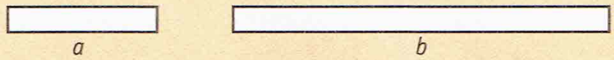
8. 2 botellas de jugo concentrado se mezclan con 7 litros de agua para preparar bebidas que alcanzan para que tomen 20 personas. ¿Cuántas botellas de jugo concentrado y cuántos litros de agua se necesitan para preparar bebidas de manera tal que alcance para que tomen 45 personas y que tenga el mismo gusto que en el caso anterior?

Cuando se trata de medir, se debe seleccionar una unidad de medida y determinar cuántas veces entra esa medida en el objeto que se pretende medir. No siempre entra una cantidad entera de veces. En ese caso, hay que fraccionar la unidad de medida.

Los números racionales y las medidas

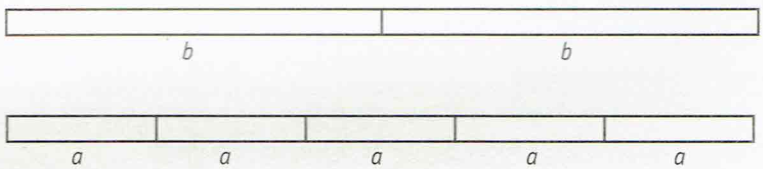
Problema 8

Dadas las dos tiras de papel, que se dibujan a continuación, determinar la medida de la tira *b* usando como unidad de medida la tira *a* y determinar la medida de la tira *a* usando como unidad de medida la tira *b*.



Para resolver este problema, una posibilidad es utilizar una regla e intentar establecer la relación que hay entre la medida de la tira *a* y la de la tira *b*.

Otra manera de pensarlo es la siguiente: recortar varias tiras como *a* y varias como *b*. Ubicarlas una al lado de la otra como se ve en la figura. Al realizar esto, se busca que ambas colecciones de tiras coincidan en su longitud:



Se puede observar que 2 tiras *b* miden lo mismo que 5 tiras *a*. Por lo tanto, es posible afirmar que $5\,a = 2\,b$ luego:

$$a = \frac{2}{5}\,b \qquad \text{y} \qquad \frac{5}{2}\,a = b$$

Entonces, la tira *a* mide $\frac{2}{5}$ de la tira *b*, mientras que la tira *b* mide $\frac{5}{2}$ de la tira *a*. También es posible expresar estas relaciones de la siguiente manera:

$$\frac{5}{2} = \frac{b}{a} \qquad \text{o} \qquad \frac{2}{5} = \frac{a}{b}$$

Cuando se establece una relación como la siguiente:

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$$

donde *m*, *n*, *a* y *b* son números naturales, se dice que hay establecida una proporción.

La fracción $\frac{m}{n}$ es equivalente a la fracción $\frac{a}{b}$ y se lee: "*m* es a *n* como *a* es a *b*".

El siguiente problema propone pensar sobre relaciones como las recientes, pero ya determinadas:

Problema 9

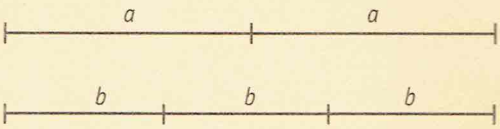
¿Es cierto que si *n* y *m* son números naturales y $n = \frac{7}{2}\,m$, entonces *m* debe ser un número par?

Efectivamente, *m* debe ser múltiplo de 2, pues, en caso de no serlo, $\frac{7}{2}\,m$ sería una fracción o un número decimal. Esto equivale a decir que *n* es una fracción dado que $\frac{7}{2}\,m = n$, y no es posible ya que el enunciado plantea que *n* es natural.

Se presentan a continuación otras situaciones que permiten estudiar con más profundidad el problema de medir.

Problema 10

Dados dos segmentos a y b, de los cuales se sabe que 2 veces la longitud del segmento a es igual que 3 veces la longitud del segmento b, tal como se muestra en la siguiente figura



a. ¿Es cierto que b entra una vez y media en a?

b. ¿Existe algún segmento de longitud u que entre una cantidad entera de veces en el segmento a y que a su vez, entre una cantidad entera de veces en el segmento b?

Como $2\,a = 3\,b$, resulta que $a = \frac{3}{2}\,b$ y como $\frac{3}{2} = 1{,}5$ entonces el segmento b entra una vez y media en el segmento a, o una vez y media la longitud del segmento b es lo mismo que la longitud del segmento a.

Para pensar en la segunda pregunta, es posible arriesgar con un segmento u, cuya medida sea la mitad que la medida del segmento a: por ejemplo, un segmento como el siguiente:

Este segmento entra dos veces en a, o sea $a = 2\,u$, luego

$$a = 2u \text{ y } 2a = 3b \Rightarrow 2\cdot(2u) = 3b \Rightarrow 4u = 3b \Rightarrow b = \frac{4}{3}\,u$$

O sea u entra una vez y $\frac{1}{3}$ en b, es decir, no entra una cantidad entera de veces en el segmento b. Hay que partirlo.

Muy probablemente, si se sigue ensayando, resultará difícil encontrar dicho segmento u. Se puede pensar entonces en que u debe tener algún tipo de relación con a y b.

Como b entra una vez y media en a; si u entra 6 veces en a; entrará 4 veces en b. En consecuencia, si se elige u de manera tal que $6u = a$, se verifica que $2 \cdot 6u = 3b$ pues $2a = 3b$.

Por lo tanto $12u = 3b$. Luego $4u = b$. O sea, u entra una cantidad entera de veces también en b.

¿Es está la única posibilidad para u?

Por lo dicho anteriormente, si u entra 6 veces en a, entrará 4 veces en b. O sea

$$a = 6u \Rightarrow b = 4u$$

Si se supone, entonces, que u entra 12 veces en a, es decir $a = 12\,u$, se tiene que:

$$a = 12\,u \;\Rightarrow\; b = \frac{2}{3}\,a = \frac{2}{3} \cdot 12\,u = 8\,u$$

Si $a = 18\,u$, entonces $b = \frac{2}{3}\,a = \frac{2}{3} \cdot 18\,u = 12\,u$.

Es posible generar así distintos segmentos u que verifiquen lo pedido.

Un segmento u entra una cantidad entera de veces en otro segmento m, si no es necesario partir a u para medir m. Es decir, si existe un número entero k que verifica que $m = k \cdot u$.

En este caso se dice que si se toma como unidad de medida el segmento u, m mide k.

Por ejemplo, si u entra 3 veces en un segmento m, entonces $m = 3u$.

Si $a = 6k \cdot u$ con k cualquier número natural, se tiene que:

$$a = 6k\,u \Rightarrow b = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3} \cdot 6k\,u = 4k\,u$$

Con lo cual u entra $4k$ veces en b y como $4k$ es entero, u entra un número entero de veces en b.

Se concluye entonces que hay infinitos segmentos u que cumplen con la condición pedida.

Problema 11

Si al elegir un segmento n como unidad de medida se obtiene que un segmento a mide 5 veces el segmento n y otro segmento b mide 7 veces el segmento n:

a. ¿Cuál es la medida del segmento a si se considera al segmento b como unidad de medida?

b. ¿Cuál es la medida del segmento b si se considera al segmento a como unidad de medida?

A partir del enunciado, es posible escribir las relaciones entre a y n y entre b y n de la siguiente manera: $a = 5n$ y $b = 7n$.

Luego:

$$\frac{a}{5} = n \quad \text{y} \quad \frac{b}{7} = n$$

Con lo cual:

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7}$$

De donde se concluye que $7a = 5b$. Esta última expresión es la que permite responder las preguntas **a.** y **b.**:

$$a = \frac{5}{7}b \quad \text{y} \quad b = \frac{7}{5}a$$

Es decir, si se considera al segmento b como unidad de medida, el segmento a mide $\frac{5}{7}$ de la medida del segmento b. Si se considera al segmento a como unidad de medida, el segmento b mide $\frac{7}{5}$ de la medida del segmento a.

Problema 12

a. ¿Existe un número que entre una cantidad entera de veces en $\frac{1}{2}$ y en $\frac{3}{4}$?

b. ¿Existe un número que entre una cantidad entera de veces en $\frac{1}{3}$ y en $\frac{1}{2}$?

Como $\frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$ entonces la fracción $\frac{1}{4}$ entra 2 veces en $\frac{1}{2}$ y 3 veces en $\frac{3}{4}$.

Para analizar el item **b.** se puede escribir ambas fracciones, con fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador, así por ejemplo:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = 2 \cdot \frac{1}{6} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = 3 \cdot \frac{1}{6}$$

Con lo cual el número $\frac{1}{6}$ entra dos veces en $\frac{1}{3}$ y tres veces en $\frac{1}{2}$.

ACTIVIDADES

9. Si m y n son dos segmentos que verifican que $3m = 7n$. Encuentren un segmento v que entre una cantidad entera de veces en m y una cantidad entera de veces en n.

10. Si a y b son dos segmentos que verifican que $4a = 9b$ y u un segmento que entra 11 veces en el segmento a. ¿Es posible que u entre una cantidad entera de veces en el segmento b?

11. Dadas dos fracciones cualesquiera, ¿es posible que exista siempre una fracción que entre una cantidad entera de veces en cada una de ellas?

Los números irracionales

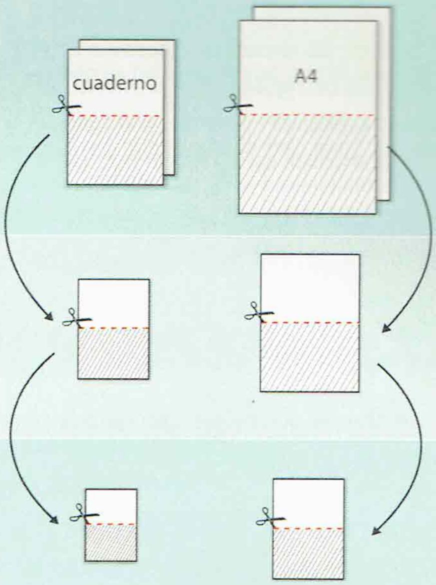
Problema 13

Conseguir dos hojas tamaño A4 y dos hojas de tamaño de un cuaderno de 21cm x 17cm y realizar la siguiente experiencia:

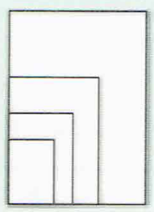
1°: Tomar una de las hojas de cada tamaño y cortarla por la mitad. La otra se conserva entera.

2°: Tomar una de las mitades de cada tamaño obtenidas en el paso anterior y nuevamente cortarla por la mitad.

3°: Tomar uno de los cuartos obtenidos en el paso anterior y partirlo al medio nuevamente.
Continuar el proceso, sucesivamente, hasta obtener 5 cortes.



4°: Ubicar las hojas como se muestra en la siguiente figura:



Si los cortes se realizan según las instrucciones, al colocar los papeles obtenidos del modo indicado se observa que todos los rectángulos obtenidos a partir de la hoja A4 comparten la diagonal. En cambio los rectángulos obtenidos a partir de la hoja de cuaderno no comparten la diagonal.
¿Cuál es el motivo por el cual en la hoja A4 los cortes arman rectángulos que parecen compartir la diagonal y la hoja de cuaderno no?
¿Qué relación debe existir entre los lados de una hoja, para que todos los rectángulos obtenidos a partir de dividir por la mitad, tengan la diagonal sobre la misma recta?

Al realizar los cortes pedidos en la hoja, se pueden obtener las siguientes relaciones:

Cantidad de cortes	Lado más largo del rectángulo	Lado más corto del rectángulo	$\frac{\text{lado más largo}}{\text{lado más corto}}$
0	29,7 cm	21 cm	1,4142857...
1	21 cm	14,85 cm	1,41414141 ...
2	14,85 cm	10,5 cm	1,414285714...

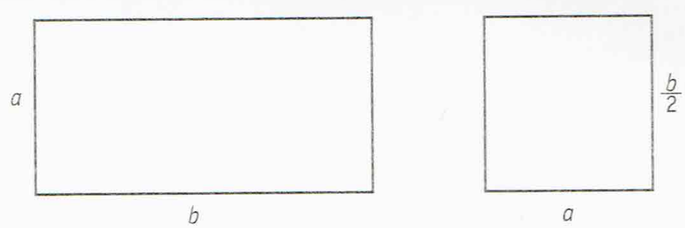
Es decir, los cocientes respectivos entre el lado más largo y el lado más corto de cada rectángulo son casi iguales, si se considera que la pequeña diferencia se debe a las aproximaciones realizadas. Entonces para que las diagonales se compartan, los cocientes deben ser iguales.

Si se analizan estos cocientes en la hoja de cuaderno , se obtiene:

Cantidad de cortes	Lado más largo del rectángulo	Lado más corto del rectángulo	$\frac{\text{lado más largo}}{\text{lado más corto}}$
0	20,5 cm	15,7 cm	1,305732484...
1	15,7 cm	10,25 cm	1,531707317...

Se observa que no son casi iguales como en la hoja A4, es por este motivo que no se comparten las diagonales en esta hoja.

Como cada nuevo corte da origen a un rectángulo cuyo largo tendrá la longitud del ancho del rectángulo anterior y cuyo ancho medirá la mitad del largo de la hoja anterior, la situación se puede representar de la siguiente manera:



Para que los rectángulos resultantes compartan la diagonal, como en la hoja A4, los rectángulos deben ser semejantes, entonces los lados de la hoja deben verificar que:

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{\frac{b}{2}}$$

A partir de esta expresión, es posible deducir que:

$$b \cdot \frac{b}{2} = a \cdot a$$

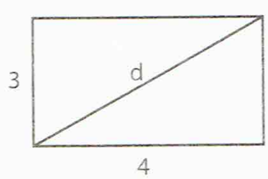
$$\frac{b^2}{2} = a^2$$

$$\frac{b^2}{a^2} = 2$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2$$

Se deben buscar números a y b que verifican $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2$.

Si se considera un rectángulo de lados 3 cm y 4 cm, es posible determinar la medida de su diagonal.



Por el Teorema de Pitágoras

$d^2 = 3^2 + 4^2$, por lo tanto

$d = \sqrt{9+16} = 5$

Esto permite afirmar que, si se usa como unidad de medida el lado de 4 cm, la diagonal del rectángulo mide 1 vez y $\frac{1}{4}$ la longitud de dicho lado.

Se pudo medir la diagonal usando un lado como unidad de medida, por que existe un número racional que multiplicado por el lado da la diagonal.

Es posible suponer que a y b son números enteros que verifican la condición anterior y tales que la fracción $\frac{b}{a}$ es irreducible. Como $\frac{b^2}{a^2} = 2$, se cumple entonces que: $b^2 = 2a^2$

Esta igualdad indica que b^2 es un número par y por lo tanto b es un número par. Entonces existe un número entero k tal que:

$$b = 2k$$

Luego:

$$2\,a^2 = (2k)^2 \;\Rightarrow\; 2\,a^2 = 4\,k^2 \;\Rightarrow\; a^2 = 2\,k^2$$

La última expresión obtenida indica que a^2 también es un número par, por lo que a también lo es.

Por lo analizado hasta aquí, a y b son números pares; con lo cual la fracción $\frac{b}{a}$ se puede simplificar dividiendo numerador y denominador por 2. Pero se había comenzado el desarrollo suponiendo que la fracción $\frac{b}{a}$ era irreducible, con lo cual no se podía simplificar. Esta contradicción señala que no hay ningún par de números a y b que cumplan con la condición pedida. El *absurdo* se produjo por suponer que existe una fracción $\frac{b}{a}$ cuyo cuadrado es 2. Se concluye que no existe ningún número racional que elevado al cuadrado dé 2. O sea el número $\sqrt{2}$ no puede ser expresado como una fracción.

Los números que no pueden ser expresados como fracción, es decir, que no son el cociente entre dos números enteros se denominan *números irracionales*.
Estos números se representan mediante expresiones decimales con infinitas cifras decimales no periódicas.

Por ejemplo: $\sqrt{2}$; 3,123456789101112131415........ son números irracionales.

El número Pi

Algunos de éstos números, por ser tan particulares, tienen nombres que los identifican, por ejemplo el número **"pi"** cuya escritura es la siguiente: π.

Para averiguar cuál es el valor de π se dibuja una circunferencia; se marca su centro y su radio. Se realiza un corte y se la estira, hasta obtener un segmento, como se muestra en el dibujo:

Un número entero es par si puede escribirse como el producto de otro número entero y 2. Simbólicamente:
n es par $\Leftrightarrow$ existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2m$.

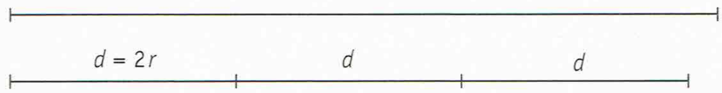
Si n es un número entero, se verifica que:
n es par $\Leftrightarrow n^2$ es par.

Si se considera el cuadrado de lado 1, resulta imposible medir su diagonal usando como unidad de medida dicho lado, pues si el lado es de 1 cm, la diagonal mide: $d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
Como no existe ningún número racional tal que $k \cdot 1 = \sqrt{2}$, no se puede medir la diagonal del cuadrado usando como unidad de medida de lado.

Para calcular la longitud de una circunferencia, es posible utilizar la relación entre el diámetro y dicha longitud.
Es decir, si se designa con la letra L a la longitud, y con d al diámetro se verifica que:

$$L = \pi \times d$$

Al igual que buena parte de lo que trata este capítulo, una vez más, si se intenta determinar cuántas veces entra el diámetro en la longitud de dicha circunferencia, no será tarea sencilla:



Se puede observar que el diámetro entra 3 veces en la longitud de la circunferencia, y sobra un poquito. Este hecho se descubrió hace muchos años, y, aunque aquí no se demuestra, se sabe que ese poquito más es imposible de ser determinado fraccionando el diámetro. Es decir, si se trata de medir la longitud de la circunferencia usando como unidad de medida el diámetro, esta medida no se puede establecer ya que no es un número racional. Se llama número π a la cantidad de veces que entra el diámetro en la longitud de una circunferencia. π es un número irracional, y, algunas de sus cifras son las siguientes:

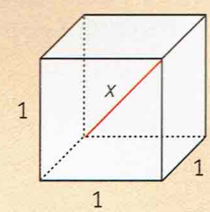
$$3{,}14159265358979323846264338327 9....$$

Este número tiene infinitas cifras decimales no periódicas. Muchas veces se usa 3,14 o 3,141 como valor de π, obteniendo, de esa manera, resultados aproximados.

Problema 14

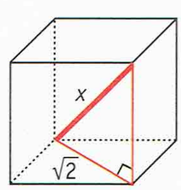
El siguiente dibujo representa un cubo de 1 cm de arista.

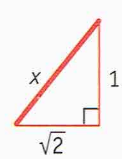
¿Cuál es la longitud del segmento que une un vértice con el vértice opuesto, tal como se muestra en el dibujo?



La base del cubo es un cuadrado de 1 cm de lado. Por el Teorema de Pitágoras su diagonal mide $\sqrt{2}$.

Queda entonces determinado un nuevo triángulo rectángulo formado por la diagonal de la base, una arista y el segmento del cual se debe determinar la longitud:





Por el Teorema de Pitágoras, $x^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3$.

Por lo tanto, la longitud del segmento $x = \sqrt{3}$.

En el transcurso de este capítulo se han encontrado números cuyo desarrollo decimal es infinito y no periódico. Esos números no son racionales porque para ello deberían tener desarrollos decimales finitos o periódicos. Son irracionales.

$\sqrt{2}$ no puede expresarse como una fracción, por lo tanto tampoco es un número racional.

Hasta ahora se han visto números irracionales escritos como decimales donde queda claro que no hay un período. Por ejemplo, el número 2,01001000100001... no tiene un período debido a que la cantidad de ceros va aumentando y se sabe cómo continúa su desarrollo. Es entonces, un número irracional. Sin embargo, no puede afirmarse si el número 1,725896542894... es irracional o no porque no se sabe cómo continúa. Si en algún lugar tiene un período será racional y si no lo tiene será irracional.

Una cuestión sobre la que es interesante indagar es sobre qué forma tienen los números irracionales.

Problema 15

a. ¿Todo número que se expresa como raíz cuadrada de un número racional es irracional?

b. ¿Es cierto que las raíces cuadradas de números primos son siempre irracionales?

No es cierto que cualquier número que se exprese como raíz cuadrada de un número racional sea irracional. Por ejemplo, $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$, es un número racional.

En algunos casos, no es evidente si el número dado es racional o no. Por ejemplo, $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$. Si se usa la calculadora para hallar cada raíz resulta que $\sqrt{20} = 4{,}472135955$ y $\sqrt{5} = 2{,}236067977$. Pero no se sabe si estos números siguen o terminan, con lo cual tampoco se sabe muy bien si su cociente será racional o no.

Una manera de analizar la respuesta es buscar una expresión equivalente:

$$\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4 \times 5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4}\,\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{4} = 2$$

Pareciera entonces, que algunas raíces son irracionales mientras que otras no. Pero, *¿cuáles son irracionales?*

Para comenzar a analizar esta cuestión puede comenzarse con un ejemplo, un caso particular. *¿El número $\sqrt{3}$ es o no irracional?*

De la misma manera que se desarrolló la demostración para $\sqrt{2}$, se puede suponer que $\sqrt{3}$ es racional, con lo cual podrá escribirse como una fracción irreducible, $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ con $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{N}$. Luego: $\sqrt{3} = \frac{a}{b} \iff \frac{a^2}{b^2} = 3 \iff a^2 = 3b^2$

Como todo número entero puede expresarse como un producto de números primos y además, cuando se eleva un número al cuadrado, cada factor primo aparece una cantidad par de veces; se deduce que: a^2 y b^2 seguro tienen una cantidad par de factores 3.

Con lo cual, $3b^2$ tiene una cantidad impar de factores 3 y entonces $3b^2$ no puede ser igual a a^2.

El absurdo provino de suponer que $\sqrt{3}$ podía expresarse como fracción. Luego, $\sqrt{3}$ es un número irracional.

El mismo razonamiento puede usarse para un número que sea la raíz cuadrada de un número primo cualquiera.

La raíz n – ésima es distributiva respecto del producto y el cociente. En símbolos, si $a \geq 0$ y $b > 0$:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad \text{y} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Todo número entero puede expresarse de una única manera como producto de primos. Además, si a es un número entero tal que su desarrollo en factores primos es
$a = p_1{}^n \cdot p_2{}^m \cdot p_3{}^p \cdot p_4{}^q \ldots$
entonces $a^2 = (p_1{}^n \cdot p_2{}^m \cdot p_3{}^p \cdot p_4{}^q \ldots)^2 =$
$= p_1{}^{2n} \cdot p_2{}^{2m} \cdot p_3{}^{2p} \cdot p_4{}^{2q} \ldots$
Como los exponentes son todos pares, cada factor primo está una cantidad par de veces.

La raíz cuadrada de un número primo es siempre un número irracional.

Los números reales

Propiedades

En las páginas precedentes se han presentado diferentes conjuntos numéricos.

El conjunto formado por los números naturales, los enteros, los racionales y los irracionales forman un nuevo conjunto de números conocido con el nombre de *números reales* y se los representa con la letra $\mathbb{R}$.

A continuación se tratarán algunos problemas que recurren a los diferentes conjuntos numéricos.

Problema 16

Es sabido que si se suma 10 + 6 el resultado es 16.
¿Es posible restar un número al 10, de manera tal que el resultado también sea 16? Es decir, ¿existe algún número n que verifique que $10 - n = 16$?

Evidentemente, es imposible encontrar un número natural que cumpla esta condición. Con lo cual este problema no tiene solución dentro del conjunto de números naturales.

Pero si se piensa en el uso de los números enteros, en este caso, si es posible hallarlo, pues $10 - (-6) = 16$. Es decir, a 10 hay que restarle -6.

Simbólicamente: $10 - n = 16 \Rightarrow 10 - 16 = n \Rightarrow -6 = n$

Problema 17

¿Es posible encontrar un número que, multiplicado por 5, dé como resultado 13?

Resulta imposible determinar una solución dentro del conjunto de los números naturales o enteros.

En cambio, si se recurre a los números racionales, se trata de resolver la siguiente ecuación:

$$5 \cdot a = 13 \Rightarrow a = \frac{13}{5}$$

El único valor que puede adquirir a es $\frac{13}{5}$.

Problema 18

¿Es posible encontrar un número que, elevado al cuadrado, dé como resultado 7?

Ningún número entero, o racional elevado al cuadrado da por resultado 7.

Este problema se traduce de la siguiente manera: hay que buscar un número x que verifique:

$$x^2 = 7$$

Hay dos números que verifican esa condición, ellos son:

$$x = \sqrt{7} \text{ o bien } x = -\sqrt{7}$$

pues: $(\sqrt{7})^2 = 7$ y $(-\sqrt{7})^2 = 7$

Es decir, existen dos números que elevados al cuadrado dan 7, estos son $\sqrt{7}$ y $-\sqrt{7}$.

Todos los números naturales son también enteros, y estos últimos son también racionales. Los números naturales, enteros y racionales son números reales. Otra manera de expresar lo anterior es: los números naturales están incluidos dentro del conjunto de números enteros. Los números enteros están incluidos dentro de los números racionales. Los números racionales están incluidos dentro de los números reales.
Todo esto, en símbolos, se escribe:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Los números reales se forman con los números racionales y los irracionales. Es decir,

$$\mathbb{I} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

Si a, b y c son números reales y se verifica que:

$$a + b = c$$

entonces:

$$a = c - b$$

Si a, b y c son números reales, b es distinto de cero y se verifica que:

$$a \times b = c$$

entonces:

$$a = \frac{c}{b}$$

Si a es un número real positivo y $x^2 = a$ entonces: $x = \sqrt{a}$ o $x = -\sqrt{a}$

Problema 19

¿Existe algún número irracional cercano a $\sqrt{2}$? ¿Y alguno que se encuentre próximo al número π?

Si bien no se va a demostrar que los siguientes números son irracionales, el modo en que se construyen permite imaginar que sí lo son, es decir, que tendrán infinitas cifras decimales no periódicas.

Como $\sqrt{2} = 1{,}41421356237.....$, es posible construir un número irracional cercano de la siguiente manera: tomar un número que tenga la misma parte entera que $\sqrt{2}$ y que comparta los primeros 7 dígitos después de la coma. A partir de allí escribir en orden todos los números impares comenzando en 7.

$$1{,}4142135791113151719212325272 9....$$

Este número es irracional porque tiene infinitas cifras no periódicas. El número que se obtuvo es mayor que $\sqrt{2}$ porque la primera cifra diferente es más grande.

Del mismo modo se puede generar un número irracional menor que $\sqrt{2}$, para ello basta con comenzar la serie de números impares en uno que sea menor a 6. Por ejemplo si se comienza en 5 se obtiene

$$1{,}41421355791113151719212325272 9....$$

Si se considera el número $\pi = 3{,}14159265358979323846264338327 9...$, es posible armar un nuevo número irracional de la siguiente manera:

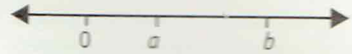
Se toma un número que tenga las primeras 13 cifras coincidentes con π.
A partir de allí se ubican todos los números enteros empezando en 10, queda:

$$3{,}14159265358910111213141516171819202122$$

El número resultante es irracional porque tiene infinitas cifras no periódicas y está próximo a π porque comparten las trece primeras cifras.

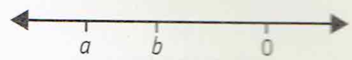
Los procedimientos empleados pueden usarse cada vez que se quiera "encerrar" un número racional o irracional entre otros dos. En este caso se eligió que compartan los ocho o los trece primeros dígitos; pero se podría haber elegido que compartan cualquier otra cantidad de cifras.

En algunas situaciones se hace necesario comparar números reales.
En el conjunto de los números reales positivos es más chico el que está más cerca del 0.



En el conjunto de los números reales negativos es más chico el que está más alejado del 0.

$a < b$



En general, un número a es menor que otro número b si a esta ubicado en la recta numérica a la izquierda de b.

12. Si a es un número real positivo que verifica que $81 < a < 100$. ¿Entre qué números se encuentra $\sqrt{a}$?

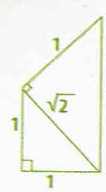
13. ¿Es cierto que si b es un número real mayor que 0 se verifica que $\sqrt{b} = \frac{b}{\sqrt{b}}$?
Expliquen la decisión que tomaron.

14. ¿Qué valores puede tomar m de manera tal que se verifique que $\frac{\sqrt{3}}{m} \leq 1$?

15. Determinen en cada caso, si es posible escribir a los siguientes números como fracción:

a. $\sqrt{5}$ **b.** $\sqrt{7}$ **c.** $\sqrt{\frac{9}{4}}$

16. Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos lados miden 1cm cada uno, es $\sqrt{2}$, determinen la medida de la hipotenusa del segundo triángulo rectángulo dibujado:



17. A partir del ejercicio anterior, dibujen un segmento cuya longitud sea $\sqrt{5}$.

Biblioteca Pública Municipal
Gral. MANUEL BELGRANO
Calle 222 - Nº. 1493
7600 Mar del Plata

Los números reales y la recta numérica

En una recta numérica se pueden representar los números naturales, los enteros, los racionales, es factible ubicar también a los irracionales. El problema que se plantea es cómo hacer para representar algunos de ellos.

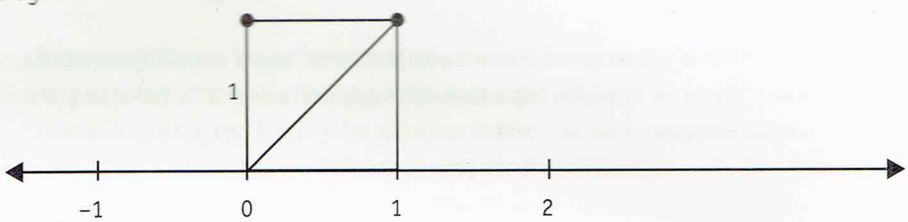
Problema 20

Ubicar el número $\sqrt{2}$ en una recta numérica.

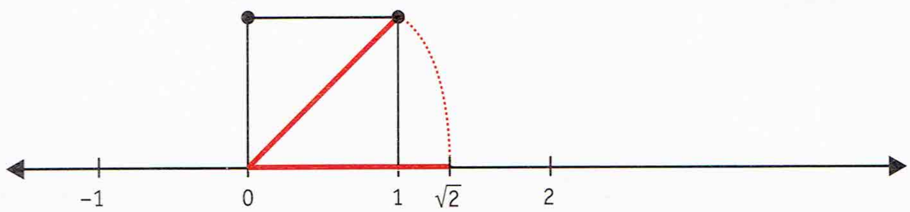
Para ubicar el número $\sqrt{2}$ en la recta numérica se puede proceder de la siguiente manera:

a. Se dibuja una recta y en ella se señalan algunos números, además del 0 y el 1.

b. Sobre el segmento que va de 0 a 1 se dibuja un cuadrado de longitud 1. Se marca la diagonal de dicho cuadrado.



c. Por el Teorema de Pitágoras, la diagonal del cuadrado mide $\sqrt{2}$. Esta medida puede ser transportada con el compás sobre la recta:



En una recta numérica se ubican todos los números reales. A cada número real le corresponde un punto de la recta y a cada punto de la recta le corresponde un número real.

Esta construcción muestra que hay un punto en la recta numérica que corresponde a $\sqrt{2}$. Es posible asegurar que el valor marcado es $\sqrt{2}$, ya que se dibujó una circunferencia de radio $\sqrt{2}$ centrada en 0. Se encontró entonces un punto de la recta que no se corresponde con ningún número racional. Es decir, la recta no estaba totalmente ocupada por números racionales. Al considerar los números irracionales, se completa la recta.

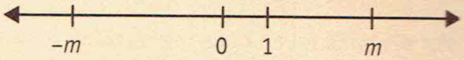
Algunos puntos de la recta son ocupados por los naturales, otros por los enteros, otros por los racionales y, finalmente, con los irracionales se termina de llenar la recta.

Distancia entre números reales. Intervalos de números

Problema 21

En la siguiente recta están representados: el número 0, el número 1, el número positivo m y el número $-m$.

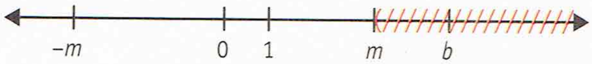
Ubicar en la misma recta todos los números, que se encuentren a mayor distancia del 0 que m.



Para designar a todos los números reales mayores que m se escribe todos los x tales que $x > m$. El intervalo que contiene a todos estos números es $(m\,;+\infty)$. Análogamente, el intervalo que contiene a todos los números menores que m es $(-\infty\,;m)$.

La distancia entre 0 y m es m. La distancia entre $-m$ y 0 también es m.

Si se toma un número b que sea mayor que m, éste estará a mayor distancia del 0 que m. Es más, todos los números que se encuentren a la derecha de m sirven:



Para describir al conjunto de todos los números reales que son mayores que un número m se escribe:

$b \in (m\,;+\infty)$ y significa que los números b son mayores que m.

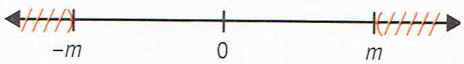
Si además se quiere incluir al extremo m se escribe:

$b \in [m\,;+\infty)$ y significa que los números b son mayores o iguales que m.

Por otro lado, si se ubica b a la izquierda de $-m$, su distancia al 0 será también mayor que m.

El conjunto de todos los números reales b que verifican que la distancia al 0 es mayor que m es:

$(-\infty\,;-m) \cup (m\,;+\infty)$



El símbolo $\in$ significa pertenece.
El símbolo $\notin$ significa no pertenece.

La escritura $(m\,;+\infty)$ se denomina intervalo abierto en m.

Se denomina *intervalo abierto* a la escritura $(a\,;b)$ y significa que se consideran todos los números reales x que se encuentran entre a y b.
Simbólicamente:

$$x \in (a\,;b) \text{ si } a < x < b$$

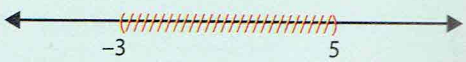
Se denomina *intervalo cerrado* a la escritura $[a\,;b]$ y significa que se consideran todos los números reales x que se encuentran entre a y b incluyendo al a y al b.
Simbólicamente:

$$x \in [a\,;b] \text{ si } a \le x \le b$$

Se denomina longitud del intervalo a la distancia entre el número menor y el mayor de un intervalo.
La longitud del intervalo $(a\,;b)$ es $b-a$.

Por ejemplo:

Si se escribe $x \in (-3\,;5)$ se está indicando que: $-3 < x < 5$



Si se escribe $x \in [-3\,;5]$ se está indicando que: $-3 \le x \le 5$

Módulo de un número real

Se llama *módulo o valor absoluto* de un número real, a la distancia que hay entre ese número y el 0.
En símbolos el módulo de un número real a se escribe $|a|$.

Por ejemplo, $|4| = 4$, pues la distancia entre 0 y 4 es de 4 unidades, si se toma como unidad de medida la distancia entre 0 y 1.

Como la distancia que hay entre -4 y 0 es la misma que la que hay entre 4 y 0, entonces $|-4| = 4$.

Problema 22

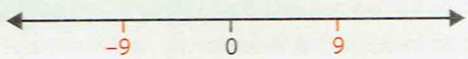
Representar en la recta numérica todos los números reales que verifiquen lo pedido:

a. $|c| = 9$

b. $|c| < 9$

c. $|c| > 9$

Para buscar los números c que verifican $|c| = 9$, hay que buscar los números que estén a distancia 9 del 0. Esos números son: 9 y -9. Luego



Si a es un número positivo y $|x| = a$, entonces hay dos posibilidades para el valor de x:

$x = a$ o $x = -a$

También vale que si $x = a$ o $x = -a$, entonces $|x| = a$.

Si $|x| = 0$ entonces $x = 0$.

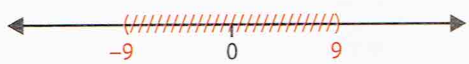
Si $|c| < 9$ entonces la distancia entre c y 0 es menor que 9. Por lo tanto, todos los números positivos menores que 9 son solución. Es decir, $c < 9$.

Además, c no puede estar a la izquierda de -9, pues su distancia al 0 sería mayor que 9. Con lo cual, $c > -9$.

c debe verificar entonces que $c < 9$ y $c > -9$, es decir:

$$-9 < c < 9 \text{ o bien } c \in (-9\,;\,9)$$

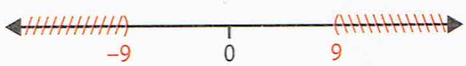
Y se puede representar en la recta de la siguiente manera:



Si a es un número positivo y $|x| < a$ entonces $-a < x < a$, es decir $x \in (-a\,;\,a)$.

También es cierto que si $-a < x < a$, entonces $|x| < a$.

De la misma manera se puede pensar que el conjunto de números c que verifican $|c| > 9$ son todos los números c cuya distancia al 0 es mayor que 9. En la recta numérica se puede representar de la siguiente manera:



Es decir, son los números c que verifican que $c < -9$ o que $c > 9$

$$c \in (-\infty\,;\,-9) \cup (9\,;\,+\infty)$$

Si a es un número positivo y $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ o $x < -a$, es decir: $x \in (-\infty\,;\,-a) \cup (a\,;\,+\infty)$.

De lo visto anteriormente se concluye que:

Si a es un número real positivo se verifica que:

$|x| = a \Leftrightarrow x = a$ o $x = -a$

$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ o sea $x \in (-a\ ;\ a)$

$|x| > a \Leftrightarrow x > -a$ o $x < a$ es decir $x \in (-\infty\ ;\ -a) \cup (a\ ;\ +\infty)$

Problema 23

Representar en la recta numérica todos los números reales que verifiquen lo pedido:

a. $|k - 2| < 5$ **b.** $|k + 2| \geq 6$

Para buscar números k que verifiquen $|k-2| < 5$, se puede ensayar primero con algunos números.

Valor de k	Valor de $\lvert k - 2\rvert$	
8	$\lvert 8-2\rvert = \lvert 6\rvert = 6$	No sirve pues $6 > 5$
3	$\lvert 3-2\rvert = \lvert 1\rvert = 1$	Sirve pues $1 < 5$
-2	$\lvert -2-2\rvert = \lvert -4\rvert = 4$	Sirve pues $4 < 5$
-5	$\lvert -5-2\rvert = \lvert -7\rvert = 7$	No sirve pues $7 > 5$

Si a y b son dos números reales y $a > b$ entonces es cierto que

$$\begin{cases} -a < -b \\ b < a \\ -b > -a \end{cases}$$

Como $|k - 2| < 5$ entonces $k - 2$ debe estar entre -5 y 5, o sea:

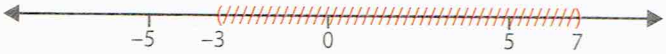
$$-5 < k - 2 < 5$$

Luego debe verificarse que:

$$k - 2 < 5 \Rightarrow k < 7$$
$$k - 2 > -5 \Rightarrow k > -3$$

Es decir: $-3 < k < 7$ o bien $k \in (-3\ ;\ 7)$

Estas soluciones se representan en la recta numérica de la siguiente manera:



La distancia entre un número a y un número b se obtiene a partir de encontrar $|a - b|$.

Por ejemplo, la distancia entre -3 y 12 se determina encontrando $|12 - (-3)| = |12 + 3| = |15| = 15$

A partir del gráfico puede verse que todos los números que son solución están a distancia menor que 5 del 2. Esto permite interpretar a $|k-2|$ como la distancia que hay entre k y 2. La inecuación pedía entonces hallar todos los números que están a menor distancia de 5 que 2.

Si se buscan valores de k que verifiquen $|k + 2| \geq 6$. Entonces:

$$k + 2 \geq 6 \Rightarrow k \geq 4 \quad \text{o} \quad k + 2 \leq -6 \Rightarrow k \leq -8$$

Luego: $k \in (-\infty\ ;\ -8] \cup [4\ ;\ +\infty)$

18. Decidan si son ciertas o no cada una de las siguientes proposiciones:

a. Si $|m - 2| = 0$ entonces $m = 2$ o $m = -2$.

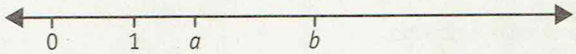
b. Si $|2h| \leq 2$ entonces $h \in [-1\ ;\ 1]$.

c. Para cualquier número real n, $|3n + 4| > 0$.

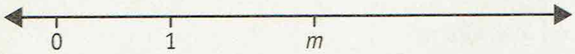
d. Si $|b - 12| > 4$, entonces $b > 16$ o $b < 8$.

ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN

19. Ubiquen en la siguiente recta los números $2\,a$; $\frac{b}{3}$, $\frac{2a+b}{3}$



20. Determinen qué número está representado con la letra m en la siguiente recta numérica:



21. Decidan en cada caso qué valores positivos puede tomar $n > 0$ para que se cumpla la desigualdad:

a. $\frac{9}{5} < \frac{n}{5}$ **b.** $\frac{11}{7} < \frac{7}{n}$

c. $\frac{8-n}{3} < \frac{8}{3}$ **d.** $\frac{4}{11} < \frac{4}{11-n}$

22. ¿Cómo harían para explicar que, para cualquier valor de $n > 0$ se verifica que $\frac{n}{n+1} < 1$?

23. Si se sabe que dos segmentos A y B verifican que 3 segmentos A miden lo mismo que 4 segmentos B.

a. ¿Cuánto mide el segmento A si se toma como unidad de medida el segmento B?

b. ¿Cuánto mide el segmento B si se toma como unidad de medida el segmento A?

24. Si m y n son dos segmentos que verifican que $5\,m = 11\,n$. Encuentren un segmento u de manera tal de que entre una cantidad entera de veces en m y a su vez entre una cantidad entera de veces en n.

25. a. ¿Cuántas fracciones con denominador 2 hay entre 5 y 6?

b. ¿Cuántas fracciones con denominador 5 hay entre 5 y 6? ¿Y con denominador 9?

26. ¿Habrá alguna fracción con denominador 4 que se encuentre entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$? ¿Y con denominador 5? ¿Y con denominador 10?

27. ¿Es posible encontrar dos números fraccionarios entre los cuales no exista ninguna fracción con denominador 4 pero sí exista alguna fracción con denominador 8?

28. Completen la siguiente tabla que relaciona la cantidad de agua en proporción a la cantidad de harina para preparar pizza:

Agua (en litros)	$\frac{5}{3}$			3	$\frac{7}{3}$	7	
Harina (en kilos)	1,5	3	1				x

29. Encuentren dos números racionales que estén a una distancia de 0,01 y entre ellos se encuentre el número $\sqrt{5}$.

30. Encuentren dos números reales cuya distancia al -2 sea $\frac{3}{2}$

31. a. Dibujen en una recta numérica todos los valores que puede tomar el número x que verifican que $|2x| = 7$.

b. ¿Cuáles son los valores de x que verifican que $|2x-1| = 7$

32. Encuentren, en cada caso, el o los valores de x que provocan que se cumpla la igualdad:

a. $|x-3| = 1$ **b.** $|2-x| = 3$

c. $|2x-1| = 0$ **d.** $|4x+3| = -1$

33. Señalen en una recta numérica, en cada caso, todos los posibles lugares que podría ocupar el número x sabiendo que verifica la condición planteada:

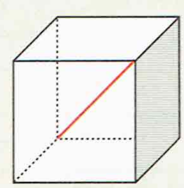
a. $|x-2| < 3$ **b.** $|2x| < 1$

c. $|3x| > 3$ **d.** $|x+4| < -3$

34. Ubiquen en una recta numérica los siguientes números: $-\frac{2}{3}$; $\sqrt{5}$; 4; $\sqrt{7}$.

35. Si se duplica el lado de un cuadrado, ¿es cierto que se duplica su diagonal? Expliquen su respuesta.

36. Dado el cubo de 4 cm de lado, determinen el valor del segmento marcado:



37. El siguiente segmento mide $\frac{2}{5}$ de una cierta unidad:

Construyan un segmento que mida $\frac{7}{10}$ de la misma unidad.

38. Usando la calculadora, encuentren un número cuya raíz cuadrada se encuentre entre 2,236 y 2,237.

39. a. Encuentren dos números racionales entre los cuales se encuentre el valor de $\sqrt{13}$ y que verifiquen que la distancia entre ambos números sea 0,2.

b. Encuentren dos números racionales entre los cuales se encuentre el valor de $\sqrt{13}$ y que verifiquen que la distancia entre ambos números sea 0,001.

AUTOEVALUACIÓN

1. De la lista de fracciones con denominador 7 que se presenta a continuación, señalen aquellas que se encuentran entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$:

- **a** $\frac{1}{7}$
- **b** $\frac{2}{7}$
- **c** $\frac{3}{7}$
- **d** $\frac{4}{7}$
- **e** $\frac{5}{7}$
- **f** $\frac{6}{7}$
- **g** $\frac{7}{7}$

2. Si se consideran dos segmentos a y b y se sabe que 3 veces el segmento a es igual a 7 veces el segmento b. ¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

- **a** $\frac{3}{7}a = b$
- **b** $\frac{7}{3}a = b$
- **c** $a = \frac{7}{3}b$
- **d** $a = \frac{3}{7}b$
- **e** $\frac{1}{7}$ entra una cantidad entera de veces en a y en b.
- **f** $\frac{1}{21}$ entra una cantidad entera de veces en a y en b.

3. ¿Cuál o cuáles de los siguientes pares de números racionales se encuentran a una distancia de 0,0002 y entre ellos se encuentra el número $\sqrt{3}$?

- **a** 1,73204 y 1,73206
- **b** 1,7319 y 1,7321
- **c** $\frac{17\,319}{10\,000}$ y $\frac{17\,321}{10\,000}$
- **d** $\frac{1731}{1000}$ y $\frac{1732}{1000}$

4. Señalen, en cada caso, el o los valores de x que verifican la condición planteada:

A. $|x-4| = 7$

- **a** $x = -3$ y $x = -7$
- **b** $x = -3$ y $x = 11$
- **c** $x = 11$ y $x = -7$
- **d** Ninguna de las anteriores.

B. $|2x+8| = 14$

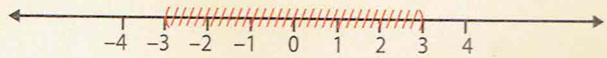
- **a** $x = 11$ y $x = 3$
- **b** $x = -11$ y $x = 3$
- **c** $x = -11$ y $x = -3$
- **d** Ninguna de las anteriores.

C. $|-3x+1| < 5$

- **a** $x > 2$ y $x < -\frac{4}{3}$
- **b** $x < 2$ y $x > -\frac{4}{3}$
- **c** $x > -2$ y $x < \frac{4}{3}$
- **d** Ninguna de las anteriores.

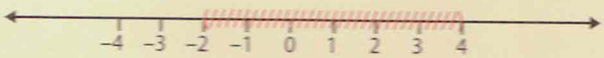
5. Señalen, en cada caso, la o las expresiones que representan a los números indicados en la recta numérica:

A.



- **a** $x < 3$
- **b** $-3 < x < 3$
- **c** $|x+3| > 0$
- **d** $|x| < 3$

B.



- **a** $|x-1| < 3$
- **b** $|x+2| > 4$
- **c** $x < 4$
- **d** $-2 < x < 4$

6. Señalen el par de números cuya distancia es un centésimo y entre ellos se encuentra el resultado de $\sqrt{7}$:

- **a** 2,645 ; 2,646
- **b** $\frac{264}{100}$; $\frac{265}{100}$
- **c** 2,6 ; 2,7
- **d** $2\sqrt{7}$; $3\sqrt{7}$

7. Dado un rectángulo de lados a y b y cuya diagonal sea d. Marquen la o las afirmaciones que sean correctas:

- **a** $d^2 = a^2 + b^2$
- **b** Si se duplican los lados del rectángulo, se duplica su diagonal.
- **c** Si se duplica el lado a y se triplica el lado b, se quintuplica la diagonal.
- **d** Si $a = 3$ y $b = 7$ entonces la diagonal es un número irracional.
- **e** Si $a = 3$ y $b = 5$ entonces la diagonal es un número entero.

CONTENIDOS

- Relaciones expresadas a través de gráficos y tablas
- Concepto de función: dominio, imagen, ceros, conjuntos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y decrecimiento
- Funciones y fórmulas
- Función inversa

Es muy frecuente en matemática que, al estudiar ciertos procesos, se busquen formas diferentes de representar las relaciones entre las magnitudes que intervienen, con el objetivo de analizar distintos aspectos. Una de estas formas es la confección de gráficos que muchas veces facilitan el análisis, ya que permiten una rápida visualización de las variaciones que se producen. En general se procura registrar los datos con una organización que permita tenerlos disponibles de una manera práctica. Los gráficos, tablas y fórmulas son maneras de representar las funciones y son una herramienta sumamente útil para describir procesos, sacar conclusiones sobre ellos y, en ciertos casos, hacer predicciones.

2 FUNCIONES

Problema 1

Un paciente entra en la sala de urgencias de un hospital para ser atendido por el aumento de su presión arterial. Durante un cierto tiempo se lo conecta a una máquina que le controla la presión continuamente y produce un gráfico.

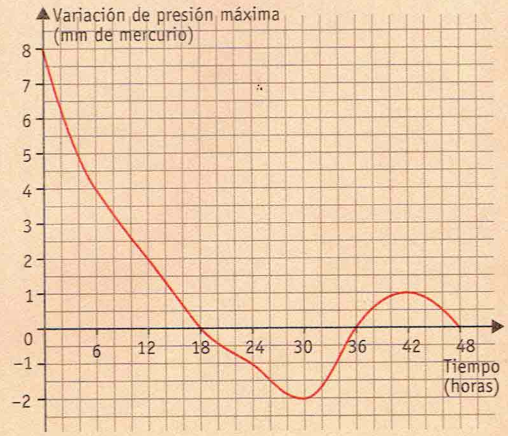
En él aparece representada la variación de la presión máxima del paciente, respecto de la considerada normal (12 mm de mercurio), a partir del momento de su internación.

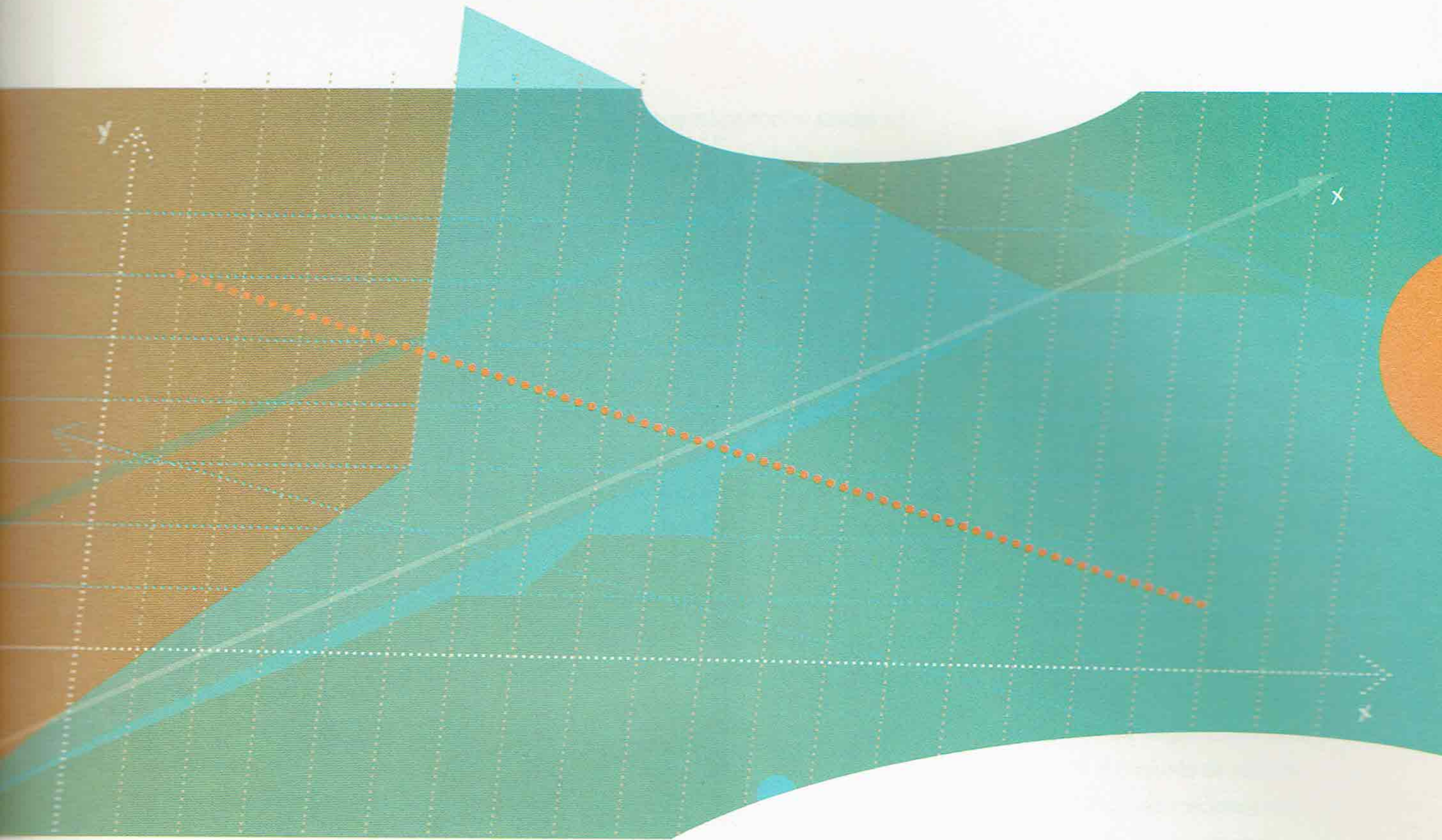
a. ¿Con qué presión máxima ingresó el paciente al hospital?

b. ¿Qué representan en este gráfico los valores negativos que figuran en el eje vertical?

c. ¿Tuvo presión máxima normal en algún momento durante su internación?

d. De acuerdo a lo que se observa en el gráfico, ¿durante cuánto tiempo estuvo este paciente en observación?





Como en el gráfico se representa la variación de la presión máxima respecto de la normal, considerada de 12 mm de mercurio, el punto (0 ; 8) indica que a las 0 horas de estar internado dicha variación era de 8 mm de mercurio. Esto significa que la presión máxima de esta persona era de 20 mm de mercurio en el momento de internación.

Los valores negativos corresponden a valores de presión máxima que son menores que 12 mm.

La tabla siguiente muestra algunos puntos tomados de la gráfica y la información que se obtiene a partir de ellos.

Punto de la gráfica	Información	Presión (mm de Hg)
(0 ; 8)	A las 0 horas de internación la variación de presión fue de 8 mm de mercurio.	12 + 8 = 20
(12 ; 2)	A las 12 horas de internación la variación de presión fue de 2 mm de mercurio.	12 + 2 = 14
(18 ; 0)	A las 18 horas de internación la variación de presión fue de 0 mm de mercurio.	12 + 0 = 12
(24 ; −1)	A las 24 horas de internación la variación de presión fue de −1 mm de mercurio.	12 − 1 = 11
(30 ; −2)	A las 30 horas de internación la variación de presión fue de −2 mm de mercurio.	12 − 2 = 10

La misma información puede interpretarse de maneras diferentes. El par ordenado (24 ; –1) está representado en la gráfica por un punto e indica que cuando *x* vale 24, *y* vale –1. En el contexto del problema, este par de números informa que a las 24 horas de internación la variación de presión máxima respecto de la normal fue de –1 mm de mercurio. Es decir: este dato puede leerse gráficamente, como par ordenado o en términos de la situación que se está analizando.

En el gráfico se observa que la curva se encuentra por encima del eje horizontal cuando la variación de la presión máxima respecto de la normal es positiva, es decir, cuando la presión máxima de esta persona es superior a 12 mm de mercurio.

El paciente tuvo presión máxima normal en los momentos en los que la variación respecto de ésta fue cero. Esta situación corresponde a los puntos de la curva cuya segunda coordenada es cero, es decir, a los puntos que se encuentran sobre el eje horizontal: a las 18, 36 y 48 horas luego de la internación.

En el eje horizontal, o eje de abscisas, se presenta, en este caso, el tiempo transcurrido desde el momento de internación. Como la gráfica está definida hasta la abscisa 48, se interpreta que el paciente fue observado durante 48 horas.

En un gráfico cartesiano, el eje horizontal se denomina *eje de abscisas* o *eje x* y el eje vertical se denomina *eje de ordenadas* o *eje y*.

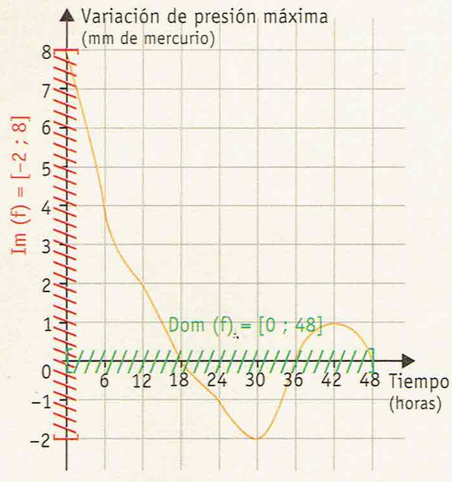
Funciones expresadas a través de gráficos y tablas

La situación anterior involucra una relación entre dos variables: la *variación de la presión máxima* de un paciente respecto de la considerada normal en función del *tiempo transcurrido* desde el momento de su internación. En esta situación, para cada instante de tiempo corresponde un valor de la variación de presión arterial máxima, ya que no es posible que una persona viva carezca de presión arterial máxima o que tenga más de un valor de presión arterial máxima en un instante dado. Es decir, este valor, para cada instante, existe y es único. Las relaciones entre variables que verifican estas condiciones se llaman *funciones*.

Una **función** es una relación entre dos magnitudes variables que verifica que a cada valor de una de ellas le corresponde un único valor de la otra.

En este caso, la función está definida para valores de abscisas que son números reales mayores o iguales que 0 y menores o iguales que 48. El conjunto formado por estos números es el *dominio de la función*.

Los valores de las ordenadas de los puntos que conforman la gráfica de esta función son los números reales mayores o iguales que –2 y menores o iguales que 8. El conjunto formado por estos números se llama *conjunto imagen de la función*.

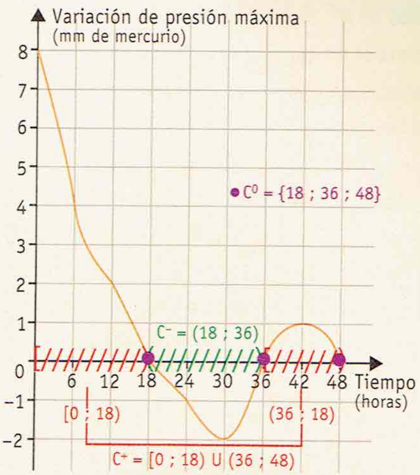


El **dominio** de una función es el conjunto de todos los valores de las abscisas que forman parte de la relación. Se simboliza *Dom(f)*.

El **conjunto imagen** de una función es el conjunto de todos los valores de las ordenadas que forman parte de la relación. Se simboliza ***Im(f)***.

Conjunto de ceros, de positividad y de negatividad

La variación de la presión arterial máxima es cero a las 18, 36 y 48 horas de internación. Esto se evidencia gráficamente en los puntos en los que la gráfica interseca al eje de abscisas. Estos valores conforman el *conjunto de ceros de la función*. Para los puntos con ordenadas positivas la gráfica se encuentra por encima del eje de abscisas; las abscisas de estos puntos constituyen el *conjunto de positividad de la función*. De modo similar, para los puntos que tienen ordenadas negativas, la gráfica está por debajo del eje *x*, y las abscisas de estos puntos constituyen el *conjunto de negatividad de la función*.



Las ***raíces*** o ***ceros*** de una función son los valores del dominio para los cuales la imagen es 0. Es decir, las abscisas de los puntos donde su gráfica se encuentra en el eje de abscisas. El conjunto de estos valores se llama **conjunto de ceros** y se simboliza C^0.

El **conjunto de positividad** de una función es el conjunto de valores del dominio cuyas imágenes son positivas. Es decir, las abscisas de los puntos de su gráfica cuyas ordenadas son positivas. Se simboliza C^+.

El **conjunto de negatividad** de una función es el conjunto de valores del dominio cuyas imágenes son negativas. Es decir, las abscisas de los puntos de su gráfica cuyas ordenadas son negativas. Se simboliza C^-.

Problema 2

En el Observatorio Central de Buenos Aires se midió la temperatura en distintos momentos del 30 de julio de 2005. La tabla siguiente muestra los datos registrados.

Hora	Temperatura
0	2°
2	3°
4	5°
6	7°
8	8°
10	11°
12	13°
14	13°
16	12°
18	10°
20	8°
22	5°
24	2°

a. ¿Cuál fue la temperatura a las 4 hs? ¿Y a las 17?
b. ¿A qué hora la temperatura fue de 8°?
c. ¿En algún lapso del día la temperatura se mantuvo estable?
d. ¿En qué períodos la temperatura ascendió y en cuáles descendió?
e. ¿Cuál fue la temperatura máxima de ese día? ¿A qué hora se registró?

En relación con las variables, el *dominio* de una función es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente y el *conjunto imagen* es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable dependiente.

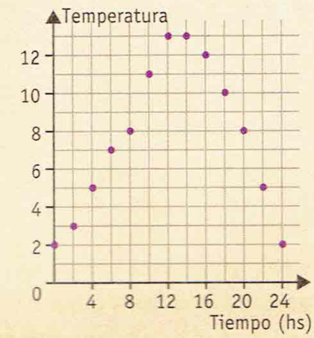
A partir de la tabla, se sabe que la temperatura a las 4 hs fue de 5°. Sin embargo, la tabla no informa la temperatura a las 17 hs. También se sabe que, tanto a las 8 hs como a las 20 hs, la temperatura fue de 8°. Pero, como en la tabla no se registró la temperatura de manera continua, no es posible saber si hubo otros momentos del día en los que la temperatura también haya sido de 8°. Si bien las temperaturas registradas a las 12 hs y a las 14 hs son iguales, no se informa si en ese intervalo la temperatura se mantuvo constante. Es decir, la información dada no es suficiente para responder cuándo la temperatura se mantuvo constante.

Las temperaturas registradas van en aumento hasta las 12 horas, llegando hasta los 13°, también es de 13° a las 14 hs y, a partir de esa hora, los valores disminuyen.

En este caso, la temperatura está expresada en función de algunas las horas del día, por eso, las horas constituyen la *variable independiente* y la temperatura, la *variable dependiente*.

El dominio de esta función es el conjunto $\{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20 ; 22 ; 24\}$ y la imagen es el conjunto $\{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 8 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13\}$.

Los datos de la tabla pueden trasladarse a un gráfico, que permite visualizar más fácilmente las variaciones. La tabla y el gráfico son dos maneras de representar una función.



Dada una función f:

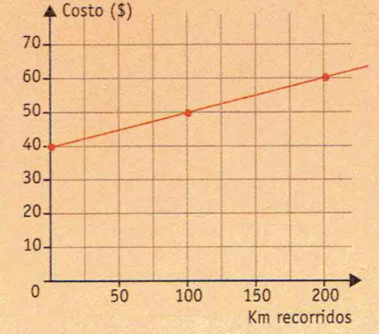
- la notación $f(a) = b$ indica que al elemento a del dominio le corresponde el elemento b de la imagen, es decir, que la *imagen de a es b*;
- la notación $f^{-1}(b) = a$ indica que el elemento b del conjunto imagen es el correspondiente del elemento a del dominio, es decir, que la *preimagen de b es a*.

Para simplificar la notación, en matemática se suele dar un nombre a la función, para evitar referirse al problema cada vez que se quiere plantear y responder una pregunta. Por ejemplo, si se llama t a la función que relaciona cada hora con la respectiva temperatura, para indicar que la temperatura a las 4 horas fue de 5°C se escribe $t(4) = 5$; para indicar que la temperatura fue de 12°C a las 16 horas, se escribe $t^{-1}(12) = 16$.

Problema 3

Pablo quiere alquilar un auto para llevar a sus hijos, Lautaro y Ramiro, de paseo. Averiguó dónde realizar el alquiler y encontró dos agencias. En la Agencia A, la tarifa es de $ 0,50 por km recorrido, sin ningún gasto extra. Las tarifas de la Agencia B se indican a través de la siguiente gráfica, que se continúa con la misma regularidad, aunque no esté dibujada.

¿Qué agencia le conviene elegir a Pablo?



El análisis comparativo resulta dificultoso, debido a que las tarifas de las dos agencias están informadas de manera diferente. En casos como éste resulta útil expresar las dos tarifas de la misma manera.

En el gráfico se identifican los puntos (0 ; 40), (100 ; 50) y (200 ; 60). La información que se obtiene de las coordenadas de estos puntos puede volcarse en una tabla como la siguiente.

Distancia recorrida (km)	Costo del alquiler ($)
0	40
100	50
200	60

A partir de la tabla, se concluye que la Agencia B cobra un costo fijo de $ 40, al cual se agregan $ 10 por cada 100 km recorridos. Por lo tanto, el costo por kilómetro recorrido es de $ 0,10.

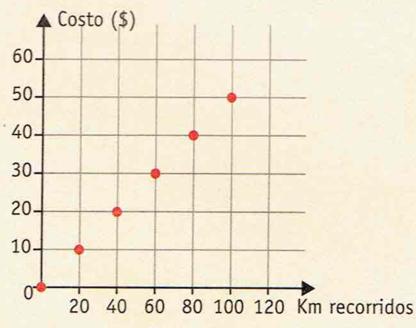
En la tabla siguiente se indican los precios de ambas agencias.

Agencia A	Agencia B
no cobra costo fijo	costo fijo de $ 40
$ 0,50 por km recorrido	$ 0,10 por km recorrido

A pesar de que las tarifas ya están expresadas de la misma manera, aún es difícil hacer una comparación entre ellas. Si bien en la Agencia B hay un costo fijo que no hay en la A, el precio por kilómetro usado en B es menor que en A. Este análisis no resulta suficiente para establecer cuál de las agencias es más conveniente.

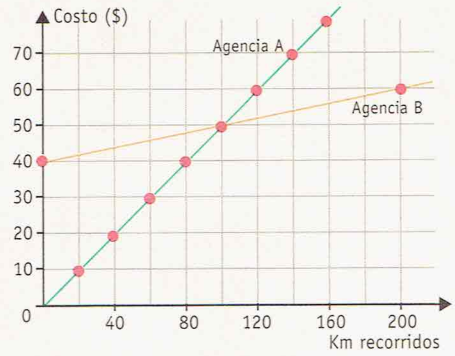
Otro recurso útil para hacer la comparación es la representación de ambas tarifas en un mismo gráfico. Para representar las tarifas de la Agencia A, es conveniente hacer primero una tabla con algunos valores.

Distancia recorrida (km)	Costo del alquiler ($)
0	0
20	10
40	20
60	30
80	40
100	50



Se han representado algunos puntos de esta función, pero son suficientes como para suponer que la gráfica es una recta. Si se unen los puntos y se representan las dos gráficas en un mismo sistema de coordenadas, se obtiene el gráfico siguiente.

En el gráfico se aprecia que, si con el auto alquilado se recorren menos de 100 km, los costos de la agencia B son mayores que los de la A. Si se recorren 100 km, se paga lo mismo en las dos agencias. Pero, si se recorren más de 100 km, se paga menos en la Agencia B que en la A.



Entonces, la conclusión es que la decisión sobre cuál es la agencia más conveniente para alquilar el auto depende de la cantidad de kilómetros que Pablo quiera recorrer.

Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

Problema 4

Lautaro y Ramiro acaban de adoptar un cachorro y quieren fabricar un canil rectangular para que no se escape, en los momentos en los que no pueden cuidarlo. Disponen de 24 metros de alambrado y deben decidir las medidas de los lados del rectángulo. Ensayaron con algunas medidas y observaron que el área encerrada variaba.

¿De qué medidas les conviene armar el canil, si quieren que el perro tenga el mayor espacio posible para moverse dentro de él?

Los cálculos siguientes permiten analizar, para algunos valores, cómo varía el área del rectángulo encerrado en relación con las medidas elegidas para los lados, aun cuando en todos los casos se usan los 24 m de alambrado.

Por ejemplo, si la base se elige de 1 metro, la altura medirá 11 metros, porque $1 + 1 + 11 + 11 = 24$, y el área resultará de 11 m², porque $1 \cdot 11 = 11$.

A partir de la siguiente tabla se podrá analizar en mayor profundidad la situación:

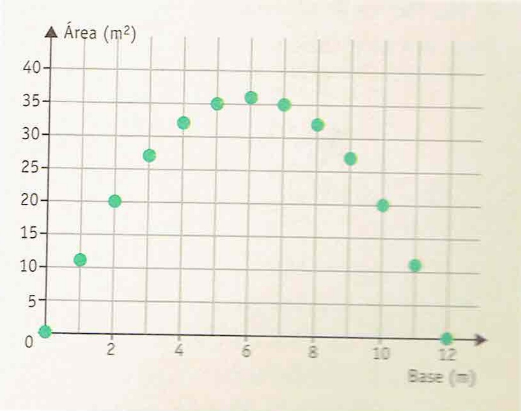
Base (m)	Altura (m)	Área (m²)
1	11	11
2	10	20
3	9	27
4	8	32
5	7	35
6	6	36

Base (m)	Altura (m)	Área (m²)
7	5	35
8	4	32
9	3	27
10	2	20
11	1	11
x	$12 - x$	$x \cdot (12 - x)$

Se observa, que el área varía cuando cambian las medidas de los lados, y además, esta variación tiene una forma "simétrica".

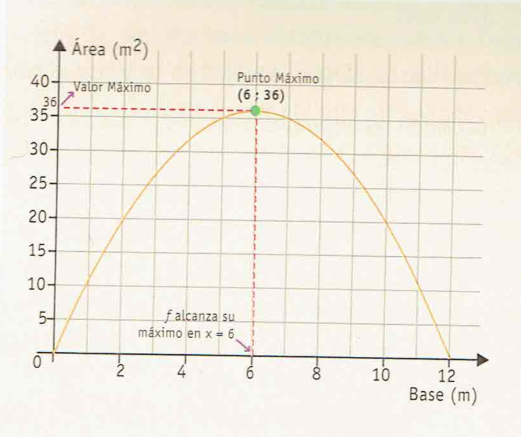
Al observar los valores tabulados, se infiere que el área máxima que puede encerrarse en forma rectangular con los 24 m de alambrado es de 36 m² y se obtiene cuando la figura es un cuadrado 6 m de lado.

En el gráfico se representan los valores calculados en la tabla.



Si se siguen tomando valores intermedios, se obtiene una curva.

En la gráfica se observa que, a medida que se aumenta la medida de la base, el área crece, hasta llegar a un valor máximo de 36 m² que corresponde a la base de 6 m. A partir de este valor, si se sigue aumentando la medida de la base, el área decrece.

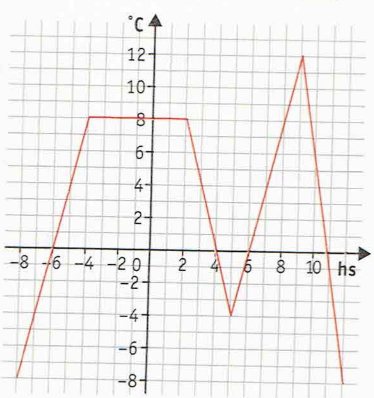


Entonces, la función que da el área del canil en función de la medida de su base es creciente en el intervalo (0 ; 6), decreciente en el intervalo (6 ; 12) y alcanza su máximo valor en el punto (6 ; 36).

Una función *f* es **creciente** en un intervalo de su dominio, si a medida que aumentan los valores de *x* también aumentan los valores de *f(x)*.
Una función *f* es **decreciente** en un intervalo de su dominio, si a medida que aumentan los valores de *x* los valores de *f(x)* disminuyen.

ACTIVIDADES

1. La siguiente gráfica representa la diferencia entre la temperatura y la sensación térmica en una ciudad del sur del país en función del tiempo. El valor $t = 0$ corresponde a las 12 horas del 6 de julio.



a. ¿Cómo pueden interpretarse los ceros de esta función en términos del problema?

b. ¿En qué momentos la sensación térmica fue mayor que la temperatura?

c. Hallen el conjunto de negatividad de la función. ¿Cómo lo pueden interpretar en términos del problema?

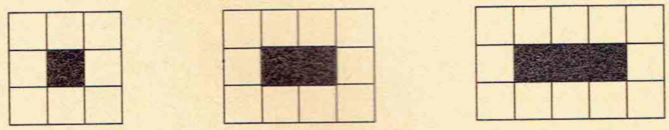
d. Hallen los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función e interprétenlos en términos del problema.

e. ¿Qué otros datos pueden extraer de la gráfica?

Funciones expresadas a través de fórmulas

Problema 5

En una fábrica de baldosas ofrecen un diseño en blanco y negro, que se arma para distintos tamaños como se muestra en la figura siguiente.



El diseño puede tener 1, 2, 3, 4, 5,... baldosas negras rodeadas de baldosas blancas.

a. ¿Cuántas baldosas blancas se usan para 15 baldosas negras?

b. Si hay 28 baldosas blancas, ¿cuántas negras hay?

c. ¿Cuántas baldosas blancas hay, si las negras son 115?

d. Si hay 288 baldosas blancas, ¿cuántas negras hay?

e. ¿Es posible que un diseño realizado de este modo tenga 87 baldosas blancas? ¿Por qué?

Un modo de responder a las dos primeras preguntas es hacer un dibujo y contar las baldosas que corresponden. Si bien es un procedimiento correcto, puede resultar largo y engorroso si los números involucrados son grandes. Por eso, es conveniente buscar otra manera de resolver el problema, que no sea mediante el conteo directo.

En las figuras se observa que en todos los casos hay 6 baldosas blancas a los costados: 3 de cada lado. Además, arriba y debajo de las baldosas negras hay la misma cantidad de baldosas blancas que negras, es decir, el doble de la cantidad de baldosas negras. Por lo tanto:

$$\textit{Cantidad de baldosas blancas} = (\textit{Cantidad de baldosas negras}) \cdot 2 + 6$$

Una función puede representarse mediante una tabla, un gráfico, una fórmula o de manera coloquial.

Para simplificar la escritura, si se designa con n a la cantidad de baldosas negras y con $b(n)$ a la cantidad de baldosas blancas que tiene el mismo diseño, queda expresada una fórmula:

$$b(n) = 2 \cdot n + 6$$

La fórmula muestra la relación que hay entre las cantidades de baldosas de cada color en cada uno de los diseños, y es útil porque sirve para todos los casos.

Entonces, por ejemplo, si el diseño tiene 15 baldosas negras, la cantidad de baldosas blancas puede calcularse usando la fórmula, así:

$$b(15) = 2 \cdot 15 + 6 = 36 \text{ baldosas blancas}$$

Si se repite este análisis para otros ejemplos, es posible armar una tabla como la siguiente:

Cantidad de baldosas negras n	Cantidad de baldosas blancas $b(n) = 2n + 6$
1	8
2	10
3	12
4	14
15	36

Si para calcular la cantidad de baldosas blancas hay que multiplicar a la cantidad de baldosas negras por 2 y luego sumar 6 al resultado, entonces, para calcular la cantidad de baldosas negras si se conoce la cantidad de baldosas blancas, a éste número hay que restarle 6 y luego dividir el resultado por 2.

$$n = \frac{b(n) - 6}{2}$$

Una vez que se dispone de una fórmula, es posible aplicarla en cualquier caso, sin necesidad de hacer dibujos y contar.

Para contestar las preguntas restantes del problema puede realizarse:

Baldosas blancas	Operaciones	Baldosas negras
28	(**28** – 6) : 2	11
236	2 · **115** + 6	115
288	(**288** – 6) : 2	141

Además de ser útil para diferentes cálculos, en muchos casos el análisis de una fórmula permite obtener información general sobre las características de los números involucrados en la situación.

Por ejemplo, la fórmula que permite calcular la cantidad de baldosas blancas en función de la cantidad de baldosas negras ($b(n) = 2n + 6$), permite hacer el siguiente análisis. Como n es un número natural, ya que representa la cantidad de baldosas negras, al multiplicarlo por 2 se obtiene un número par, y al sumarle 6 a este resultado, se obtiene otro número par. Por lo tanto, la cantidad de baldosas blancas en *todos* estos diseños es un número par. Este análisis permite responder a la última pregunta: no es posible que un embaldosado hecho con este diseño tenga 87 baldosas blancas, porque 87 es un número impar.

Para indicar que una función *f* tiene dominio A e imagen B se escribe:

$$f: A \to B$$

Se lee: *la función f va de A en B*

Función inversa

Es posible considerar dos funciones asociadas, respectivamente, a las dos fórmulas que se han construido al resolver la situación anterior. Una, cuya fórmula sirve para calcular la cantidad de baldosas blancas en función de las negras y la otra, que hace el camino inverso, y permite calcular la cantidad de baldosas negras en función de la cantidad de baldosas blancas.

La fórmula de la primera función es $b(n) = 2n + 6$. Su dominio es el conjunto de números naturales y su imagen es el conjunto: {8; 10; 12; 14; ...}.

La fórmula de la segunda función es $n(b) = \frac{b - 6}{2}$. Al analizar esta fórmula, se concluye que b tiene que ser un número par, para que al restarle 6 dé por resultado otro número par, de modo que al dividir este número por 2, se obtenga un número natural, ya que la cantidad de baldosas tiene que ser un número natural. Pero, además, b no puede ser cualquier número par. Por ejemplo, si en la fórmula de $n(b)$ se reemplaza b por 2, se obtiene un resultado negativo para n, lo cual no tiene sentido en esta situación. Entonces, b tiene que ser un número par y mayor que 6. Por eso, el dominio de esta función es el conjunto: {8; 10; 12; 14, ...}.

Si en la fórmula de $n(b)$ se reemplaza b por cada uno de los elementos del dominio, se obtienen como resultados los números 1; 2; 3; 4; ..., es decir, todos los naturales.

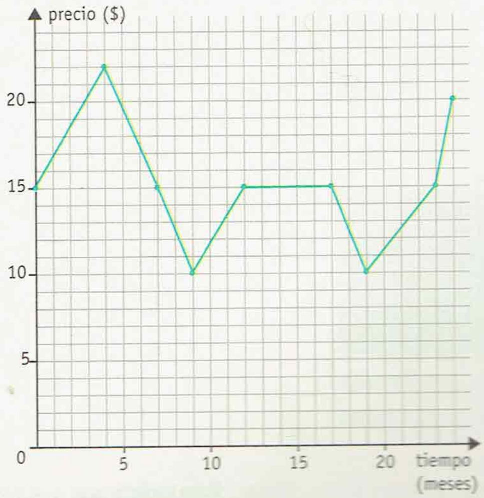
Entonces, las dos funciones definidas se relacionan entre sí de modo tal que el dominio de la función $n(b)$ es el conjunto imagen de la función $b(n)$, y el conjunto imagen de la función $n(b)$ es el dominio de la función $b(n)$. Además, las fórmulas de las dos funciones son equivalentes, ya que lo que cambia al pasar de una a la otra es la variable despejada. Dos funciones que se relacionan de este modo son inversas entre sí. En este caso, la función $n(b)$ es la función inversa de $b(n)$, y la función $b(n)$ es la función inversa de $n(b)$.

Dos funciones son **inversas** entre sí cuando una "hace el recorrido inverso de la otra". Si en la función *f* la imagen de *a* es *b*, en la función inversa, la imagen de *b* es *a*. El dominio de *f* coincide con el conjunto imagen de su inversa, mientras que el dominio de la inversa coincide con el conjunto imagen de *f*.
La función inversa de *f* se designa f^{-1} y además:

$$Dom(f) = Im(f^{-1})$$
$$Dom(f^{-1}) = Im(f)$$

ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN

2. Una empresa fabrica ropa. Observen el gráfico siguiente, que muestra el precio de confección de una camisa desde que la empresa comenzó su actividad, y respondan a las preguntas.



a. ¿Cuál fue el precio de confección de una camisa a los 12 meses?

b. ¿En qué momento el precio fue de $15?

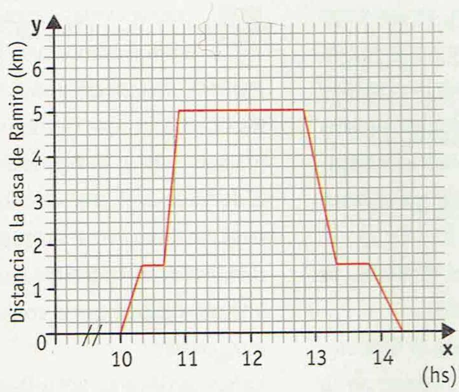
c. ¿En qué períodos el precio de confección fue en aumento?

d. ¿Cuál fue el precio más alto que alcanzó la de confección de una camisa? ¿Cuándo lo alcanzó? ¿Y el precio más bajo?

e. ¿Entre qué valores se mantuvo el precio de confección?

3. Ramiro juega al tenis y va al club varias veces por semana a entrenar. Ayer, Ramiro pasó a buscar a su amigo Manuel antes de ir al club. Fueron juntos a entrenar, luego volvieron a casa de Manuel, donde tomaron la merienda, y después, Ramiro volvió a su casa. La casa de Ramiro, la de Manuel y el club se encuentran sobre la misma calle.

En el gráfico siguiente se representa la distancia a la que Ramiro se encontraba de su casa, en cada momento del día de ayer, desde que salió hasta que regresó. Observen el gráfico y respondan a las preguntas.



a. ¿Cuándo estuvo Ramiro a 4 km. de su casa?

b. ¿A qué distancia de su casa se encontraba Ramiro a las 11 hs, a las 10:30 hs y a las 11: 50 hs?

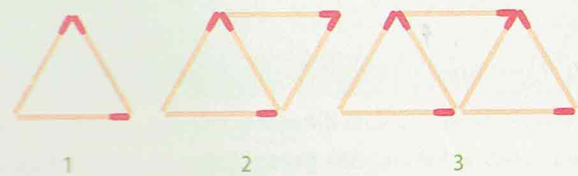
c. ¿A qué hora salió de su casa? ¿A qué hora volvió a su casa?

d. ¿A qué distancia de la casa de Ramiro está la casa de Manuel? ¿A qué distancia de la casa de Manuel está el club?

e. ¿Durante cuánto tiempo estuvo Ramiro en la casa de Manuel después del entrenamiento?

f. Hagan un gráfico que represente la distancia a la que está Ramiro de la casa de Manuel, en función del tiempo, durante el día de ayer.

4. Se construye con fósforos una sucesión de figuras, manteniendo siempre la misma estructura, como las siguientes.



a. ¿Cuántos fósforos se necesitan para construir la figura que ocupa el décimo lugar? ¿Y para la figura que ocupa el lugar 100?

b. Encuentren una fórmula que sirva para calcular la cantidad de fósforos que tiene la figura que ocupa el lugar n.

c. ¿Hay alguna figura que tenga 2542 fósforos? ¿Y 3451? ¿Por qué?

5. Lautaro construyó otras figuras con fósforos y encontró que la fórmula para calcular la cantidad de fósforos del lugar n es $4n + 2$.

a. ¿Cuántos fósforos se usaron en la posición 20?

b. ¿Existe alguna posición en la que se usaron 210 fósforos? ¿Y en la que se usaron 212?

c. ¿Cuáles son el dominio y la imagen de la función asociada a esta fórmula, en esta situación?

d. Hallen su función inversa. ¿Qué representa en relación con este problema?

6. Un estacionamiento cobra $1,90 por hora o fracción y hay una tolerancia de 5 minutos.

a. ¿Cuánto se paga por estacionar un auto durante 2 horas y 15 minutos? ¿Y si se deja 4 horas y 4 minutos?

b. Si el auto se deja 8 horas o más, se paga una estadía diaria de $ 8. Grafiquen la función que da el precio del estacionamiento en función del tiempo. Indiquen el dominio y la imagen de esta función.

7. Se consideran funciones definidas de $\mathbb{N}_0$ (los números naturales con el 0) en $\mathbb{R}$. En cada caso, se dispone de las imágenes de los primeros 5 elementos de $\mathbb{N}_0$. Hallen la fórmula de cada función.

a. 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

b. 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4

c. 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10

d. 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9

e. 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11

f. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}$

g. 1 ; –1 ; 1 ; –1 ; 1

AUTOEVALUACIÓN

Marquen las opciones que consideren correctas en cada caso.

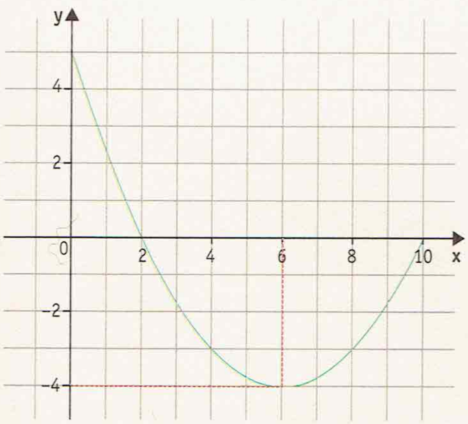
1. Para la función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \,/\, f(x) = 3x + 2$:

- **a** La imagen son todos los números naturales.
- **b** La preimagen de 11 es 3.
- **c** $f(15) = 47$
- **d** Los números que están en el conjunto imagen son todos impares, porque 3x es impar y al sumarle un número par se obtiene un número impar.

2. Un auto se desplaza por una ruta rectilínea a una velocidad constante de 80 km/h. Se considera la función $d(t)$, que relaciona la distancia recorrida por el auto con el tiempo transcurrido desde que comenzó su marcha.

- **a** El punto $(3\,;240)$ pertenece a la gráfica de la función.
- **b** La fórmula de función inversa de d es: $d^{-1}(x) = \frac{x}{80}$.
- **c** Si se sabe que el auto recorrió 320 km en 4 horas, se puede afirmar que $d(4) = 320$ y que $d^{-1}(320) = 4$.
- **d** No existe la preimagen de 60.

3. Dada la gráfica de la función f:



- **a** $C^0 = \{2; 10\}$
- **b** La función f no tiene un valor máximo.
- **c** El mínimo de esta función es el punto $(6\,;4)$.
- **d** f es decreciente en el intervalo $[0\,;6)$ y creciente en el intervalo $[6\,;10)$.

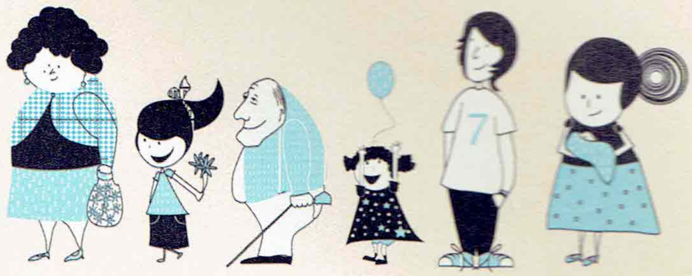
4. Si $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ y se sabe que $Im(f) = \{$múltiplos de 8$\}$. Entonces, la fórmula de f puede ser:

- **a** $f(x) = 4x + 4$
- **b** $f(x) = 4x + 8$
- **c** $f(x) = 8x$
- **d** $f(x) = 16x$

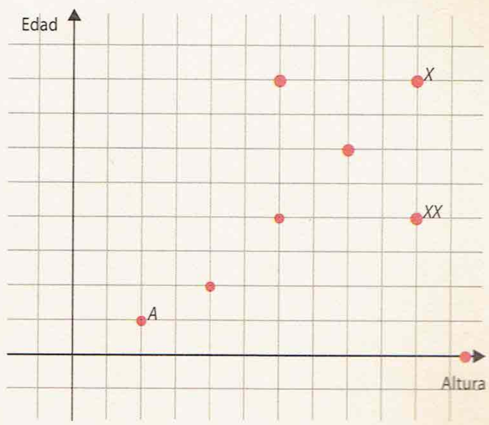
5. Se considera la función cuya formula es $g(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$. Entonces:

- **a** $C^0 = \{0\}$
- **b** $C^0 = \{-1, 3, -3\}$
- **c** 3 y -3 no pertenecen al dominio de g.
- **d** $g^{-1}(0) = -1$

6.



Cada una de las personas representa un punto en el siguiente gráfico.



- **a** El punto X representa a la persona de más edad, Pedro.
- **b** El punto A representa a Ileana, porque es la más chica del grupo.
- **c** Los puntos X y XX representan a las personas más altas, X a Betty y XX a Gustavo.
- **d** No todas las personas de este grupo tienen edades ni alturas diferentes.

CONTENIDOS

- Funciones de proporcionalidad directa
- Funciones lineales
- La ordenada al origen y la pendiente
- Obtención de la fórmula de la función lineal
- Ceros, conjunto de positividad y de negatividad

Una práctica frecuente en matemática es la construcción de modelos para representar y estudiar algunos procesos, que pueden ser reales o imaginarios. En muchos casos, la construcción del modelo incluye la representación matemática de relaciones numéricas que vinculan a las magnitudes observadas. Algunos de los fenómenos estudiados presentan características especiales: las variaciones son uniformes y al representarlas en gráficos cartesianos todos los puntos resultan alineados. En estos casos, se dice que las magnitudes que intervienen se relacionan mediante una ***función lineal****.*

3 FUNCIONES LINEALES

Problema 1

Un turista que está de paseo por la Argentina quiere comprar un pantalón que vio en una vidriera a $ 55. Le consultó a un vendedor, quien le informó que podía pagarlo en su moneda a $C 22.

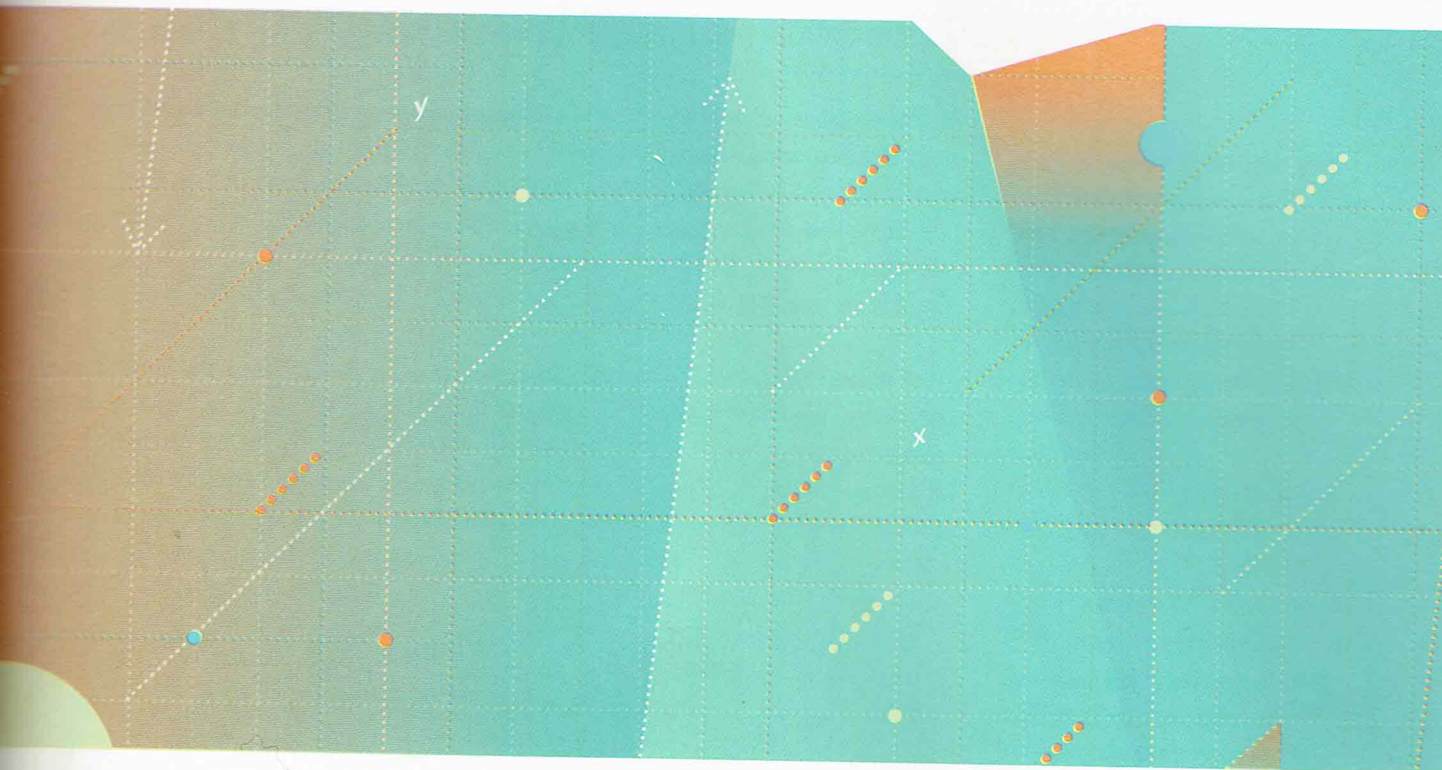
a. Si quiere comprar un traje que cuesta $ 110, ¿cuánto lo pagará en $C? ¿Y si compra una campera que cuesta $ 165?

b. ¿Es razonable suponer que para un traje que cuesta en $ el doble que el pantalón, su precio en $C será también el doble? ¿Y si una campera cuesta en $ el triple que el pantalón, su precio en $C será el triple?

c. ¿Cuánto cuesta, en $C, una prenda que cuesta $ 75? ¿Cuál es el precio en $ de una prenda que cuesta $C 49?

d. ¿Cuál es la fórmula que sirve para transformar los precios dados en una moneda en precios dados en la otra? ¿Qué información se necesita para escribirla?

Para resolver este problema se puede recurrir a diferentes procedimientos. Una posibilidad es pensar que si el traje sale $ 110, entonces cuesta el doble que el pantalón. Es decir 2 pantalones cuestan lo mismo que un traje. Como cada pantalón cuesta $C 22, entonces el traje cuesta $C 44. Del mismo modo se puede pensar que si una campera cuesta $ 165, entonces cuesta el triple que el pantalón con lo cual en $C costará como tres pantalones, es decir $C 66.



Es razonable concluir entonces que si una prenda cuesta en $ el doble que el pantalón, su precio en $C será también el doble, lo mismo ocurre si cuesta el triple.

Con un razonamiento similar es posible armar una tabla como la siguiente:

Precio en $	55	110	550	165
Precio en $C	22	44	220	66

A partir de esta tabla se observa que, en todos estos casos, el cociente entre los valores que forman cada par se mantiene constante:

$$\frac{\textit{precio en \$C} \rightarrow}{\textit{precio en \$} \rightarrow} \ \frac{22}{55} = \frac{44}{110} = \frac{220}{550} = \ldots = 0{,}4$$

Con esta información, si se conoce que una prenda cuesta $ 75, se tiene que:

$$\frac{\textit{precio en \$C}}{\textit{precio en \$}} = \frac{\textit{precio en \$C}}{\textit{\$75}} = 0{,}4 \quad \Rightarrow \textit{precio en \$C} = 0{,}4 \ . \ 75 = 30$$

Es decir que si una prenda cuesta $ 75, el turista la pagará $C 30.

Si el turista pagó $C 49, entonces:

$$\frac{\textit{precio en \$C}}{\textit{precio en \$}} = 0{,}4 \ \Rightarrow \ \textit{precio en \$} = \textit{\$C 49} : 0{,}4 = \textit{\$ 122,50}$$

Luego, la prenda costaba $ 122,50.

Si se conoce el precio en $ de un artículo, es posible calcular su precio en $C, del modo siguiente:

$$\textit{Precio en \$C} = 0{,}4 \ \cdot \textit{Precio en \$}$$

Funciones de proporcionalidad directa

Una función es de proporcionalidad directa cuando su fórmula es del tipo:
$f(x) = m \cdot x$ con $m \in \mathbb{R}$; $m \neq 0$

En el problema anterior quedó definida una fórmula que transforma cualquier precio en \$(x), en su correspondiente en \$C($f(x)$):

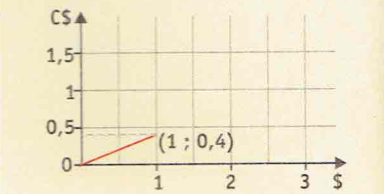
$$f(x) = 0{,}4\,x$$

Dicha fórmula es la expresión de una *función de proporcionalidad directa.*

Gráficas de funciones de proporcionalidad directa

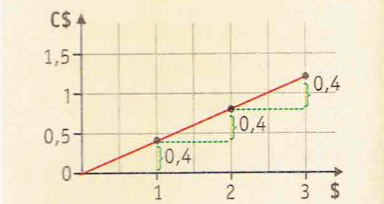
Para representar la función $f(x) = 0{,}4\,x$, se usa el eje horizontal para la variable independiente, que corresponde a los precios en \$, y el eje vertical para los precios en \$C. En este caso, solo se consideran los valores no negativos de la variable independiente, que son los que tienen significado en la situación planteada. Según los datos que se utilicen, la gráfica puede construirse con distintos procedimientos.

- Como \$ 0 equivalen a \$C 0, es decir $f(0) = 0$ el punto (0 ; 0) forma parte de la gráfica de esta función.
- Como \$ 1 equivale a \$C 0,4, o sea $f(1) = 0{,}4$, el punto (1 ; 0,4) también pertenece a esta gráfica.



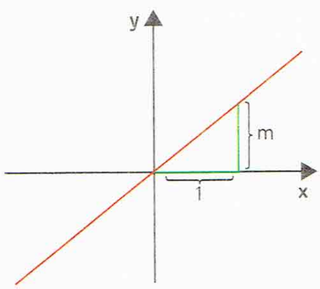
- Por cada \$ de incremento, el precio en \$C se incrementa en 0,4 unidades. De esta manera pueden ubicarse otros puntos en el gráfico. Al construir la gráfica con este proceso, que se puede utilizar porque el incremento es constante, los puntos quedan alineados, es decir, quedarán todos contenidos en una misma recta.

Esta constante se denomina pendiente.



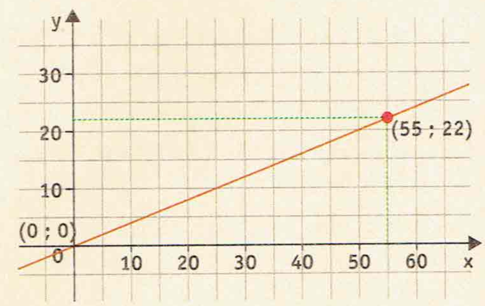
Si $f(x) = m\,x$ es una función de proporcionalidad directa entonces: $f(0) = m \cdot 0 = 0$
Es decir, en toda función de proporcionalidad directa, la imagen de 0 es 0.

En las funciones de proporcionalidad directa, $f(x) = m\,x$, el número m se denomina **pendiente o constante de proporcionalidad**, e indica que la variable dependiente varía m unidades cuando la independiente varía una unidad.
Las gráficas de las funciones de proporcionalidad directa son entonces rectas que contienen todos los puntos alineados con (0 ; 0) y con (1 ; m).



Otro modo de construir la gráfica es el siguiente. Teniendo en cuenta que la gráfica es una recta, basta con conocer dos puntos para trazarla. Pero, en toda función de proporcionalidad directa, hay un punto que ya se conoce: el (0 ; 0). Por lo tanto, se necesita determinar solo un punto más para poder construir la gráfica.

Por ejemplo, para la función $f(x) = 0{,}4\,x$, se obtiene $f(0) = 0$ y $f(55) = 22$. Entonces, los puntos (0 ; 0) y (55 ; 22) pertenecen a la recta. Estos dos puntos son suficientes para trazarla. En este caso, se traza la gráfica completa pues no hay restricciones sobre los valores de las variables.



Propiedades de las funciones de proporcionalidad directa

El hecho de que los puntos estén alineados y que el par ordenado (0 ; 0) pertenezca al gráfico permite identificar que al doble de una variable le corresponde el doble de la otra; al triple, el triple, así como a la mitad le corresponde la mitad, a la tercera parte, la tercera parte, etcétera.

Si el precio en \$ se multiplica por cualquier número, el precio en \$C también queda multiplicado por el mismo número.

Precio en \$	55	110	165	27,50
Precio en \$C	22	44	66	11

También se verifica que la suma de dos valores de la variable x se relaciona con la suma de las cantidades correspondientes de la variable y, como se muestra en la tabla siguiente.

Precio en \$	55	110	165
Precio en \$C	22	44	66

Esto se produce por que si la expresión que permite convertir de \$ en \$C es $f(x) = 0{,}4\,x$, y se quiere obtener el precio en \$C de \$(55 + 110) es necesario multiplicar por 0,4. Si se aplica la propiedad distributiva se obtiene:

Precio en \$C = $0{,}4 \cdot (55 + 110) =$

$0{,}4 \cdot 55 + 0{,}4 \cdot 110 = 22 + 44 = 66$

Precio en \$C de \$ 55

Precio en \$C de \$ 165

Precio en \$C de \$ 110

En toda función de proporcionalidad directa, $f(x) = m \cdot x$, si se multiplica la variable independiente por un número a, la otra variable resulta también multiplicada por a.
En efecto:
$f(a \cdot x) = m \cdot (a \cdot x) = a \cdot (m \cdot x) = a \cdot f(x)$

En toda función de proporcionalidad directa, $f(x) = m \cdot x$, para cualquier par de valores a y b de la variable independiente y sus correspondientes $f(a)$ y $f(b)$ de la variable dependiente, se cumple que:
$f(a+b) = m \cdot (a+b) = m \cdot a + m \cdot b =$
$= f(a) + f(b)$

1. Grafiquen las siguientes funciones:

a. $f(x) = 4\,x$

b. $g(x) = \frac{3}{4}x$

2. ¿Es cierto que si $f(x)$ es una función de proporcionalidad directa, se verifica que $f(2 \cdot x) = 2 \cdot f(x)$? ¿Por qué?

3. Encuentren cuatro puntos que pertenezcan al gráfico de $f(x) = 5\,x$. Expliquen cómo los encontraron.

4. ¿Es cierto que los puntos (3 ; -2) y (6 ; -4) pertenecen a una misma función de proporcionalidad directa? ¿Por qué?

5. Una máquina produce un cierto tipo de imanes. Se sabe que para producir 153 unidades demora 3 horas y que la cantidad producida es directamente proporcional al tiempo de funcionamiento.

a. ¿Cuánto tiempo tarda en producir 600 imanes?

b. ¿Cuántos imanes puede producir esta máquina en 100 días, si se la opera en forma continua, sin apagarla en ningún momento?

c. Hallen una fórmula que permita calcular la cantidad de imanes que se fabrican en función del tiempo (en horas).

6. Realicen el gráfico de las siguientes funciones de proporcionalidad directa.

a. $f(x) = \frac{1}{2}x$ **b.** $g(x) = -\frac{1}{2}\,x$ **c.** $h(x) = -3\,x$

7. Una vendedora trabaja realizando promociones para una marca y cobra únicamente una comisión por sus ventas. Por cada peso que vende, \$ 0,10 quedan para ella.

a. Representen gráficamente la situación.

b. Calculen la comisión que obtuvo la vendedora por una venta de \$ 750.

8. Indiquen cuál o cuáles de los siguientes pares ordenados pertenecen a la gráfica de $f(x) = 4\,x$.

a. (0 ; 1) **b.** (2 ; 8)

c. (3 ; 7) **d.** (5 ; 20)

Funciones lineales

Problema 2

Una pileta de natación que tiene una capacidad de 20 000 litros se llena con una bomba que opera a un ritmo de 600 litros por minuto. La bomba se enciende cuando la pileta tiene 2000 litros de agua.

a. ¿Cuántos litros de agua habrá en la pileta a los 3 minutos de encender la bomba? ¿Y a los 7 minutos?

b. ¿Es cierto que a los 10 minutos habrá 6000 litros de agua en la pileta?

c. ¿Cuál es la fórmula que permite calcular la cantidad de litros de agua que habrá en la pileta x minutos después de haberse encendido la bomba?

d. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse la pileta?

Como por cada minuto ingresan a la pileta 600 litros:

En 3 minutos ingresarán $\longrightarrow$ $600 \cdot 3 = 1800$ litros

Más los 2000 que ya tenía, son $\longrightarrow$ $1800 + 2000 = 3800$ litros

Para calcular las otras cantidades es útil confeccionar una tabla.

Tiempo (min)	Volumen de agua que ingresa (l)	Volumen de agua inicial (l)	Volumen total de agua en la pileta (l)
7	$600 \cdot 7$	2000	$600 \cdot 7 + 2000 = 6200$
10	$600 \cdot 10$	2000	$600 \cdot 10 + 2000 = 8000$
x	$600 \cdot x$	2000	$600 \cdot x + 2000$

Al observar la tabla se puede determinar que a los 7 minutos habrá 6200 litros y a los 10 minutos habrá 8000 litros.

El volumen de agua que se agrega a la pileta puede calcularse con la fórmula $600 \cdot x$, donde x representa el tiempo transcurrido, en minutos, desde que se encendió la bomba. Por eso, las variables tiempo y cantidad de agua que ingresa a la pileta son directamente proporcionales. Pero para considerar los 2000 litros que ya había en la pileta, el volumen total de agua debe calcularse con la fórmula $600 \cdot x + 2000$, que no corresponde a una relación de proporcionalidad directa entre las variables, porque cuando el tiempo es 0 minutos, el volumen de agua no es 0 litros, sino 2000 litros.

Se llaman ***funciones lineales*** a las funciones del tipo: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, / \, f(x) = m \cdot x + b$ con $m \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$.
Si $b = 0$ la función lineal es además una función de proporcionalidad directa.

Quedan definidas así dos fórmulas:

- una, de proporcionalidad directa, que permite calcular los litros de agua que se agregan a la pileta en cada momento y es $g(x) = 600 \cdot x$, donde x es el tiempo en minutos y $g(x)$ es el volumen de agua que se agrega, en litros;
- la otra, que permite calcular el volumen total de agua que hay en la pileta en cada minuto y es $f(x) = 600 \cdot x + 2000$, donde x es el tiempo en minutos y $f(x)$ es el volumen total de agua. Ésta es la expresión de una *función lineal*.

Para saber cuánto tiempo tarda en llenarse la pileta, es decir, el tiempo que transcurrirá hasta que el volumen de agua llegue a 20 000 litros, hay que encontrar para qué valor de x se cumple que $f(x)$ vale 20 000.

Entonces:

$$f(x) = 20\,000 \quad \Rightarrow \quad 600\,x + 2000 = 20\,000$$

Al resolver la ecuación planteada queda:

$$\begin{aligned} 600\,x + 2000 &= 20\,000 \\ 600\,x &= 20\,000 - 2000 \\ 600\,x &= 18\,000 \\ x &= 18\,000 : 600 \\ x &= 30 \end{aligned}$$

Entonces, 30 minutos es el tiempo que tardará en llenarse la pileta.

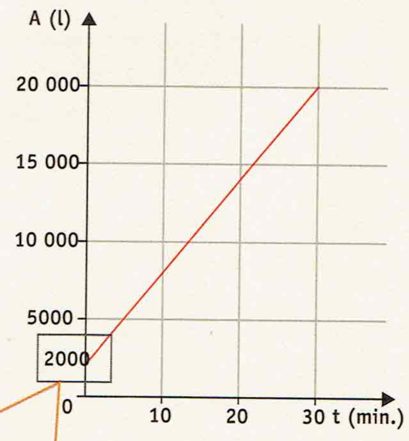
Gráficas de funciones lineales

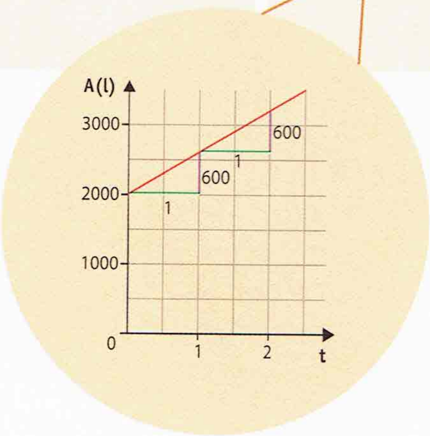
Para graficar la función $f(x) = 600 \cdot x + 2000$, se puede usar el eje horizontal para representar el tiempo y el eje vertical para el volumen de agua. Como al iniciarse el proceso ya hay 2000 litros en la pileta, el punto (0 ; 2000) pertenece a la gráfica de esta función.

Una manera de obtener otros puntos es tener en cuenta que por cada minuto se incorporan 600 litros a los que ya hay. Esto es usar la relación de proporcionalidad directa que hay entre el volumen de agua que se agrega y el tiempo.

Entonces, a partir del punto correspondiente a los 2000 litros iniciales, cada vez que se aumenta en una unidad la abscisa y en 600 unidades la ordenada, se obtiene otro punto de la gráfica. Los puntos obtenidos resultan alineados.

Como en este caso los valores de x están restringidos al intervalo [0 ; 30], el conjunto de puntos que representa a la situación es un segmento.





La gráfica de una función lineal es una recta. Cuando tiene alguna restricción en alguna de las variables, puede resultar una semirrecta, un segmento o puntos alineados.

Toda función lineal puede interpretarse como la suma de una función de proporcionalidad directa y una constante.

$f(x) = \underbrace{m \cdot x}_{\text{proporcionalidad directa}} + \underbrace{b}_{\text{constante}}$

La ordenada al origen y la pendiente

La fórmula de cada función lineal contiene dos valores destacados, que son constantes para cada función: la *pendiente* y la *ordenada al origen*.

En los problemas siguientes se analizan algunos de los significados que pueden adquirir la ordenada al origen y la pendiente en relación con la situación que representa la función considerada.

Problema 3

Carlos guardó en una caja \$ 300 que juntó por diferentes trabajos realizados. Se propuso no tocar ese dinero e ir agregando, mes por mes, una cantidad fija, siempre igual. Al cabo de 5 meses tiene \$ 650. ¿Cuánto dinero guardó por mes? ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a reunir \$ 930?

En las funciones lineales, $f(x) = m\,x + b$, el número m se denomina ***pendiente***, e indica que por cada unidad que aumenta la variable independiente, la dependiente varía m unidades.

Como en 5 meses reunió \$ 650, significa que en esos meses guardó:

$$\$\,650 - \$\,300 = \$\,350$$

Si esta cantidad se divide por 5, se obtiene la cantidad de dinero guardada en cada mes, es decir, \$ 70. Este número es constante y se denomina *pendiente* de la función lineal.

Si se designa con x al tiempo (en meses), el dinero guardado (en pesos) será $70 \cdot x$. Esta expresión muestra que las dos variables son directamente proporcionales. Para calcular el total de dinero que juntó, hay que sumar los \$ 300 iniciales.

Entonces, la fórmula de la función lineal que permite calcular el total de dinero reunido (en \$) en el tiempo correspondiente (en meses), es: $f(x) = 70 \cdot x + 300$.

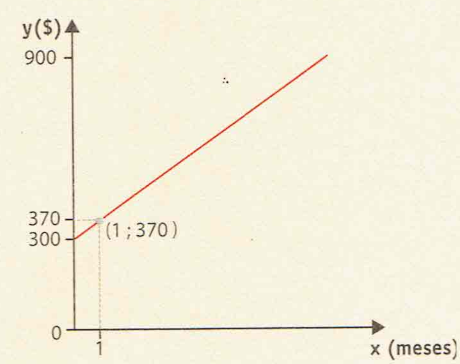
Para averiguar cuánto demorará en juntar \$ 930, es posible resolver la ecuación:

$$930 = 70\,x + 300$$
$$930 - 300 = 70\,x$$
$$630 : 70 = x$$
$$9 = x$$

Es decir, juntará el dinero en 9 meses.

La *intersección* entre dos conjuntos contiene a los elementos comunes a ambos.
La gráfica de la función lineal y el eje de las y tienen en común un punto. Por eso, se dice que la recta *interseca* al eje de ordenadas en ese punto.

Para representar gráficamente la función asociada a esta situación, es útil usar que al inicio habían \$ 300 y que, por cada mes que transcurre, se guardan \$ 70. De manera similar a la realizada en el problema anterior, se traza la recta.
La recta interseca al eje de ordenadas en y = 300, porque el punto (0 ; 300) pertenece al gráfico, por ser el dinero inicialmente guardado. El valor de y de este punto se denomina ordenada al origen.



La ordenada del punto en el que una recta interseca al eje de ordenadas se llama ***ordenada al origen***.
La ordenada al origen es el valor de $f(x)$ cuando x es 0, es decir, $f(0)$, por lo tanto $f(0) = m \cdot 0 + b = 0 + b = b$.

La pendiente y su signo: crecimiento y decrecimiento

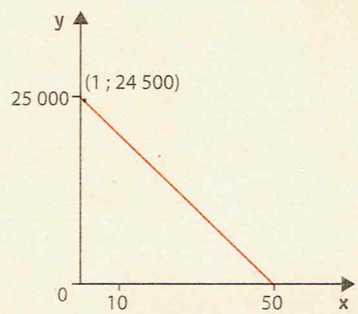
Problema 4

Una pileta se vacía con una bomba que extrae agua a razón de 500 litros por minuto. Al encender la bomba, en la pileta había 25 000 litros de agua. ¿Cuál es el gráfico que representa a esta situación?

Como en cada minuto la bomba extrae la misma cantidad de agua, la función asociada a esta situación es lineal. La ordenada al origen es 25 000, que es el valor inicial.

Además, por cada minuto que transcurra, en la pileta habrá 500 litros de agua menos. Entonces, en el gráfico se reflejará que, por cada unidad que aumenta la abscisa, la ordenada disminuye en 500 unidades. Por eso, la pendiente de la recta resulta negativa.

La fórmula de la función es:
$f(x) = -500 \cdot x + 25\,000$
La pendiente es negativa; por eso, la función lineal es decreciente. Si se mira la gráfica de izquierda a derecha, se aprecia que la recta "baja".



Las funciones lineales cuyas gráficas son rectas con *pendientes positivas* son funciones *crecientes* y aquéllas cuyas gráficas son rectas con *pendientes negativas* son funciones *decrecientes*.

9. Una familia se va de viaje en auto. Al momento de la partida el tanque de nafta tiene 45 litros y una hora después quedan aún 30 litros en él. Supongan que el descenso del nivel de nafta en el tanque es lineal, y obtengan la fórmula de dicha función.

10. Decidan cuáles de las siguientes situaciones podrían ser representadas mediante funciones lineales crecientes y cuáles mediante funciones lineales decrecientes.

a. La cantidad de kilómetros que recorre una persona en función del tiempo que transcurre, si camina a velocidad constante.

b. La cantidad de dinero en una caja de ahorro en función del tiempo, si todos los meses se deposita lo mismo.

c. La distancia a Mar del Plata de un auto que va a velocidad constante y sale de Buenos Aires hacia dicha ciudad, en función del tiempo.

11. Un auto parte de Mar del Plata rumbo a Buenos Aires por la ruta 2 a velocidad constante. En el mismo momento, otro auto sale rumbo a Mar del Plata por la misma ruta y también a velocidad constante. Las fórmulas que permiten calcular la distancia de cada auto a Buenos Aires a través del tiempo son: $g(x) = 80x + 100$ y $f(x) = -80x + 400$.

a. ¿Qué fórmula corresponde a cada auto? Expliquen cómo se dieron cuenta.

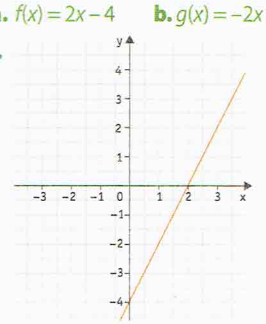
b. ¿A qué distancia de Buenos Aires se encontraba cada auto a las 2 hs de viaje?

c. ¿A qué distancia de Buenos Aires parte el segundo auto?

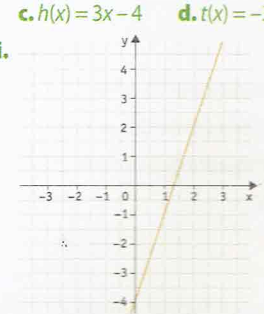
12. Decidan cuál es el gráfico que corresponde a cada función lineal y expliquen cómo se dieron cuenta.

a. $f(x) = 2x - 4$ **b.** $g(x) = -2x + 4$ **c.** $h(x) = 3x - 4$ **d.** $t(x) = -3x + 4$

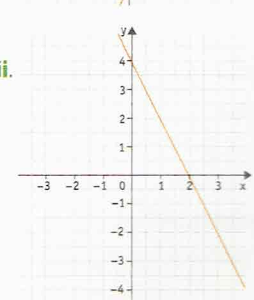
i.



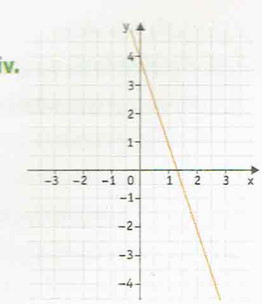
ii.



iii.



iv.

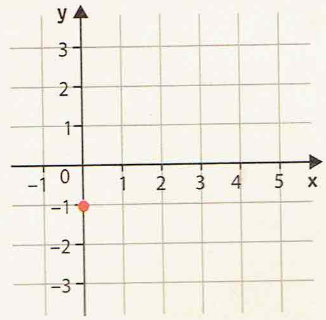


Representación gráfica de funciones lineales a partir de la pendiente y la ordenada al origen

Problema 5

Construir la gráfica de la función $f(x) = \frac{2}{3}x - 1$.

- Como $b = -1$, la recta interseca al eje de ordenadas en el punto $(0\,;-1)$.



Entonces al aumentar la abscisa en una unidad y la ordenada en $\frac{2}{3}$ de unidad, se obtiene otro punto de la recta. Para buscar valores enteros que resulten más cómodos de ubicar en el gráfico, es conveniente armar una tabla de incrementos como la siguiente.

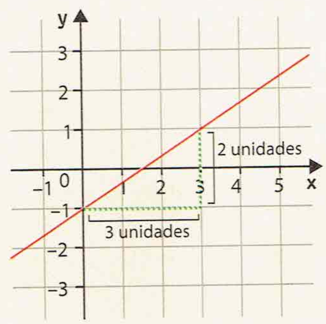
	x 2		x 3
Incremento de la abscisa	1	2	3
Incremento de la ordenada	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	2
	x 2		x 3

La pendiente de una recta se puede interpretar así:

$$m = \frac{a}{b} \begin{array}{l} \rightarrow \text{variación de las ordenadas} \\ \rightarrow \text{variación de las abscisas} \end{array}$$

Las variaciones se refieren a las coordenadas de dos puntos cualesquiera que pertenecen a la recta.

La relación obtenida en la última columna indica que por cada 3 unidades que aumenta la abscisa, la ordenada aumenta 2 unidades. Usando esta relación se ubica fácilmente otro punto de la recta para realizar su gráfico.



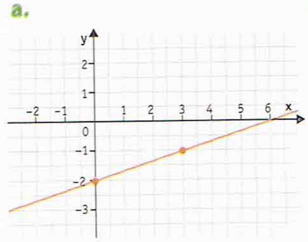
ACTIVIDADES

13. Realicen el gráfico de las siguientes funciones lineales, usando el valor de la pendiente y de la ordenada al origen.

$f(x) = \frac{3}{5}x - 4$ $\quad g(x) = 3x + 1$ $\quad h(x) = -\frac{4}{3}x$

14. Obtengan la fórmula de cada una de las funciones lineales representadas en los siguientes gráficos.

a.



b.

Cálculo de la pendiente a partir de las coordenadas de dos puntos

Las coordenadas de dos puntos de una recta son datos suficientes para calcular su pendiente, como se muestra en el problema siguiente.

Problema 6

Un auto viaja por una ruta a velocidad constante. A las 4 horas de andar pasa por el mojón del km 445 y a las 7 horas pasa por el mojón del km 700.

a. ¿Cuál es la velocidad del auto?

b. ¿En qué kilómetro de la ruta comenzó el viaje?

c. ¿Cuál es la función lineal que representa esta situación?

Para analizar esta situación es conveniente ubicar los datos en una tabla como la siguiente.

$7 - 4 = 3$

Tiempo (horas)	4	7
Kilómetro del mojón	445	700

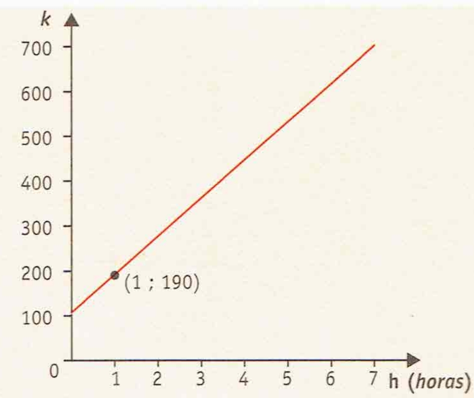
$700 - 445 = 255$

Al cabo de 3 horas, el valor indicado en el mojón se incrementó en 255 km. Entonces, el auto recorrió 255 km en 3 horas. Si se divide 255 por 3, se obtiene que en este tramo el auto anduvo a una velocidad de 85 km/h. Es decir que, en una hora recorrió 85 km.

Por lo tanto, la función puede ser expresada mediante la fórmula: $k(h) = 85\,h + b$, donde h representa el tiempo (en horas) y $k(h)$ es la cantidad de kilómetros recorridos. El valor de b indica el kilómetro de la ruta en el cual se encuentra al comenzar el viaje. Para averiguarlo, se debe reemplazar h por 4, $k(h)$ por 445 y luego resolver la ecuación que queda planteada.

$$k\,(4) = 85 \cdot 4 + b = 445 \quad \Rightarrow \quad b = 105$$

La función será entonces $k(h) = 85\,h + 105$ y su gráfico será el siguiente, donde se identifica que en 1 hora avanza 85 kilómetros.



La función que relaciona el tiempo transcurrido con el kilómetro del mojón es lineal, porque la velocidad es constante. El valor de la velocidad es la pendiente de la recta, ya que, es la variación del kilómetro del mojón cuando el tiempo varía en una hora, para calcular la pendiente, se efectuó la división entre el incremento de las ordenadas (la distancia recorrida) y el incremento de las abscisas (el tiempo transcurrido).

Si de una función lineal se sabe que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$, su gráfica contendrá a los puntos $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$. La pendiente m de la recta se puede calcular con el siguiente procedimiento:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{o} \quad m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Cálculo de la pendiente a partir de las coordenadas de dos puntos

Las coordenadas de dos puntos de una recta son datos suficientes para calcular su pendiente, como se muestra en el problema siguiente.

Problema 6

Un auto viaja por una ruta a velocidad constante. A las 4 horas de andar pasa por el mojón del km 445 y a las 7 horas pasa por el mojón del km 700.

a. ¿Cuál es la velocidad del auto?

b. ¿En qué kilómetro de la ruta comenzó el viaje?

c. ¿Cuál es la función lineal que representa esta situación?

Para analizar esta situación es conveniente ubicar los datos en una tabla como la siguiente.

$7 - 4 = 3$

Tiempo (horas)	4	7
Kilómetro del mojón	445	700

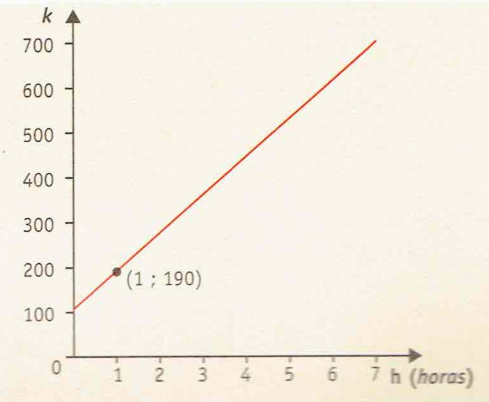
$700 - 445 = 255$

Al cabo de 3 horas, el valor indicado en el mojón se incrementó en 255 km. Entonces, el auto recorrió 255 km en 3 horas. Si se divide 255 por 3, se obtiene que en este tramo el auto anduvo a una velocidad de 85 km/h. Es decir que, en una hora recorrió 85 km.

Por lo tanto, la función puede ser expresada mediante la fórmula: $k(h) = 85\,h + b$, donde h representa el tiempo (en horas) y $k(h)$ es la cantidad de kilómetros recorridos. El valor de b indica el kilómetro de la ruta en el cual se encuentra al comenzar el viaje. Para averigurarlo, se debe reemplazar h por 4, $k(h)$ por 445 y luego resolver la ecuación que queda planteada.

$$k\,(4) = 85 \cdot 4 + b = 445 \quad \Rightarrow \quad b = 105$$

La función será entonces $k(h) = 85\,h + 105$ y su gráfico será el siguiente, donde se identifica que en 1 hora avanza 85 kilómetros.



La función que relaciona el tiempo transcurrido con el kilómetro del mojón es lineal, porque la velocidad es constante. El valor de la velocidad es la pendiente de la recta, ya que, es la variación del kilómetro del mojón cuando el tiempo varía en una hora, para calcular la pendiente, se efectuó la división entre el incremento de las ordenadas (la distancia recorrida) y el incremento de las abscisas (el tiempo transcurrido).

Si de una función lineal se sabe que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$, su gráfica contendrá a los puntos $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$. La pendiente m de la recta se puede calcular con el siguiente procedimiento:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{o} \quad m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

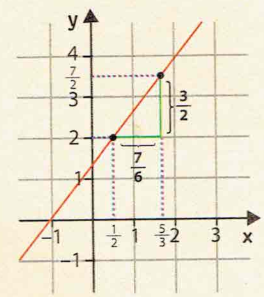
Obtención de la fórmula de la función lineal

Problema 7

Obtener la pendiente de la recta que contiene a los puntos $\left(\frac{1}{2}\,;\,2\right)$ y $\left(\frac{5}{3}\,;\,\frac{7}{2}\right)$.

La variación de las ordenadas es $\frac{7}{2} - 2 = \frac{3}{2}$ y la variación de las abscisas es $\frac{5}{3} - \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$. Entonces, por cada $\frac{7}{6}$ que aumenta la abscisa, la ordenada aumenta $\frac{3}{2}$.

Para calcular la pendiente, m, de la recta, que es la variación de la ordenada por cada unidad que varía la abscisa, se dividen los valores obtenidos: $m = \frac{3}{2} : \frac{7}{6} = \frac{9}{7}$



Cuando se conoce la pendiente y la ordenada al origen de una función, escribir su fórmula es inmediato. En casos en que estos dos valores no son conocidos, la fórmula se puede obtener a partir de otros datos.

Problema 8

De una función lineal se sabe que la pendiente es 3 y que contiene al punto $\left(\frac{2}{3}\,;\,-\frac{3}{4}\right)$. ¿Cuál es la fórmula?

Como la pendiente es 3, a partir de la fórmula general $f(x) = m\,x + b$, reemplazando m por 3, se obtiene: $f(x) = 3\,x + b$.

Además, se sabe que el punto $\left(\frac{2}{3}\,;\,-\frac{3}{4}\right)$ pertenece a la recta. Esto significa que $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{3}{4}$. Es decir, cuando $x = \frac{2}{3}$, la imagen es $-\frac{3}{4}$. Usando esta información, se obtiene:

$$f(x) = 3 \cdot x + b$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$-\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{2}{3} + b$$

Se obtiene así una ecuación que tiene una sola incógnita: la ordenada al origen b. Luego:

$$-\frac{3}{4} = 2 + b$$

$$-\frac{3}{4} - 2 = b$$

$$-\frac{11}{4} = b$$

Entonces, la fórmula de la función lineal es:

$$f(x) = 3x - \frac{11}{4}.$$

Problema 9

Obtener la fórmula de una función lineal si se sabe que su gráfica contiene a los puntos $\left(4\,;-\frac{3}{2}\right)$ y $\left(-\frac{5}{2}\,;-3\right)$.

Para hallar la pendiente m, se usa el procedimiento explicado en la página anterior:

$$m = \frac{-3-\left(-\frac{3}{2}\right)}{-\frac{5}{2}-4} = \frac{-3+\frac{3}{2}}{-\frac{5}{2}-4} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{13}{2}} = -\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{2}{13}\right) = \frac{3}{13} \Rightarrow m = \frac{3}{13}$$

Como la pendiente es $\frac{3}{13}$, a partir de la fórmula general $f(x) = m\,x + b$, reemplazando m por $\frac{3}{13}$, se obtiene: $f(x) = \frac{3}{13}x + b$.

Como en el problema anterior, al sustituir x y $f(x)$ por las coordenadas de un punto, resultará una ecuación con una sola incógnita: la ordenada al origen b. Como en este caso se dispone de dos puntos dados como datos, se elige uno de ellos y se reemplazan las variables x y $f(x)$ en la expresión.

$$f(x) = \frac{3}{13}x + b$$

$$-\frac{3}{2} = \frac{3}{13}\cdot 4 + b$$

Resolviendo la ecuación, se obtiene:

$$-\frac{3}{2} = \frac{12}{13} + b$$

$$-\frac{3}{2} - \frac{12}{13} = b$$

$$-\frac{63}{26} = b$$

Entonces, la fórmula de la función lineal es: $f(x) = \frac{3}{13}x - \frac{63}{26}$.

También se podría haber usado el otro punto para reemplazar sus coordenadas y obtener b. En ese caso, se habría obtenido el mismo valor para la ordenada al origen, porque la recta que contiene a los dos puntos dados como datos es única.

ACTIVIDADES

15. Hallen la fórmula de la función lineal cuya gráfica tiene las características que se indican en cada uno de los siguientes casos.

a. Su pendiente es 4 y contiene al punto $(-1\,;-2)$.

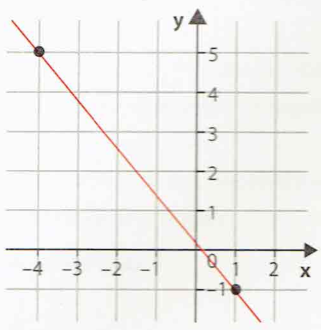
b. Su ordenada al origen es 5 y contiene al punto $\left(\frac{2}{3}\,;\,1\right)$.

c. Contiene a los puntos $(2\,;1)$ y $(5\,;-1)$.

d. Interseca al eje de las abscisas en $x = -2$ y contiene al punto $\left(4\,;-\frac{4}{5}\right)$.

16. Durante un experimento de laboratorio, se somete un metal a una fuente de calor de manera que la temperatura aumente constantemente a medida que transcurre el tiempo. A los 3 minutos la temperatura es de $-10\,°C$ y a los 7 minutos alcanza los $26\,°C$. Encuentren en qué momento la temperatura del metal fue de $0\,°C$.

17. ¿Es cierto que el par ordenado $\left(0\,;\frac{1}{5}\right)$ pertenece al gráfico de la siguiente recta? ¿Y el $\left(4\,;-\frac{29}{5}\right)$? Expliquen cómo se dieron cuenta.



Ceros, conjunto de positividad y conjunto de negatividad

Problema 10

En algunos países del mundo, como en la Argentina, se utiliza la escala de grados centígrados para expresar temperaturas, mientras que en otros, se utiliza la escala de grados Fahrenheit. La relación de conversión entre ambas escalas es lineal y está dada por la fórmula $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$, donde x es la temperatura expresada en grados centígrados y $f(x)$ es la misma temperatura expresada en grados Fahrenheit.

a. ¿Cuál es la temperatura en grados centígrados que equivale a 0 °F (se lee: cero grados Fahrenheit)?

b. ¿Para qué valores de temperatura expresada en grados centígrados, la temperatura equivalente en grados Fahrenheit es positiva?

c. ¿Para qué valores de temperatura, expresada en grados centígrados, la temperatura equivalente en grados Fahrenheit es negativa?

Las preguntas que se plantean en esta situación pueden traducirse, en términos de funciones, del modo siguiente:

¿Cuál es la temperatura en grados centígrados que equivale a 0 ° F?	¿Para qué valores de x la imagen es 0?
¿Para qué valores de temperatura, expresada en grados centígrados, la temperatura equivalente en grados Fahrenheit es positiva?	¿Para qué valores de x la imagen es positiva?
¿Para qué valores de temperatura, expresada en grados centígrados, la temperatura equivalente en grados Fahrenheit es negativa?	¿Para qué valores de x la imagen es negativa?

Para responder a estas preguntas, es necesario buscar el conjunto de ceros, el conjunto de positividad y el conjunto de negatividad de la función dada.

Para hallar los ceros, hay que averiguar cuáles son los valores de x cuya imagen es 0, es decir, hallar x para el cual $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{5}x + 3 = 0$$

Quedó planteada una ecuación. Al resolver esta ecuación, se obtiene:

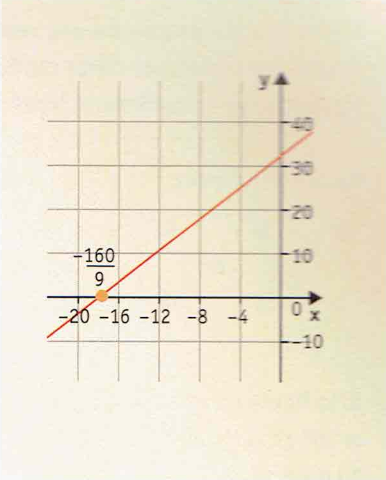
$$\frac{9}{5}x + 32 = 0$$
$$\frac{9}{5}x = -32$$
$$x = -32 : \frac{9}{5} = -\frac{160}{9}$$

Entonces, el conjunto de ceros de esta función es: $C^0 = \left\{-\frac{160}{9}\right\}$

Es decir: 0 grados Fahrenheit equivalen a $-\frac{160}{9}$ grados centígrados lo que responde a la primera pregunta del problema.

Una forma de hallar los conjuntos de positividad y de negatividad es usando el gráfico de la función.

La recta interseca al eje x en el punto de abscisa $x = -\frac{160}{9}$. Se observa que la gráfica de la función está por debajo del eje horizontal para todos los valores de x que son menores que $-\frac{160}{9}$, y está por encima para los valores de x mayores que $-\frac{160}{9}$. Es decir, las imágenes son positivas para las x en el intervalo $\left(-\frac{160}{9} ; +\infty\right)$ y negativas para las x en el intervalo $\left(-\infty ; -\frac{160}{9}\right)$.



Entonces, los conjuntos de negatividad y positividad son, respectivamente:

$$C^- = \left(-\infty ; -\frac{160}{9}\right) \text{ y } C^+ = \left(-\frac{160}{9} ; +\infty\right)$$

Esta información permite responder las otras dos preguntas que plantea el problema: para las temperaturas que, expresadas en grados centígrados, son mayores que $-\frac{160}{9}$, la temperatura en grados Fahrenheit es positiva. En cambio, para los valores que, en grados centígrados, son menores que $-\frac{160}{9}$, la temperatura en grados Fahrenheit es negativa.

El conjunto de positividad de una función $f(x)$ está formado por todos los valores de x que verifican que $f(x) > 0$. Se simboliza C^+.
El conjunto de negatividad de una función $f(x)$ está formado por todos los valores de x que verifican que $f(x) < 0$. Se simboliza C^-.

18. Hallen el conjunto de ceros y los conjuntos de positividad y de negatividad de las siguientes funciones lineales.

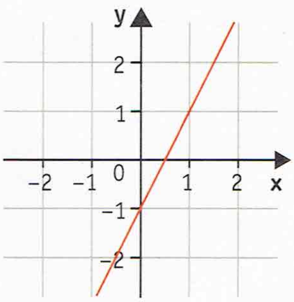
a. $f(x) = 6x + 4$ **b.** $g(x) = -\frac{2}{3}x + 1$

c. $n(x) = \frac{4}{5}x - 2$ **d.** $t(x) = -x + 3$

19. Se tiene el siguiente gráfico de una función lineal.

a. ¿Cuál es la fórmula de la función?

b. Encuentren el conjunto de negatividad.



20. La tabla siguiente muestra algunos valores de una función lineal f.

x	3	−2
$f(x)$	−2	4

Hallen el conjunto de ceros y los conjuntos de positividad y de negatividad de f.

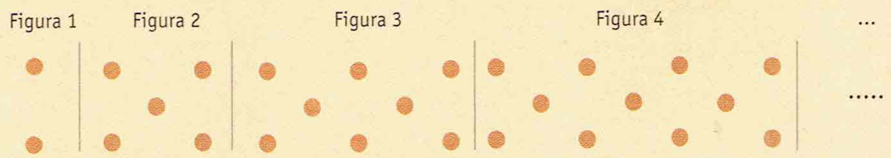
21. a. Encuentren la expresión de una función lineal que sea positiva para todos los valores de x mayores que 5 y negativa para todos los valores de x menores que 5.

b. Encuentren la expresión de una función lineal que valga 0 para $x = \frac{1}{2}$. ¿Habrá una única función? ¿Por qué?

Más sobre funciones lineales

Problema 11

A continuación se muestra una secuencia de figuras, separadas por barras. Cada figura está compuesta por cierta cantidad de puntos dispuestos con una regularidad. La secuencia puede continuarse indefinidamente respetando esta regularidad.



a. La figura 1 tiene 2 puntos; la figura 2 tiene 5 puntos. ¿Cuántos puntos tendrá la figura 10? ¿Y la figura 75? ¿Habrá en esta secuencia alguna figura que tenga exactamente 90 puntos?

b. ¿Cuál es la fórmula que sirve para calcular la cantidad de puntos que tiene una figura cualquiera de esta secuencia en función del lugar que ocupa?

Para resolver este problema, es útil razonar del modo siguiente.

En la primera figura hay 2 puntos; en la segunda hay 3 más que en la primera; en la tercera, hay 3 más que en la segunda; y así sucesivamente. Entonces, para pasar a la figura siguiente se agregan 3 puntos a la figura anterior, de modo que, al conformar cada figura, se ha sumado 3 una cantidad de veces igual al número de orden de la figura menos uno.

En la figura 10 habrá entonces 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 29 puntos.

Para armar la fórmula se puede analizar el siguiente cuadro:

Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	.....	Figura n
2	$2 + \mathbf{3}$	$2 + \mathbf{3} + \mathbf{3}$	$2 + \mathbf{3} + \mathbf{3} + \mathbf{3}$	....	$2 + \mathbf{3}\,(\boldsymbol{n} - \mathbf{1})$

La expresión obtenida puede reducirse, así:

$$2 + \mathbf{3}\ (\boldsymbol{n} - \mathbf{1}) = 2 + 3\,n - 3 = 3\,n - 1$$

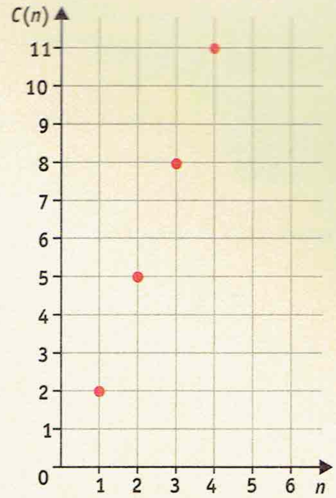
Entonces, la fórmula $C(n) = 3\,n - 1$ permite calcular la cantidad de puntos que forman la figura que ocupa el lugar n en esta secuencia, sin necesidad de dibujarla ni de dibujar todas las anteriores.

Para $n = 10$	$C(10) = 3 \cdot 10 - 1 = 29$	29 puntos
Para $n = 75$	$C(75) = 3 \cdot 75 - 1 = 224$	224 puntos

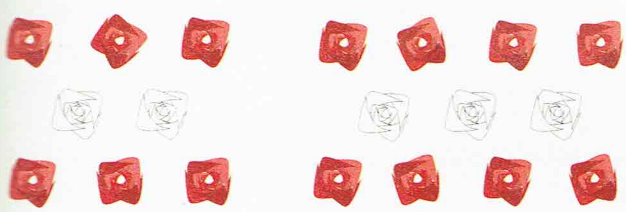
Además, la fórmula permite saber que ninguna figura de esta secuencia tendrá exactamente 90 puntos, pues al analizarla, se advierte que la cantidad de puntos de una figura se obtiene sumando 2 a un múltiplo de 3, y este resultado nunca será otro múltiplo de 3. Como 90 sí lo es, se puede asegurar que ninguna de las figuras de esta secuencia tendrá 90 puntos.

Si se considera la función $C: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \; / \; C(n) = 3n - 1$ y se representa en un gráfico cartesiano algunos de sus pares ordenado se obtiene un gráfico como el siguiente:

Todos los puntos que pertenecen a la gráfica de esta función están alineados. Sin embargo, en este caso no se debe trazar la recta que los une, porque los valores que puede tomar la variable n son solo números naturales. Por ejemplo, entre 1 y 2 no hay ningún valor para n. Los valores de n tampoco pueden ser negativos.



22. Una florería prepara arreglos florales y los exhibe en sus vidrieras para la venta. Uno de los modelos que ofrecen es una combinación de rosas blancas y rosas rojas, dispuestas en una forma particular.
Por ejemplo, para armar estos modelos con dos rosas blancas y con tres rosas blancas, se las dispone como se muestra en la figura siguiente.



a. Dibujen un esquema análogo para cuatro rosas blancas.

b. ¿Cuántas rosas rojas se necesitan para rodear a cinco rosas blancas? ¿Y para 84 rosas blancas?

c. ¿Cuántas rosas blancas tiene un arreglo floral construido con el mismo esquema y con 184 rosas rojas?

d. Encuentren una fórmula que sirva para calcular la cantidad necesaria de rosas rojas, conociendo la cantidad utilizada de rosas blancas. ¿Representa una función lineal? Justifiquen la respuesta.

e. Encuentren una fórmula que sirva para calcular la cantidad total de rosas (blancas y rojas) a partir de conocer la cantidad de rosas blancas. ¿Representa una función lineal? Justifiquen la respuesta

23. a. Realicen el gráfico de las siguientes funciones lineales.

$f(x) = 2x + 1$ $\qquad$ $g(x) = 5x - 3$

b. ¿Alguno de los puntos siguientes pertenece a la gráfica de f? Expliquen cómo hacen para responder.

$(20 ; 41)$ $\qquad$ $(-3 ; -5)$ $\qquad$ $(-8 ; -17)$

24. Consideren las funciones del tipo $f(x) = 4x + t$.

a. Encuentren el valor de t para que la gráfica de la función obtenida contenga al punto $(0 ; 5)$.

b. Encuentren el valor de t para que la gráfica de la función obtenida contenga al punto $(2 ; 10)$.

25. Indiquen, en cada caso, si los puntos están alineados. Expliquen cómo se dieron cuenta:

a. $(3 ; \frac{4}{3}) ; (\frac{1}{2} ; \frac{2}{3}) ; (\frac{2}{3} ; \frac{7}{9})$

b. $(3 ; -\frac{2}{3}) ; (\frac{1}{2} ; \frac{2}{3}) ; (-\frac{2}{3} ; \frac{7}{9})$

c. $(3 ; 7) ; (\frac{1}{2} ; \frac{7}{6}) ; (-\frac{2}{3} ; -\frac{14}{9})$

26. Indiquen si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justifiquen su respuesta.

a. Tres puntos cualesquiera del plano siempre están alineados.

b. Dos puntos cualesquiera del plano siempre están alineados.

c. Tres puntos cualesquiera del plano a veces no están alineados.

d. Dos puntos cualesquiera del plano a veces no están alineados.

39. La máquina expendedora de boletos de un colectivo se carga con monedas que totalizan $ 25. La línea tiene una tarifa única de $ 0,90.

a. ¿Cuánto dinero contiene la máquina cuando se expendieron 120 boletos?

b. ¿Cuál es la recaudación neta de la primera vuelta de recorrido, en la que se expendieron 85 boletos?

c. En un determinado momento hay en la máquina $ 155,50. ¿Cuántos boletos se llevaban vendidos?

d. ¿Es posible que en algún momento haya en la máquina $ 200? ¿Por qué?

e. ¿Qué representación es la adecuada para graficar el dinero que hay en la máquina en función de la cantidad de boletos expendidos: una recta, una semirrecta o un conjunto de puntos alineados aislados? ¿Por qué?

40. En Física, se llama *movimiento uniformemente acelerado*, al que desarrolla un móvil cuando su aceleración es constante. En un movimiento uniformemente acelerado, la velocidad V del móvil en cada instante t se puede calcular con la fórmula $V = V_0 + a \cdot t$, siendo V_0 la velocidad inicial del móvil y a la aceleración.

a. Un móvil parte con una velocidad de 30 km/h marcha con una aceleración constante de 4 km/h². Escriban la fórmula que dé la velocidad (en km/h) que tendrá el móvil en cada instante (en horas) y calculen dicha velocidad a las 2 horas de haber comenzado el movimiento.

b. Una piedra se deja caer desde una cierta altura. Escriban la fórmula que dé la velocidad alcanzada por la piedra (en m/seg) en función del tiempo (en segundos). Tengan en cuenta que todo cuerpo que se deja caer queda sometido a la aceleración de la gravedad, que es de 10 m/seg², aproximadamente. Calculen, además, la velocidad que alcanzará la piedra a los 3 segundos de haber sido soltada y en qué instante alcanzará una velocidad de 45 m/seg.

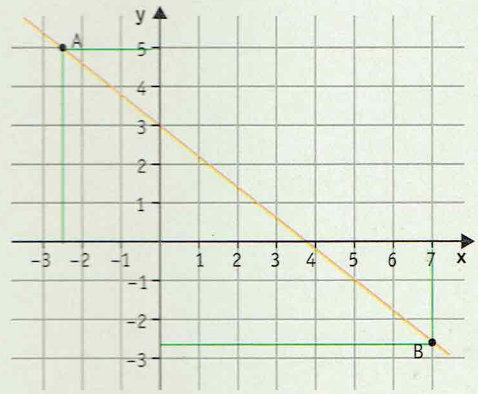
41. Una balanza utilizada en un supermercado reconoce el tipo de mercadería que se le coloca mediante el código que se le digita y tiene programado su precio por kilogramo.

Si se coloca una cierta cantidad de manzanas, el pesaje indicado es 2,600 kg y el precio correspondiente es $ 4,68. Si se coloca una cierta cantidad de pomelos, el pesaje indica 4,100 kg y el precio correspondiente es $ 8,61.

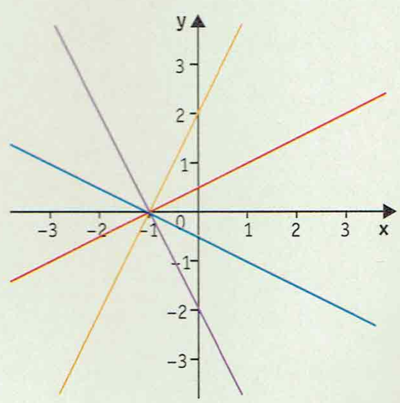
a. ¿Cuál de las dos frutas es más barata? Justifiquen la respuesta.

b. Un cliente compró 5 kg de manzanas, pero el empleado confundió los códigos y anotó el de los pomelos. ¿El cliente salió beneficiado o perjudicado? ¿En cuánto dinero?

42. El gráfico siguiente corresponde a una función lineal f. La recta interseca al eje de ordenadas en $y = 3$ y contiene al punto $(5 ; -1)$. Calculen las coordenadas de los puntos A y B señalados en el gráfico.



43. Indiquen cuál es la fórmula que corresponde a cada una de las rectas del siguiente gráfico. Expliquen cómo lo pensaron.



$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ ;\ g(x) = -2x - 2$$

$$h(x) = 2x + 2\ ;\ t(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

44. Escriban la fórmula de la función lineal que corresponde a cada una de las siguientes situaciones. Para cada caso, indiquen la pendiente y la ordenada al origen e indiquen si es una función de proporcionalidad directa.

a. A cada número real le hace corresponder su opuesto.

b. A cada número real lo aumenta en una unidad.

c. A cada número real lo disminuye en una unidad.

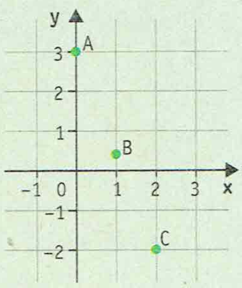
d. A cada número real le hace corresponder el mismo número real (*función identidad*).

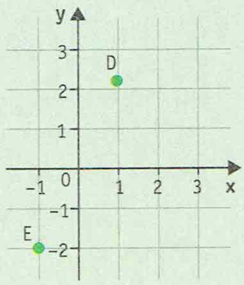
e. A cada número real le resta su triple.

45. Los gráficos siguientes corresponden a dos funciones f y g. Los puntos que aparecen en él tienen coordenadas A = (0 ; 3), B = (1 ; 0,4) y C = (2 ; –2) (en la función f) y D = (1 ; 2,2) y E = (–1 ; –2) (en la función g)

a. ¿Es cierto que f es una función lineal? ¿Por qué?

b. ¿Es cierto que g es una función de proporcionalidad directa? ¿Y lineal? ¿Por qué?



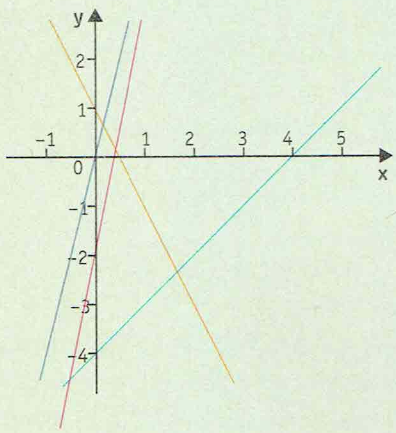


46. De una función lineal f se sabe que $f(5) - f(2) = 4$.

a. Hallen la pendiente de la recta que representa a f.

b. ¿Alcanza la información dada para obtener la fórmula de f? Si responden que sí, escriban la fórmula. Si responden que no, expliquen por qué.

47. Para cada una de las siguientes rectas, decidan cuál es la fórmula que le corresponde sin hacer ningún cálculo:



$f(x) = 4x$ $\quad$ $g(x) = x - 4$ $\quad$ $h(x) = -2x + 1$ $\quad$ $t(x) = 5x - 2$

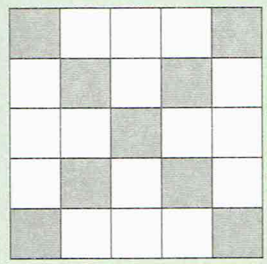
48. La compañía eléctrica del pueblo de Andrés cobra el consumo de luz de la siguiente manera: un costo fijo de \$ 19 y \$ 0,035 por kwh consumido.

a. Andrés consumió en mayo 650 kwh. ¿Cuánto debe abonar?

b. Si en agosto debe pagar \$ 47,70, ¿cuántos kwh consumió?

c. Si en septiembre quiere gastar menos de \$ 42. ¿Cuánto será el máximo de kwh que puede consumir?

49. Un cuadrado, formado por cuadraditos, está pintado según el siguiente modelo:



a. ¿Cuántos cuadraditos quedarán pintados en un cuadrado de 9 x 9? ¿Y en uno de 12 x 12?

b. ¿Es posible encontrar una fórmula que permita calcular la cantidad de cuadraditos que quedarán pintados si el cuadro es de $n \times n$?

50. En el pueblo A, la boleta de gas se factura a razón de \$ 0,15 el metro cúbico consumido.

En el pueblo B, la boleta de gas se factura a razón de \$ 0,12 el metro cúbico consumido más \$ 5 de abono fijo.

a. Si Ariel consume 120 metros cúbicos, ¿cuánto gasta en el pueblo A? ¿Y en el B?

b. Si Matías consumió 170 metros cúbicos, ¿cuánto gasta en cada uno de los pueblos?

c. Juan y Carlos viven en el pueblo A. Juan consume el doble de metros cúbicos que Carlos. ¿Es cierto que debe pagar el doble? ¿Por qué?

d. Juana y Martina viven en el pueblo B. Juana consume el doble de metros cúbicos que Martina y dice que no paga el doble. ¿Es cierto? ¿Por qué?

e. ¿Qué cantidad de metros cúbicos consumió Silvana en el pueblo A si pagó \$ 12,75?

f. ¿Qué cantidad de metros cúbicos consumió Claudio en el pueblo B si pagó \$ 23?

g. Dos personas gastaron la misma cantidad de dinero en gas, viviendo uno en el pueblo A y el otro en el pueblo B. Si usaron la misma cantidad de metros cúbicos. ¿Cuántos metros cúbicos de gas consumieron y cuánto gastaron?

AUTOEVALUACIÓN

Marquen la o las opciones correctas en cada caso:

1. La recta de fórmula $f(x) = 3x + 2$ interseca al eje de ordenadas en el punto:

a $(0\,;-3)$ **b** $(-3\,;0)$

c $(0\,;2)$ **d** $(2\,;0)$

2. Una empresa de comunicaciones que vende su servicio de conexión a Internet ofrece tres alternativas para el pago del servicio.

Alternativa A: Pagar una suma total fija de \$ 68.

Alternativa B: Pagar una suma fija de \$ 26, más un adicional proporcional al tiempo de conexión, que se calcula a razón de \$ 0,20 por minuto.

Alternativa C: Pagar solamente un precio proporcional al tiempo de conexión, calculado a razón de \$ 0,30 el minuto.

Si en los tres casos la calidad del servicio es la misma, ¿hay alguna tarifa que sea más conveniente?

a Alternativa A. **b** Alternativa B.

c Alternativa C. **d** La respuesta depende del tiempo de conexión.

3. La recta de fórmula $g(x) = -3x + 2$ interseca al eje de abscisas en el punto:

a $(0\,;2)$ **b** $(-3\,;0)$

c $\left(-\frac{2}{3}\,;0\right)$ **d** $\left(\frac{2}{3}\,;0\right)$

4. La gráfica de la función $f(x) = 5x - 1$ tiene ordenada al origen b e interseca al eje de abscisas en $x = X_0$. Entonces, los valores de b y X_0 son:

a $b = 5$ y $X_0 = -1$ **b** $b = 5$ y $X_0 = \frac{1}{5}$

c $b = -1$ y $X_0 = \frac{1}{5}$ **d** $b = -1$ y $X_0 = 5$

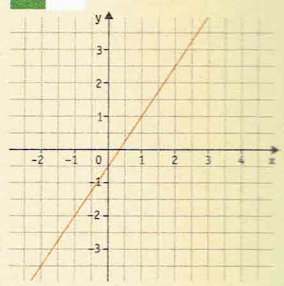
5. La pendiente de la recta de fórmula $y = x + 3$ es:

a 1 **b** 3

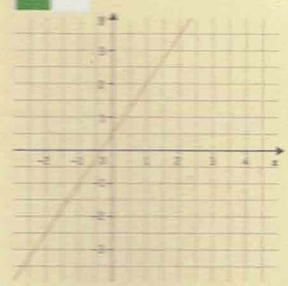
c 0 **d** −3

6. Señalen el gráfico que corresponde a la función $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

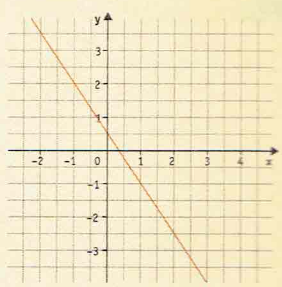
a



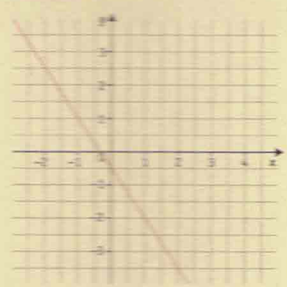
b



c



d



7. ¿Cuál o cuáles de los siguientes pares ordenados pertenecen al gráfico de la recta $f(x) = 3x - 1$?

a $(8\,;3)$ **b** $(-8\,;-25)$

c $(-8\,;-23)$ **d** $(5\,;14)$

8. ¿Cuál o cuáles de las siguientes situaciones podrían ser representadas mediante una función lineal?

a La cantidad de agua que sale de una canilla, en función del tiempo.

b La cantidad de dientes de un niño en función del tiempo.

c El costo de cierta mercadería en función del peso.

d La cantidad de kilos bajados en función del tiempo de la dieta.

4 FUNCIONES Y ECUACIONES LINEALES

CONTENIDOS

- Forma implícita y forma explícita de la ecuación de la recta
- Rectas horizontales y verticales
- Rectas paralelas y rectas perpendiculares
- Ecuaciones e inecuaciones lineales
- Funciones con tramos lineales; función módulo

Los modelos matemáticos que establecen relaciones entre variables pueden representarse de diferentes maneras; las funciones lineales constituyen una de ellas y sus gráficos son rectas. Hay distintas maneras de expresar la fórmula de ecuaciones cuyas soluciones son los puntos de una recta y para cada expresión se tiene un tratamiento determinado.

En este capítulo se desarrollan, entre otras cuestiones, los conceptos de paralelismo y perpendicularidad y su vinculación con las ecuaciones de las rectas; diferentes modos de resolución de ecuaciones e inecuaciones lineales y la relación entre estos procedimientos y las funciones lineales.

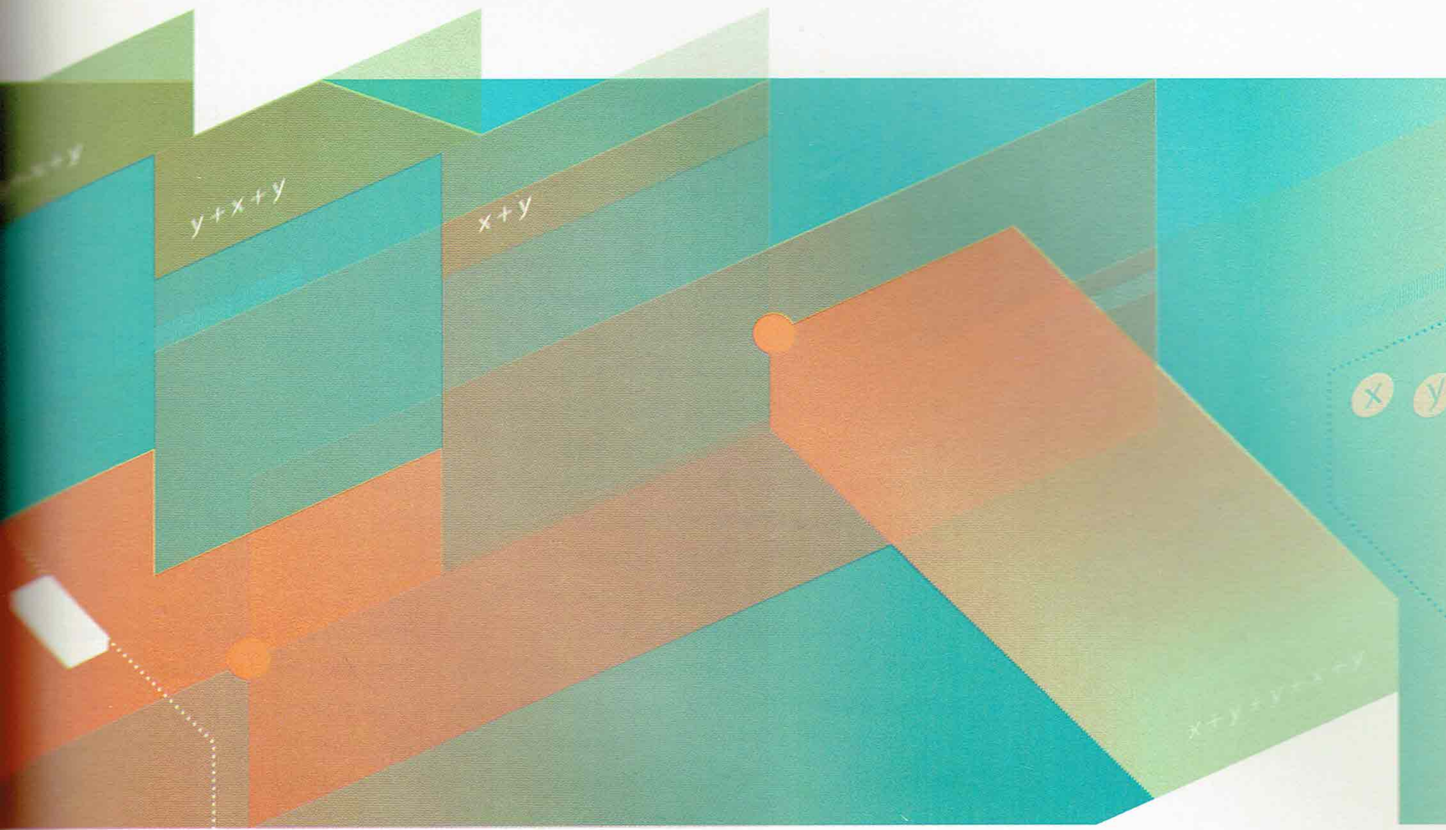
Problema 1

Se quiere completar los casilleros en blanco según las instrucciones que se dan a continuación.

- Se coloca un número en el primer casillero y un número en el segundo casillero.
- En el tercero se coloca la suma del primero y el segundo.
- En el cuarto se coloca la suma del segundo y el tercero.
- En el quinto se debe colocar la suma del tercero y el cuarto, y esta suma debe coincidir con el número 100.

				100

¿Cuáles son los números que pueden colocarse en los dos primeros casilleros, de modo que, respetando las indicaciones, el que corresponda al último sea el 100?
¿Es única la solución? ¿Qué relación hay entre dos números que componen una solución para el problema?



Para resolver el problema, es posible empezar por probar con algunos valores. Si se llama x al número que se coloca en el primer casillero e y al del segundo; podría ser:

$x = 10$ e $y = 5$. Sin embargo con esta elección, para el último casillero se obtiene 35, o sea que estos valores no sirven. En cambio, para $x = 20$ e $y = 20$, se obtiene 100, es decir, se verifica la última condición pedida. Pero para $x = 30$ e $y = 40$ se obtiene 180. Aparentemente, los pares de números que funcionan cumplen alguna condición. ¿Cuál es dicha condición?

Con x en el primer casillero e y en el segundo, en el tercer casillero irá $x + y$, y del mismo modo, es posible asignar a los casilleros siguientes las expresiones algebraicas correspondientes, como se indica en el esquema.

				100
x	y	$x+y$	$y+x+y$	$x+y+y+x+y$

Es decir, debe cumplirse la siguiente condición: $2x + 3y = 100$

Entonces, todos los pares de números $(x\ ;\ y)$ que verifican la ecuación anterior son soluciones para este problema, es decir, pueden colocarse en los primeros casilleros y verificarán las reglas indicadas.

Por ejemplo si $x = 50$, $y = 0$ se verifica por que $2 \cdot 50 + 3 \cdot 0 = 100$

si $x = 32$, $y = 12$ se verifica por que $2 \cdot 32 + 3 \cdot 12 = 100$

La ecuación de la recta: forma implícita y forma explícita

En el problema anterior se obtuvo que la relación entre los números que servían para responder el problema era: $2x + 3y = 100$.

¿Cuántos pares de números cumplen esta condición?

En principio, se encontró que hay por lo menos tres pares (20 ; 20), (50 ; 0) y (32 ; 12). Cada ejemplo se puede obtener al asignarle un valor a x y luego calcular el valor de y, es decir:

$$2x + 3y = 100 \iff 3y = 100 - 2x \iff y = \frac{100 - 2x}{3} \iff y = \frac{100}{3} - \frac{2}{3}x$$

Entonces, existen infinitos pares de valores que son solución para el problema. Los puntos que verifican la condición forman una recta con pendiente $-\frac{2}{3}$ y ordenada al origen $\frac{100}{3}$.

En general, si se tiene una expresión de la forma:

$$\mathrm{A}\,x + \mathrm{B}\,y = \mathrm{C}$$

con A, B y C números reales cualesquiera, las soluciones de esta ecuación son pares de números $(x ; y)$ que verifican la condición. Si B es distinto de 0, de esta ecuación general puede despejarse la variable y:

$$\mathrm{A}\,x + \mathrm{B}\,y = \mathrm{C} \iff \mathrm{B}\,y = -\mathrm{A}\,x + \mathrm{C} \iff y = \frac{-\mathrm{A}x + \mathrm{C}}{\mathrm{B}} \iff y = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}x + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}$$

La expresión obtenida es la *ecuación explícita de una recta*, porque es de la forma $y = mx + b$, siendo $-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ la pendiente y $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}$ la ordenada al origen.

La expresión $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y = \mathrm{C}$, (con $\mathrm{B} \neq 0$) es la ecuación de una recta. Esta forma de expresar la ecuación de la recta se la llama *ecuación implícita de una recta* y puede transformarse en una ecuación explícita al despejar y.

$2x + 3y = 100$ es la *forma implícita de la ecuación de una recta.*
$y = -\frac{2}{3}x + \frac{100}{3}$ es la *forma explícita de la ecuación de una recta.*

Por ejemplo, si se considera la función lineal $f(x) = 5x - 1$ y su representación gráfica, que es una recta, cada uno de los puntos que pertenecen a esta recta cumple la condición que indica su fórmula: la ordenada (y) es igual al quíntuplo de la abscisa (x) disminuido en 1, es decir: $y = 5x - 1$. Ésta es la ecuación explícita de la recta asociada a esta función.

Función lineal: $f(x) = 5x - 1$ Ecuación explícita de la recta: $y = 5x - 1$

Posibles ecuaciones implícitas de la recta anterior serían:

$5x - y = 1$ o $10x - 2y = 2$

Función lineal: $f(x) = mx + b$.
Ecuación explícita de la recta: $y = mx + b$.

Al analizar una función lineal como modelo de un proceso, se distinguen las variables, estableciéndose a la variable dependiente en función de la variable independiente, y aparece la recta como la representación gráfica de esta relación. Pero también es posible analizar a la recta como objeto geométrico y su relación con las distintas expresiones algebraicas asociadas a ella. En este caso, no se establece dependencia alguna de una variable sobre otra, sino que ambas representan las coordenadas de los puntos del plano que pertenecen a la recta estudiada. Los puntos de la recta se identifican con pares ordenados de números que cumplen una relación numérica entre sí.

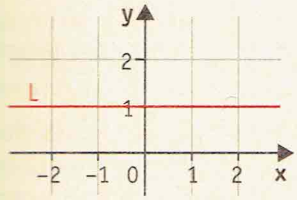
ACTIVIDADES

1. Encuentren la forma explícita de cada una de las siguientes rectas dadas en forma implícita:

a. $2x + 4y = 7$ **b.** $x + 2y = -3$
c. $3x - 4y = 5$ **d.** $-5x - 3y = 6$

Rectas horizontales

En el gráfico siguiente se presenta una recta horizontal.



Ecuación explícita de L
$y = 1$

¿Qué característica identifica a todos los puntos que pertenecen a esta recta?
Algunos de estos puntos son: (-2 ; 1) ; (0 ;1) ; (1 ; 1). En todos ellos, la segunda coordenada es 1. Para que la recta sea paralela al eje x, todos sus puntos deberán estar a la misma distancia de este eje. Por lo tanto, la ordenada de todos los puntos de esta recta debe ser 1. Por eso, su ecuación explícita es $y = 1$.

En toda recta horizontal, la coordenada y está restringida a un único número, en tanto que la coordenada x puede tomar cualquier valor. Por eso, en la ecuación implícita de una recta horizontal, no aparece el coeficiente A y sí aparece el coeficiente B, es decir, $A = 0$ y $B \neq 0$. Entonces, los pares de números que conforman la recta cumplen la siguiente condición:

$$0 \cdot x + By = C \qquad y = \frac{C}{B}$$

Ésta es la ecuación explícita de una recta horizontal y es de la forma $y = b$ siendo b un número real.

Si se analiza la pendiente de esta recta utilizando, por ejemplo, los puntos (– 2 ; 1) y (0 ; 1):

$$m = \frac{1-1}{-2-0} = \frac{0}{-2} = 0$$

Entonces, la pendiente es 0.

La pendiente de cualquier recta horizontal es 0.

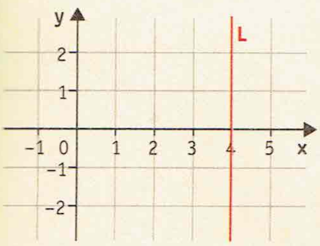
En efecto, suponiendo que $(x_1 ; b)$ y $(x_2 ; b)$ son dos puntos distintos de una recta horizontal, al calcular la pendiente, se obtiene:

$$m = \frac{b-b}{x_2 - x_1} = 0$$

Por lo tanto, la pendiente de toda recta horizontal es 0 y su ecuación es $y = b$.

Una recta horizontal representa una función lineal, a la que se llama **función constante.**
Su fórmula es del tipo $f(x) = b$, siendo b un número real, y su ecuación explícita es de la forma $y = b$.

Rectas verticales



Ecuación de L
$x = 4$

¿Qué característica identifica a todos los puntos que pertenecen a esta recta?
Algunos de estos puntos son: (4 ; 1) ; (4 ; 0); (4 ; –2). En todos ellos, la primera coordenada es 4. Para que la recta sea paralela al eje y, todos sus puntos deberán estar a la misma distancia de este eje. Por lo tanto, la abscisa de todos los puntos de esta recta debe ser 4. Por eso, su ecuación es $x = 4$.

La ecuación de toda recta vertical es de la forma $x = a$, siendo a un número real. Las rectas verticales no tienen pendiente y no pueden asociarse a funciones.

Si se intenta calcular la pendiente de esta recta tomando, por ejemplo, los puntos (4 ; 1) y (4 ; 0), se obtiene:

$m = \dfrac{1-0}{4-4}$ ⇒ El cálculo no se puede resolver porque el denominador se anula. Esto significa que la recta *no tiene pendiente*.

La ecuación de una recta siempre puede reducirse a una de las siguientes formas:

- $y = m \cdot x + b$, siendo m y b números reales.

Cuando $m = 0$, la recta es horizontal y cuando $m \neq 0$, la recta es oblicua. La función lineal asociada es $f(x) = m \cdot x + b$.

- $x = a$, siendo a un número real, para las rectas verticales. Este tipo de rectas no representan funciones.

Al generalizar el caso anterior, se concluye que siempre que los puntos de una recta tienen todos la misma abscisa, la recta es vertical y su ecuación expresa "x igual a ese valor de abscisa", es decir, es de la forma $x = a$, siendo a un número real.

Las rectas verticales no tienen pendiente. En efecto, suponiendo que $(a ; y_1)$ y $(a ; y_2)$ son dos puntos distintos de esa recta, cuando se intenta calcular la pendiente, se obtiene:

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{a - a}$ ⇒ El cálculo no puede realizarse por que se anula el denominador al ser iguales las abscisas.

Las rectas verticales no son funciones, porque representan situaciones en las que para un único valor de la variable x se asignan infinitos valores de la variable y.

En la ecuación implícita de una recta vertical, no aparece el coeficiente B y sí aparece el coeficiente A, es decir, $A \neq 0$ y $B = 0$. Entonces, los pares de números que conforman la recta cumplen la siguiente condición:

$$A\,x + 0 \cdot y = C \Leftrightarrow x = \frac{C}{A}$$

La expresión $Ax + By = C$, siendo A, B y C números reales (cuando A y B no sean ambos cero), es la ecuación implícita de una recta.

Si $A = 0$ y $B \neq 0$, la recta es horizontal.

Si $A \neq 0$ y $B = 0$, la recta es vertical.

Si $A \neq 0$ y $B \neq 0$, la recta es oblicua.

Si $C = 0$, la ordenada al origen es 0 y x e y son directamente proporcionales.

Por último, falta analizar qué ocurre si los coeficientes A y B son ambos nulos en la ecuación implícita de una recta. En este caso, la ecuación resultaría de la forma:

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = C$$

$C \neq 0$

Si C no es 0, ningún par de valores verifica la ecuación, pues $0 . x + 0 . y$ es siempre 0, cualesquiera sean los valores de x e y. En todos estos casos, el conjunto solución de la ecuación es vacío.

$C = 0$

Si C es 0, todo punto del plano verifica la ecuación, pues $0 . x + 0 . y = 0$ es siempre una igualdad verdadera, cualesquiera sean los valores de x e y. En este caso, la ecuación no representa una recta, sino todos los puntos del plano.

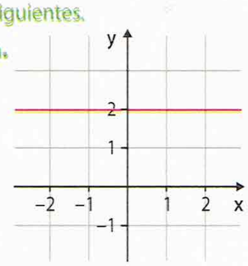
ACTIVIDADES

2. Hallen, en cada caso, la ecuación de la recta que contiene a los puntos que se indican.

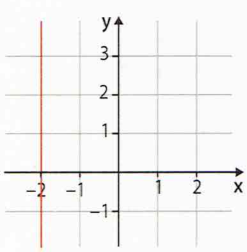
a. (3 ; 4) y (5 ; 4) **b.** (2 ; 3) y (2 ; 7)

3. Hallen la fórmula de las funciones lineales asociadas a las gráficas siguientes.

a.



b.



4. Encuentren tres pares ordenados que sean solución de la ecuación $4x - 3y = 24$.

5. Las entradas a una cancha de básquet cuestan \$ 12 las populares y \$ 25 las plateas. Si se recaudaron \$ 70 650, ¿cuántas plateas y cuántas populares se vendieron? ¿Hay más de una respuesta posible?

Las distintas formas de la ecuación de la recta

La forma implícita de la ecuación de la recta permite expresar en una única ecuación a **todas** las rectas. En cambio, la forma explícita tiene una expresión para las rectas oblicuas y horizontales (las que son funciones lineales) y otra para las que son verticales (las que no son funciones).

Para obtener los datos destacados de una función lineal (pendiente y ordenada al origen), la forma explícita es la ideal, por la lectura directa que permite de ellos.

La ecuación implícita de la recta $Ax + By = C$ (con $B \neq 0$) se puede transformar en la ecuación explícita

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$$

Esta forma permite obtener fácilmente la pendiente y la ordenada al origen:

$$m = -\frac{A}{B} \text{ y } b = \frac{C}{B}$$

Problema 2

En una carpintería se utilizan tipos de listones de madera de pino y de guatambú, todos los listones tienen el mismo ancho. El largo de los listones de la misma madera es igual. Pero si se colocan, uno a continuación del otro 4 listones de madera de pino , el largo total es 3 metros mayor que si se colocan uno tras otro 2 listones de guatambú. ¿Cuál es el largo de cada tipo de listón?

Para resolver este problema es conveniente designar con la letra x a la medida del largo de un listón de pino y con la letra y al largo del otro. Al plantear una expresión que represente las condiciones indicadas en el enunciado, se obtiene: $4x = 2y + 3 \iff 4x - 2y = 3$.

La ecuación obtenida es la ecuación implícita de una recta oblicua, porque los coeficientes de las variables x e y no valen 0. Esta ecuación representa infinitos pares ordenados que verifican esta condición.

Sin embargo, para encontrar las longitudes posibles de cada tipo de listón, resulta más conveniente escribir la ecuación de manera explícita, es decir, encontrar la ecuación equivalente de la forma $y = mx + b$. Para hacerlo, se despeja la variable y:

$$4x - 2y = 3 \iff -2y = 3 - 4x \iff y = 2x - \frac{3}{2}$$

Por ejemplo, si el *listón de pino*(x) mide 1 metro, reemplazando esta medida en la fórmula anterior se obtiene la medida del *listón de guatambú* (y).

Para $x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 - \frac{3}{2} = 0{,}5 \Rightarrow y = 0{,}5$

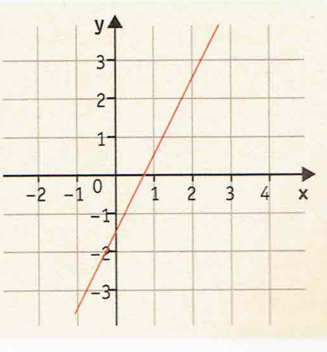
Se concluye que, para este caso, el listón de guatambú mide de 0,5 metros.

Es decir, basta con dar un valor cualquiera a x para calcular el valor de y.

Hay infinitas posibilidades para x e y. Algunas de ellas resultan adecuadas al contexto del problema y otras no. Por ejemplo, x no puede tomar valores negativos, ni valer 0, pues x representa una medida de longitud.

Pero si se considera solo la ecuación, es posible representar todos los pares de valores (x ; y) que son solución en un gráfico como el siguiente.

$y = 2x - \frac{3}{2}$



Rectas paralelas y rectas perpendiculares

Problema 3

Dos familias salen simultáneamente en sus autos por una misma ruta rumbo a una ciudad balnearia. Una de las familias parte de la ciudad A, mientras que la otra lo hace desde una ciudad distante 50 km de A hacia adelante. La ciudad de destino se encuentra a 250 km de la ciudad A. Ambos autos van a velocidad constante, recorriendo 2 km por minuto.

En el mismo momento en que partieron los autos mencionados, un camión sale desde la ciudad balnearia por la misma ruta y en sentido contrario a los otros dos autos, a velocidad constante, recorriendo medio kilómetro por minuto.

Si se representan gráficamente la distancia (en km) a la que se encuentra cada uno de los tres vehículos de la ciudad A en función del tiempo (en minutos), ¿qué relaciones tienen estos gráficos?

Si se designa con x al tiempo desde la salida medido en minutos y con y a la distancia a la ciudad A medida en kilómetros:

Primer auto: Sale de A
$\Rightarrow$ el punto (0 ; 0) está en el gráfico.
La velocidad es de 2 km/min
$\Rightarrow$ la pendiente es 2

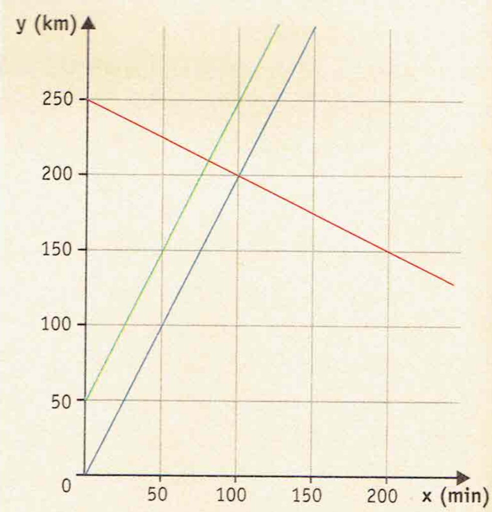
$$f(x) = 2x$$

Segundo auto: Sale a 50 km de A
$\Rightarrow$ el punto (0 ; 50) está en el gráfico.
La velocidad es de 2 km/min
$\Rightarrow$ la pendiente es 2

$$g(x) = 2x + 50$$

Camión: Sale a 250 km de A
$\Rightarrow$ el punto (0 ; 250) está en el gráfico.
La velocidad es de 0,5 km/min pero se acerca a A
$\Rightarrow$ la pendiente es – 0,5

$$h(x) = -0{,}5x + 250$$



Dadas las rectas R_1 y R_2:
$R_1: y = m_1 x + b_1$
$R_2: y = m_2 x + b_2$
Entonces:
$m_1 = m_2 \Leftrightarrow R_1 // R_2$
$m_1 = m_2$ y $b_1 = b_2 \Leftrightarrow R_1$ y R_2 son *coincidentes*.
Además, dos rectas verticales siempre son paralelas.

En el gráfico se aprecia que las rectas correspondientes a los dos autos son paralelas. Esto se debe a que para cualquier intervalo de tiempo, ambos autos recorren la misma distancia. Por eso, en todo momento la distancia entre ellos es la misma: los 50 km que los separan al comienzo del movimiento. El hecho de tener ambas rectas la misma pendiente es lo que hace que sean paralelas.

Generalizando el caso anterior, se establece la siguiente condición: siempre que dos rectas tienen la misma pendiente, son *paralelas*. Si dos rectas que tienen la misma pendiente tienen, además, la misma ordenada al origen, entonces se dice que son *coincidentes*. Las rectas verticales, aunque no tienen pendiente, siempre son paralelas.

Por ejemplo, si las ecuaciones de las rectas R_1 y R_2 son las siguientes:

$$R_1: y = 3x + 1 \qquad R_2: y = 3x - 2$$

Sin representarlas en un gráfico, es posible anticipar que son paralelas, porque ambas tienen pendiente 3, es decir, sus pendientes son iguales.

También son paralelas las rectas verticales cuyas ecuaciones son $x = 4$ y $x = 2$.

Si se consideran ahora las rectas de ecuaciones $y = 2x$ e $y = -0{,}5x + 250$, más allá del problema.

En el gráfico se aprecia que estas rectas son perpendiculares, es decir, se intersecan formando ángulos rectos.

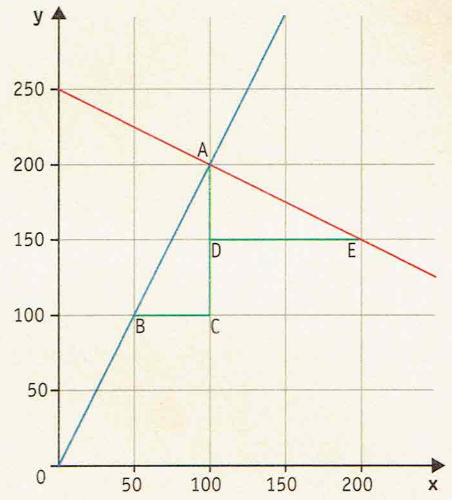
Los triángulos ABC y ADE son congruentes, pues tienen dos lados y el ángulo comprendido congruentes.

En efecto:

$\overline{ED} = \overline{AC} \qquad \overline{BC} = \overline{AD} \qquad \hat{D} = \hat{C} = 90°$

$y = 2x$

$y = -0{,}5 \cdot x + 250$



Uno de los criterios de congruencia de triángulos establece que si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente congruentes, entonces son congruentes.

Entonces, los triángulos ABC y ADE tienen todos sus lados y sus ángulos respectivamente congruentes. Es decir:

$$\hat{E} = B\hat{A}C \text{ y } \hat{B} = E\hat{A}D$$

Además, como $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{ADE}$ son triángulos rectángulos, los ángulos agudos de cada triángulo suman 90°:

En el $\overset{\triangle}{\mathbf{ABC}}$: $\hat{A} + \hat{B} = 90°$

Pero como $\hat{B} = E\hat{A}D \Rightarrow B\hat{A}C + E\hat{A}D = 90°$

Como estos dos ángulos forman el ángulo entre las dos rectas, queda demostrado que las rectas son perpendiculares.

En la demostración anterior se usó que los segmentos ED y AD son respectivamente congruentes con los segmentos AC y BC, cuyas medidas son las que determinan las pendientes de ambas rectas.

Pendiente de la recta roja $= -\dfrac{\overline{AD}}{\overline{ED}} = -\dfrac{a}{b}$

Pendiente de la recta azul $= \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{ED}}{\overline{AD}} = \dfrac{b}{a}$

La condición que debe cumplirse para que dos rectas sean perpendiculares es que, si la pendiente de una de ellas es $-\frac{a}{b}$, la de la otra sea $\frac{b}{a}$, es decir, una pendiente es el opuesto del inverso de la otra.

Por ejemplo, las rectas de ecuaciones $y = 3x + 1$ e $y = -\frac{1}{3}x + 4$ son perpendiculares.

También son perpendiculares la rectas cuyas ecuaciones son $x = 5$ e $y = 3$.

Dadas las rectas oblicuas R_1 y R_2:

$R_1: y = m_1\, x + b_1$

$R_2: y = m_2\, x + b_2$

Entonces:

$m_1 = -\dfrac{1}{m_2} \Leftrightarrow R_1 \perp R_2$

Además, una recta vertical y una horizontal siempre son perpendiculares.

Más sobre rectas paralelas y perpendiculares

Las condiciones que permiten anticipar antes de hacer el gráfico cuándo dos rectas so paralelas, perpendiculares o concurrentes no perpendiculares pueden usarse para gener rectas que se relacionen con otras rectas dadas en alguna forma particular, como en l casos que se presentan a continuación.

Problema 4

A partir de la recta R: $y = \frac{5}{3}x + 1$

a. ¿Cómo es la ecuación de una recta paralela a R? ¿Cuántas rectas se pueden encontrar?

b. ¿Cómo es la ecuación de una recta paralela a R que contiene al punto (-2 ; 4)?

c. ¿Cómo es la ecuación de una recta perpendicular a R? ¿Cuántas rectas se pueden encontrar?

d. ¿Cómo es la ecuación de una recta perpendicular a R que contiene al punto (4 ; -5)?

Existen infinitas rectas paralelas a R: todas las que tienen pendiente $\frac{5}{3}$ lo son. La ord nada al origen puede ser cualquier valor, ya que cada una de las distintas paralelas interse al eje de ordenadas en un valor distinto.

Las rectas siguientes son algunos ejemplos de rectas paralelas a R.

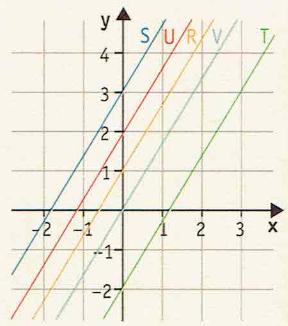
S: $y = \frac{5}{3}x + 3$

T: $y = \frac{5}{3}x - 2$

U: $y = \frac{5}{3}x + \frac{9}{5}$

V: $y = \frac{5}{3}x$

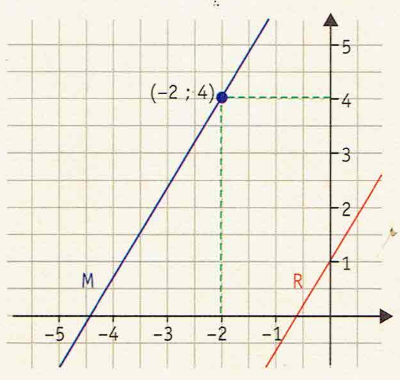
En el gráfico se muestran estas rectas y la recta dato, R.



Entre todas las rectas paralelas a R, hay una única que contiene al punto (-2 ; 4), *¿cu es la ecuación de esta recta?*

Luego de trazar R y marcar el punto (-2 ; 4) puede trazarse la recta paralela a R que co tiene a dicho punto.

La pendiente de la recta buscada es $\frac{5}{3}$, porque es paralela a R. La ordenada al origen es desconocida y debe hallarse analíticamente.



Se sabe que la ecuación de la recta buscada es de la forma: $y = \frac{5}{3}x + b$

Como debe contener al punto (-2 ; 4), entonces: $4 = \frac{5}{3} \cdot (-2) + b$

Al despejar, se obtiene $b = \frac{22}{3}$.

Entonces, la ecuación de la recta buscada es: $y = \frac{5}{3}x + \frac{22}{3}$

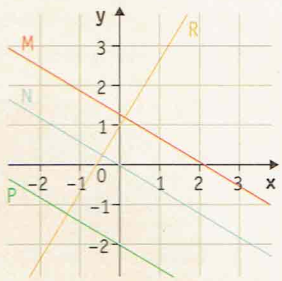
Al buscar rectas perpendiculares a R, nuevamente, existen infinitas. Como la pendiente de R es $\frac{5}{3}$, entonces, todas las rectas que son perpendiculares a R tienen pendiente $-\frac{3}{5}$. La ordenada al origen puede ser cualquier valor, ya que cada una de las distintas perpendiculares interseca al eje de ordenadas en un punto distinto.

Las rectas siguientes son algunos ejemplos de rectas perpendiculares R.

M: $y = -\frac{3}{5}x + \frac{9}{7}$ N: $y = -\frac{3}{5}x$

P: $y = -\frac{3}{5}x - 2$

En el gráfico se muestran estas rectas y la recta dato, R.

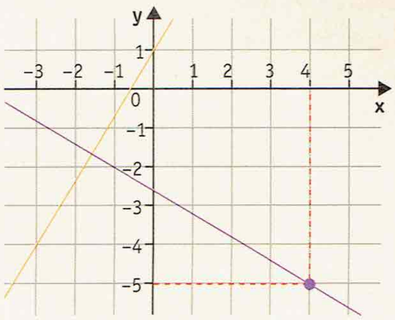


¿Cuál es la ecuación de la recta que es perpendicular a R y contiene al punto (4 ; –5)?

La recta buscada es única, porque hay una sola recta que es perpendicular a

$$y = \frac{5}{3}x + 1$$

y además contiene al punto (4 ; –5).



La pendiente de la recta trazada es $-\frac{3}{5}$, porque es perpendicular a R.

Entonces, su ecuación es de la forma: $y = -\frac{3}{5}x + b$

Como contiene al punto (4 ; –5): $-5 = -\frac{3}{5} \cdot 4 + b$

Si se despeja b:

$$-5 = -\frac{3}{5} \cdot 4 + b \Rightarrow -5 = -\frac{12}{5} + b \Rightarrow -5 + \frac{12}{5} = b \Rightarrow -\frac{13}{5} = b$$

La ecuación de la recta buscada es $y = -\frac{3}{5}x - \frac{13}{5}$.

[illegible]. Consideren la recta S de ecuación: $y = -4x + 2$ y hallen las ecuaciones de las rectas que tienen las características que se indican en cada caso.

a. Dos rectas paralelas a S.

b. Dos rectas perpendiculares a S.

c. La recta que contiene al punto (–2 ; 4) y es paralela a S.

d. La recta que contiene al punto (5 ; –6) y es perpendicular a S.

Ecuaciones lineales

Una ecuación es *lineal* si se puede reducir a la forma: $a \cdot x + b = 0$

Problema 5

Si se considera la función $f(x) = 2x - 1$, encontrar algún valor para x de modo tal que $f(x) = 3$.

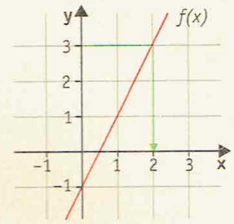
Para pensar en este problema es posible considerar que hallar los x que provoquen $f(x) = 3$ equivale a plantear la siguiente ecuación: $2x - 1 = 3$.

Es decir, la ecuación planteada puede asociarse a la búsqueda del valor de x cuya imagen a través de la función f es igual a 3. Dicho de otra manera, se quiere hallar la preimagen de 3 a través de la función f.

En el ejemplo siguiente, se interpreta la resolución algebraica de una ecuación lineal mediante funciones lineales.

$$f(x) = 2x - 1$$

$$\begin{array}{l} 2x - 1 = 3 \longrightarrow f(x) = 3 \\ \downarrow \\ 2x = 4 \end{array}$$



Al realizar el primer despeje, se obtiene una ecuación equivalente a la original, es decir, otra ecuación con la misma solución.

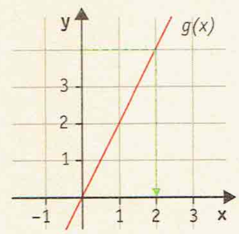
Dos ecuaciones que tienen las mismas soluciones se llaman *ecuaciones equivalentes*.

Entonces, las ecuaciones $2x = 4$ y $2x - 1 = 3$ tienen la misma solución.

Si se considera la función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ g(x) = 2x$, resolver la ecuación anterior puede interpretarse nuevamente como hallar la preimagen de 4 a través de la función g.

$$g(x) = 2x$$

$$\begin{array}{l} 2x = 3 + 1 \longrightarrow g(x) = 4 \\ 2x = 4 \\ \downarrow \\ x = 2 \end{array}$$

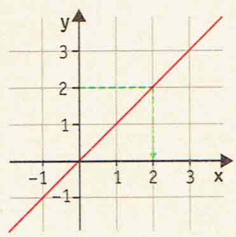


Al realizar el último despeje, se obtiene $x = 2$, que es otra ecuación equivalente a la original y da directamente la solución de las tres ecuaciones planteadas.

Si se considera la función $h(x) = x$, se quiere hallar la preimagen de 2 a través de esta función.

$$h(x) = x$$

$$\begin{array}{l} x = 4 : 2 \longrightarrow h(x) = 2 \\ \downarrow \\ x = 2 \end{array}$$



Si se observa en los gráficos utilizados para resolver cada ecuación la preimagen que se busca (según la función lineal considerada en cada paso) es 2, que es la solución obtenida analíticamente. Es decir, el conjunto solución es S = {2}, tanto para la ecuación original como para cada una de las ecuaciones obtenidas en los pasos realizados.

El procedimiento desarrollado es útil para visualizar que las transformaciones algebraicas que se realizan para “despejar” la variable dan como resultado, en cada paso, ecuaciones que tienen siempre la misma solución, es decir, *ecuaciones equivalentes*.

En el ejemplo que sigue se resuelve una ecuación mediante transformaciones algebraicas. El procedimiento se realiza de modo tal de garantizar que cada una de las ecuaciones que se obtiene en un paso cualquiera es equivalente a la anterior, es decir, tiene las mismas soluciones.

Para resolver la ecuación $\frac{3}{5} \cdot (x + 1) - \frac{2}{5} - x = 2$, se puede proceder del modo siguiente.

Se opera.	$\frac{3 \cdot (x+1) - 2}{5} - x = 2$
Se aplica la propiedad distributiva.	$\frac{3x + 3 - 2}{5} - x = 2$
Se opera en el numerador.	$\frac{3x+1}{5} - x = 2$
Se distribuye el denominador.	$\frac{3}{5}x + \frac{1}{5} - x = 2$
Se suman los términos en x y se aplican propiedades.	$-\frac{2}{5}x = 2 - \frac{1}{5}$
Se despeja la variable.	$x = \frac{9}{5} : \left(-\frac{2}{5}\right)$
Se opera.	$x = -\frac{9}{2}$

Como todas las ecuaciones obtenidas son equivalentes, el conjunto solución de la ecuación es $S = \left\{-\frac{9}{2}\right\}$

Al conjunto formado por todas las soluciones de una ecuación se lo llama *conjunto solución* de la ecuación y se lo simboliza *S*.

Las transformaciones algebraicas que permiten obtener ecuaciones equivalentes y que aparecen en la resolución de ecuaciones lineales son las siguientes:

$x + a = b \Leftrightarrow x = b - a$

Si $a \neq 0$: $a \cdot x = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$

ACTIVIDADES

7. Resuelvan las siguientes ecuaciones lineales e indiquen el conjunto solución de cada una.

a. $\frac{2}{5}(x+1)+1=0$

b. $\frac{5}{4}\left(x+\frac{1}{5}\right)+4=\frac{1}{3}$

c. $\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}x=-3$

d. $2(k-3)+k=0$

e. $-4(b+6)-b=0$

f. $5(a+2)+1=a+2$

g. $2(4-x)-(x-6)=-3(x+1)$

h. $\frac{x+1}{4}=\frac{2x-1}{3}$

8. Para cada una de las ecuaciones que siguen, indiquen si el número que se propone es solución.

a. $4x-\frac{4}{3}(1-x)=-3$; $x=0$

b. $\frac{3x-2}{2}=\frac{x-2}{4}$; $x=\frac{2}{5}$

c. $-\frac{2}{3}(2-b)=-\frac{1}{2}b$; $b=-1$

9. Un matrimonio con sus tres hijos visita un parque de diversiones. El precio de la entrada de cada uno de los chicos es la mitad del de cada uno de los padres. Si pagaron $22,75 en total, ¿cuál es el precio de cada entrada?

10. La suma de tres números enteros consecutivos es 219. ¿Cuáles son esos números?

11. La suma de tres números enteros impares consecutivos es 189. ¿Cuáles son esos números?

12. La suma de dos números es 156 y uno es el quíntuplo del otro. ¿Cuáles son los dos números?

Ecuaciones lineales con infinitas soluciones y sin solución

Problema 6

En una reunión, Fabián quiso demostrar sus aptitudes para la magia, y propuso a sus amigos el siguiente "truco":

"Piensen un número cualquiera; multiplíquenlo por 6 y réstenle 12 a lo que obtuvieron, dividan por 3 el resultado obtenido, súmenle 9 y réstenle el doble del número elegido".

Luego de que todos realizaron las operaciones pedidas, cada cual con el número que había elegido, les dijo:

"Mi poder me permite adivinar que todos obtuvieron 5 como resultado."

Todos sus amigos asintieron sorprendidos.

¿Cómo hizo Fabián para adivinar el resultado obtenido por todos? ¿En qué consiste el truco?

En el cuadro que sigue se propone una representación matemática del funcionamiento del truco, llamando x al número elegido.

Enunciado del "truco"	Expresión algebraica asociada
Piensen un número cualquiera	x
multiplíquenlo por 6	$6x$
réstenle 12	$6x - 12$
dividan por 3	$\frac{6x-12}{3}$
súmenle 9	$\frac{6x-12}{3} + 9$
réstenle el doble del número elegido	$\frac{6x-12}{3} + 9 - 2x$

Algunas de las expresiones algebraicas anteriores pueden transformarse en otras equivalentes más sencillas, como se muestra en el cuadro siguiente:

Expresión algebraica asociada	Expresión algebraica simplificada
$\frac{6x-12}{3}$	$= \frac{6x}{3} - \frac{12}{3} = 2x - 4$
$\frac{6x-12}{3} + 9$	$= 2x - 4 + 9 = 2x + 5$
$\frac{6x-12}{3} + 9 - 2x$	$= 2x + 5 - 2x = 5$

La última fila de la tabla muestra que la expresión algebraica asociada al truco es *equivalente* a 5. Esto significa que para cualquier valor que se le asigne a x (esto es, cualquier número que elija el que prueba el truco) el resultado obtenido será 5.

En relación con la ecuación, esta conclusión puede expresarse así:

para la ecuación asociada al truco, cualquier número real es solución. Es decir, la ecuación tiene infinitas soluciones y su conjunto solución es $S = \mathbb{R}$.

Este resultado explica por qué el truco funciona siempre, independientemente del número elegido.

El problema también se puede interpretar y resolver directamente a través del planteo y la resolución de una ecuación.

$$\frac{6x-12}{3}+9-2x=5 \Leftrightarrow \frac{6x}{3}-\frac{12}{3}+9-2x=5 \Leftrightarrow$$

$$2x-4+9-2x=5 \Leftrightarrow 0\cdot x+5=5 \Leftrightarrow 5=5$$

Las expresiones obtenidas en cada paso son equivalentes, en particular la primera y la última, por eso, se concluye que:

$$\frac{6x-12}{3}+9-2x=5 \quad \text{(para cualquier valor que se le asigne a } x) \Leftrightarrow S=\mathbb{R}$$

Si se observa la última expresión puede notarse que, como cualquier número multiplicado por 0 da 0, la ecuación se verifica con cualquier número real.

Una forma de reconocer este tipo de ecuaciones es que en algún paso se obtiene una igualdad numérica (que no contiene a la variable) y que es verdadera (en este caso, $5 = 5$).

Problema 7

Encontrar los valores de x que verifican la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{5}x+3=x-2\left(\frac{2}{5}x+1\right)$$

Al resolver queda:

$$\frac{1}{5}x+3=x-2\left(\frac{2}{5}x+1\right) \Leftrightarrow \frac{1}{5}x+3=x-\frac{4}{5}x-2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{5}x-x+\frac{4}{5}x=-2-3 \Leftrightarrow 0x=-5 \Leftrightarrow 0=-5$$

Nuevamente se obtuvo una igualdad numérica, pero en este caso es falsa, pues 0 no es igual a -5. Como las ecuaciones obtenidas en cada paso son equivalentes, la primera igualdad se verifica cuando 0 es igual a -5. Como esto nunca ocurre, se concluye que la ecuación no tiene solución y su conjunto solución es $S = \varnothing$.

Ya en el anteúltimo paso es posible advertir que la ecuación no tiene solución, pues ningún número multiplicado por 0 da 5.

Este tipo de ecuaciones se reconocen porque en algún paso se obtiene una igualdad numérica (que no contiene a la variable) que es falsa (en este caso, $0 = -5$).

---

13. Resuelvan las siguientes ecuaciones e indiquen en cada caso el conjunto solución.

a. $x-3x=-2(x+1)$

b. $x-(1-x)=2x-1$

c. $\frac{2x-3}{4}-\frac{x}{2}=1$

d. $-x+\frac{2}{3}(x-1)=-\frac{x+2}{3}$

14. Inventen un "truco" (como el realizado en el problema 6) que funcione siempre y otro que no funcione nunca. Expliquen por qué sucede cada situación.

15. Determinen cuáles de las siguientes ecuaciones tienen por conjunto solución $S = \mathbb{R}$.

a. $2(x-1)+\frac{5}{3}(x+3)=3+\frac{11}{3}x$

b. $7x-3(x-4)+9x=2(x+8)+11(x-3)+5$

16. ¿Qué puede agregarse en la línea punteada para las siguientes ecuaciones tengan por conjunto solución $S = \varnothing$?

a. $6(x-3)+\frac{2}{5}(3-x)=2(3x+4)-\frac{1}{3}x+ \ldots\ldots$

b. $\frac{5}{4}(2x-4)-2{,}5(x+9)=2(x+3)-(2x-1)+ \ldots\ldots$

Inecuaciones lineales

Si se tienen dos números a y b solo puede ocurrir una de estas tres condiciones:

$a<b$; $b<a$ o $a=b$

Esta propiedad se llama **tricotomía**.

La resolución de inecuaciones es útil para la búsqueda del conjunto de positividad o de negatividad de una función lineal.

Problema 8

Hallar los conjuntos de positividad y negatividad de las siguientes funciones:

$f(x) = x - 2$ $\qquad g(x) = 2x - 3$ $\qquad h(x) = -4x + 5$

Para encontrar los conjuntos de positividad y de negatividad de la función $f(x) = x - 2$, se puede proceder del modo siguiente.

El conjunto de positividad de f es el conjunto solución de la inecuación $x - 2 > 0$.

Al resolverla, se obtiene:

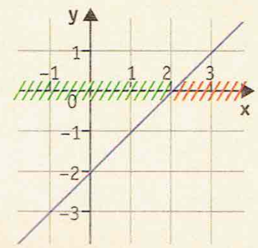
$x - 2 > 0$

$x > 2 \Rightarrow S = (2 ; +\infty) \Rightarrow C^+ = (2 ; +\infty)$

De modo similar, se obtiene el conjunto de negatividad de f:

$x - 2 < 0$

$x < 2 \Rightarrow S = (-\infty ; 2) \Rightarrow C^- = (-\infty ; 2)$



$f(x) = x - 2$

$C^+ = (2 ; +\infty)$ $\qquad C^- = (-\infty ; 2)$

El símbolo $\leq$ se lee "menor o igual". Por ejemplo: $4 \leq 4$ por que se verifica el igual.

$8 \leq 10$ por que se verifica el menor.

El conjunto de positividad de g es el conjunto solución de la inecuación $2x - 3 > 0$.

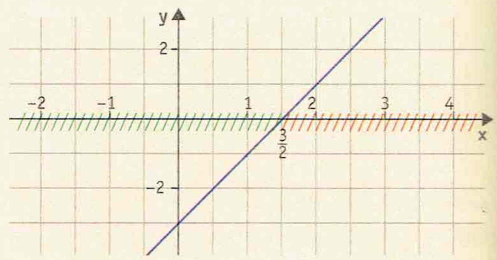
Al resolverla, se obtiene:

$2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$

$S = (\frac{3}{2} ; +\infty) \Rightarrow C^+ = (\frac{3}{2} ; +\infty)$

El conjunto de negatividad es

$C^- = (-\infty ; \frac{3}{2})$



$g(x) = 2x - 3$

$C^+ = (\frac{3}{2} ; +\infty)$ $\qquad C^- = (-\infty ; \frac{3}{2})$

Se llaman **inecuaciones lineales con una variable** a las expresiones que pueden reducirse a alguna de las formas siguientes, siendo A y B números reales.

$Ax + B > 0$

$Ax + B \geq 0$

$Ax + B < 0$

$Ax + B \leq 0$

El conjunto de positividad de h es el conjunto solución de la inecuación $-4x - 5 > 0$.

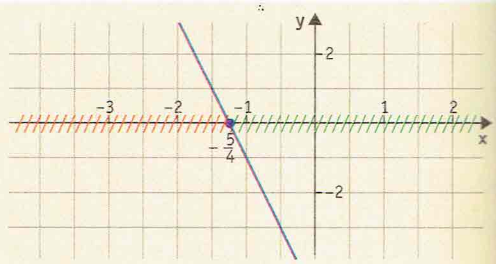
Al resolverla, se obtiene:

$-4x > 5 \Leftrightarrow -x > \frac{5}{4}$

Si el opuesto de x es mayor que $\frac{5}{4} \Leftrightarrow x < -\frac{5}{4} \Leftrightarrow C^+ = (-\infty ; -\frac{5}{4})$

El conjunto de negatividad es

$C^- = (-\frac{5}{4} ; +\infty)$



$h(x) = -4x - 5$

$C^- = (-\frac{5}{4} ; +\infty)$ $\qquad C^+ = (-\infty ; -\frac{5}{4})$

Problema 9

Hallar los valores de x que verifican las siguientes inecuaciones:

a. $2(x + 1) - 3 > 2x + 3$ **b.** $4x - 4 \geq 2(2x - 1) - 2$

Si se resuelve la primera inecuación queda:

$2x + 2 - 3 > 2x + 3 \iff 2x - 1 > 2x + 3 \iff 2x - 2x > 3 + 1 \iff 0 > 4$

Se obtuvo una condición numérica (sin la variable x) falsa, pues 0 no es mayor que 4, independientemente del valor de x. Como paso a paso se fueron obteniendo expresiones equivalentes, si "$0 > 4$" no vale para ningún valor de x, esto significa que la inecuación original tampoco se verifica para ningún valor de x, es decir, la inecuación *no tiene solución*. Entonces: $S = \varnothing$.

El otro caso presenta una singularidad diferente.

$4x - 4 \geq 2(2x - 1) - 2 \iff 4x - 4 \geq 4x - 2 - 2 \iff 4x - 4 \geq 4x - 4 \iff 4x - 4x \geq -4 + 4 \iff 0 \geq 0$

Se obtuvo una condición numérica (sin variable) que es verdadera independientemente del valor de x. Del mismo modo que en los casos anteriores, como en cada paso se fueron obteniendo desigualdades equivalentes, se concluye que la desigualdad original también se verifica para cualquier valor de x, es decir, la inecuación tiene por solución a todos los números reales. Entonces, $S = \mathbb{R}$.

Las transformaciones algebraicas que permiten obtener inecuaciones equivalentes y que aparecen en la resolución de inecuaciones lineales son las siguientes:

$x + a < b \iff x < b - a$

Si $a > 0$:

$a \cdot x < b \iff x < \frac{b}{a}$

Si $a < 0$

$a \cdot x < b \iff x > \frac{b}{a}$

Funciones definidas por tramos lineales

Problema 10

Una empresa paga los sueldos a sus vendedores según el siguiente criterio: un vendedor nuevo comienza con un sueldo de \$ 600; cada año de antigüedad en el puesto, su salario se incrementa en \$ 100.

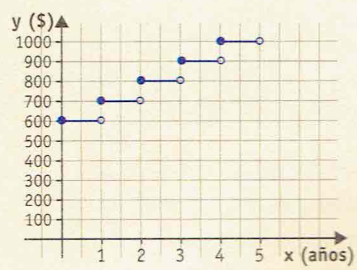
- ¿Cuál es el sueldo de un empleado que tiene un año de antigüedad?, ¿y cuando la antigüedad es de un año y medio?
- ¿Cuál es la gráfica que pueden usarse para representar el salario en función del tiempo de antigüedad?

Al cumplir un año, el sueldo de un vendedor nuevo se incrementará en \$ 100, por lo que ganará \$ 700. Al año y medio, este empleado seguirá ganando \$ 700, y este sueldo se mantendrá hasta que cumpla su segundo año de antigüedad. Recién en ese momento, pasará a ganar \$ 800.

En casos como éste, la función lineal no es adecuada para representar a la situación, porque los incrementos no son proporcionales al tiempo transcurrido.

Representando algunos valores se obtiene un gráfico como el siguiente.

Como el sueldo aumenta al momento de cumplirse cada nuevo año y se mantiene constante durante todo su transcurso, la gráfica resulta "escalonada".



Problema 11

Una empresa de remises exhibe en su vidriera el siguiente cuadro tarifario:

> **Viajes de hasta 15 km:**
> Cargo fijo de $ 1,50, más $ 2 por km
> **Viajes de más de 15 km:**
> Sin cargo fijo, $ 1,80 el km

a. ¿Cuál es la fórmula que permite obtener el precio de un viaje en función de la distancia recorrida?

b. ¿Cuánto cuesta un viaje de 8 km con un remís de esta empresa?

c. Si un pasajero pagó $ 26,10; ¿qué distancia recorrió?

Para escribir la fórmula que sirva para calcular el costo del viaje en función de la distancia recorrida, es necesario tener en cuenta que, según la información presentada en el cuadro tarifario, el cálculo debe realizarse de un modo para ciertas distancias y de otro modo diferente para el resto de las distancias. La fórmula que se busca deberá contemplar las dos alternativas.

Si se llama x a la distancia recorrida en kilómetros, el precio del viaje en pesos es $2x + 1,5$ cuando x es menor o igual que 15, y $1,80\,x$, cuando x es mayor que 15. Este modo de cálculo vinculado con condiciones sobre la variable x se sintetiza así:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1,5 & \text{si } x \leq 15 \\ 1,80\,x & \text{si } x > 15 \end{cases}$$

Una función cuya fórmula incluye distintos cálculos según cuál sea el valor de la variable independiente se llama **función partida**.

Como 8 es menor o igual que 15, la fórmula que hay que utilizar para calcular el precio de un viaje de 8 km es la primera, por lo tanto:

$$f(8) = 2 \cdot 8 + 1,5 = 17,5$$

Entonces, el precio de este viaje es de $17,50.

Para determinar el recorrido de un viaje de $ 26,10, hay que encontrar el valor de x para el cual $f(x) = 26,1$. Pero, como hay dos expresiones para calcular el costo del viaje, el valor 26,1 puede ser resultado de cualquiera de las dos partes de la fórmula. Entonces:

Suponiendo que pertenece al primer tramo...	Suponiendo que pertenece al segundo tramo...
$2x + 1,5 = 26,1$	$1,8\,x = 26,1$
$2x = 24,6$	$x = 26,1 : 1,8$
$x = 12,3$	$x = 14,5$

El segundo valor obtenido no es solución, debido a que la fórmula usada es válida para distancias mayores que 15 km, y se obtuvo 14,5 km. El primero sí es solución, porque la fórmula usada es válida para distancias menores que 15 km, y se obtuvo 12,3 km. Entonces, quien pagó $ 26,10 realizó un viaje de 12,3 km.

La función módulo

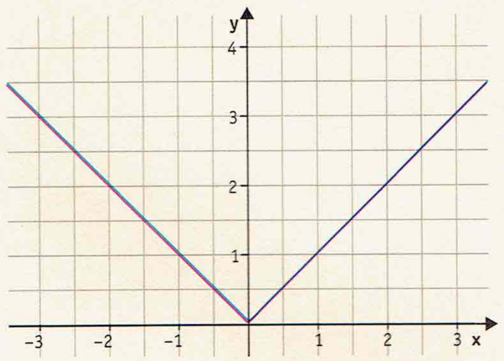
La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \; / \; f(x) = |x|$, puede considerarse también como una función partida debido a que, para los valores de x positivos o el cero la imagen es el mismo número, mientras que para los valores negativos de x la imagen es el opuesto del número. En símbolos:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El módulo o valor absoluto de un número es la distancia que hay en la recta numérica entre dicho número y el 0. Suele escribirse:
$|x| = x$ si x es positivo o 0 y
$|x| = -x$ si x es negativo.
También se verifica que
$|x| = \sqrt{x^2}$.

Para graficar esta función, es conveniente confeccionar una tabla con algunos valores positivos y algunos valores negativos para x, ya que el módulo de un número se calcula de una manera para los positivos y de otra para los negativos.

x	$f(x)=\|x\|$
0	0
1	1
2	2
−1	1
−3	3
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$



Los puntos pueden unirse con líneas, porque cada tramo de la gráfica corresponde a una función lineal.

En el gráfico se aprecia que el conjunto imagen es $\text{Im} f = [0 \, ; +\infty)$, lo cual se relaciona con una propiedad ya conocida: el módulo de cualquier número real es un número positivo o cero.

ACTIVIDADES

17. Una pizzería vende empanadas a \$ 1,10 la unidad más \$ 1 por envío, para compras de hasta 60 unidades; para compras mayores, el precio por unidad es de \$ 0,90 y el envío es sin cargo.

a. ¿Cuánto cuesta el envío de 3 docenas de empanadas?

b. ¿Es posible que un cliente haya pagado \$ 60 por el envío de empanadas? ¿Por qué?

c. Encuentren una fórmula por partes que dé el precio a pagar en función de la cantidad de empanadas compradas.

18. La función *signo* de un número real es la función que a los números positivos les hace corresponder como imagen el 1, al 0 le hace corresponder el 0 y a los números negativos, el −1. Si se llama f a esta función:

a. Escriban una fórmula partida para f.

b. Calculen $f(24)$ y $f(-0,3)$.

c. Resuelvan las siguientes ecuaciones: $f(x) = -1$ $\qquad f(x) = 4$

d. Representen gráficamente a f.

e. Indiquen el conjunto imagen de f.

19. La función *parte entera* de un número real es la función que a cada número le hace corresponder el mayor número entero que sea menor o igual que él. Llamando g a esta función, realicen lo pedido.

a. Calculen $g(5,12)$, $g(7)$, $g(-2)$, $g(-12,1)$, $g(-12,9)$.

b. Representen gráficamente a g.

c. Indiquen el conjunto imagen de g.

20. a. Grafiquen las siguientes funciones:

$f(x) = 2\,|x|$ $\qquad g(x) = -3\,|x|$

$h(x) = |x| + 3$ $\qquad t(x) = |x| - 4$

b. Para cada una de las funciones graficadas determinen la imagen.

c. Calculen los ceros de cada función.

d. Resuelvan las siguientes ecuaciones:

I. $f(x) = 2$ $\qquad$ **II.** $g(x) = -1$

III. $h(x) = 7$ $\qquad$ **IV.** $t(x) = 4$

Ecuaciones e inecuaciones con módulo

En los ejemplos siguientes, se resuelven ecuaciones e inecuaciones que incluyen módu-
los y se interpretan los procedimientos y las soluciones obtenidas en relación con la funció
asociada en cada situación.

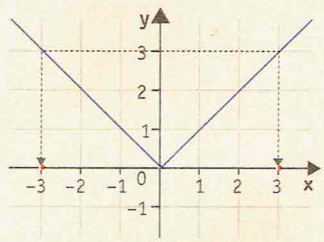
Ejemplo 1

Resolver la ecuación $|x| = 3$ significa buscar los números cuyo módulo es 3. Estos núme-
ros son 3 y −3. Entonces, el conjunto solución es $S = \{3, -3\}$.

Si se considera la función $f(x) = |x|$, resolver la ecuación $|x| = 3$ equivale a buscar los valores de x cuya imagen a través de f es 3, es decir, $f(x) = 3$.

En el gráfico se interpretan las dos soluciones obtenidas analíticamente:

$$x_1 = 3 \text{ y } x_2 = -3$$



$f(x) = |x|$

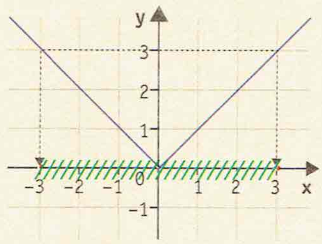
> Si a positivo o 0
> $|x| = a, \Leftrightarrow x = a$ ó $x = -a$
> Si a es negativo, $|x| = a$ no tiene solución pues el módulo es una distancia y no puede ser negativa.

Ejemplo 2

Resolver la inecuación $|x| < 3$ significa buscar los números cuyo módulo es menor que 3
El conjunto solución de esta inecuación es el intervalo $(-3 ; 3)$.

En este caso, resolver la inecuación $|x| < 3$ es hallar los valores de x cuyas imágenes son menores que 3, es decir, $f(x) < 3$.

El gráfico permite visualizar que los valores de x que verifican la condición anterior son todos los números del intervalo $(-3 ; 3)$.



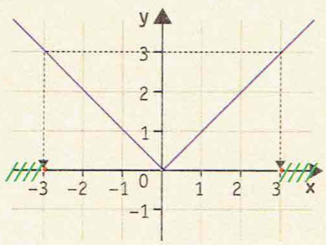
> Si a es positivo
> $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
> Si a es negativo o 0
> $|x| < a$ no tiene solución pues el módulo es siempre positivo y no puede ser menor que un negativo ni que 0.

Ejemplo 3

Resolver la inecuación $|x| > 3$ significa buscar los números cuyo módulo es mayor que 3. E
conjunto solución de esta inecuación es $(-\infty ; -3) \cup (3 ; +\infty)$.

En este caso, resolver la inecuación $|x| > 3$ es hallar los valores de x cuyas imágenes son mayores que 3, es decir, $f(x) > 3$.

Los valores de x que verifican son los números de los intervalos $(-\infty ; -3) \cup (3 ; +\infty)$.



> Si a es positivo
> $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ ó $x < -a$
> Si a es negativo
> $|x| > a$ tiene por solución cualquier número real pues el módulo es siempre positivo y siempre es mayor que un negativo.

21. Hallen la ecuación de la recta que contiene a los puntos que se indican en cada caso.

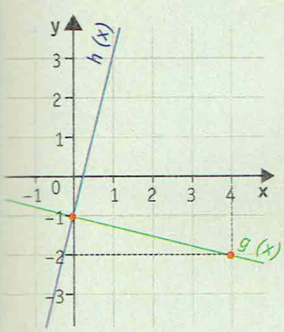
a. $\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ y $\left(-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$ **b.** $\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ y $\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$

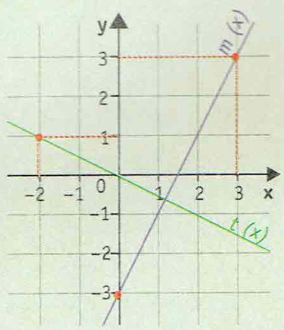
c. $\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ y $\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$

22. Dadas las funciones lineales $f(x)=-5x+2$ y $g(x)=\frac{2}{3}x+1$, hallen analíticamente los valores de x para los cuales se cumple la condición indicada en cada caso. Cotejen gráficamente los resultados obtenidos.

a. $f(x)>\frac{1}{2}$ **b.** $f(x)<-1$ **c.** $g(x)<-4$ **d.** $g(x)>3$

23. Hallen la ecuación de cada par de rectas que se muestran en los gráficos, sabiendo que son perpendiculares.





24. Resuelvan las siguientes inecuaciones e indiquen el conjunto solución en cada caso.

a. $-4x<0$ **b.** $\frac{1}{2}x+2>-5$

c. $-\frac{3}{5}(x+6)\leq 1$ **d.** $1-2(x+4)\geq -2x$

e. $\frac{6-2x}{-3}>4$ **f.** $2-\frac{x}{4}\geq 0$

g. $\frac{4}{3}x-(x-2)<-2x+1$ **h.** $5+\frac{1+x}{2}<8$

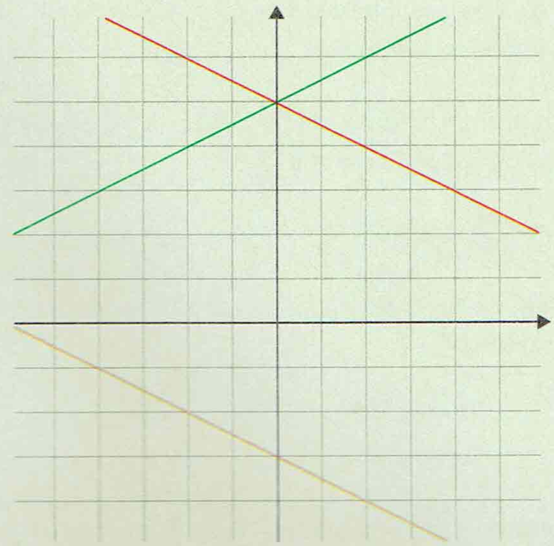
25. Resuelvan las siguientes ecuaciones, dando el conjunto solución:

a. $4(x-5)=7-5(3-2x)$ **b.** $\frac{x}{4}+\frac{x}{2}+\frac{x}{5}=\frac{5}{6}$

c. $2x-(1-x)=-x+4\ (x+1)$ **d.** $\frac{-x+3}{5}=\frac{1}{5}(3-x)$

26. ¿Será cierto que la ecuación: $12x+4y=16$ responde al mismo gráfico que la ecuación $y=-3x+4$? Encuentren alguna explicación a la decisión tomada.

27. ¿Cuál de los siguientes gráficos corresponde a la recta de ecuación $y=-\frac{1}{2}x+4$? Expliquen cómo se dieron cuenta.



28. Se compraron paquetes de yerba a \$ 1,80 cada uno y paquetes de azúcar a \$ 1,10 cada uno. En total se gastó \$ 52,40. ¿Cuántos paquetes de cada uno se compraron? ¿Hay una única solución?

29. Sin realizar cálculos, clasifiquen en oblicua, horizontal o vertical la recta que determina el par de puntos indicado en cada caso.

a. $(2;7)$ y $(7;-2)$ **b.** $\left(\frac{3}{5};3\right)$ y $\left(\frac{1}{5};3\right)$

c. $\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{3}\right)$ y $\left(-\frac{3}{4};-\frac{1}{5}\right)$ **d.** $(5;-2)$ y $(1234;-2)$

e. $(-20;1)$ y $(-20;78)$ **f.** $(4;5)$ y $(5;4)$

30. Para cada una de las siguientes rectas, dadas en forma implícita, indiquen si es oblicua, horizontal o vertical y escriban dos puntos que pertenezcan a ella.

a. $x+8y=1$ **b.** $x+0y=10$

c. $0x+6y=1$ **d.** $2x-6y=7$

31. Escriban las coordenadas de tres puntos que pertenezcan a cada una de las siguientes rectas y represéntenlas gráficamente.

a. $x+y=10$ **b.** $-2x+6y=1$

32. Cuando sea posible, expresen en forma explícita las siguientes ecuaciones de rectas, dadas en forma implícita.

a. $5x+3y=4$ **b.** $-2x+3y=1$

c. $0x+5y=1$ **d.** $5x+0y=3$

33. Hallen el valor de p, sabiendo que la a recta de ecuación $3x-4y=p$ interseca al eje x en el punto $(1;0)$.

ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN

34. Hallen el valor de a, sabiendo que la recta cuya ecuación es: $25x + a \cdot y = 10$ tiene pendiente 5.

35. ¿Es cierto que la ecuación $2x + 5y = -7$ tiene el mismo conjunto solución que la ecuación $-4x - 10y = 14$?

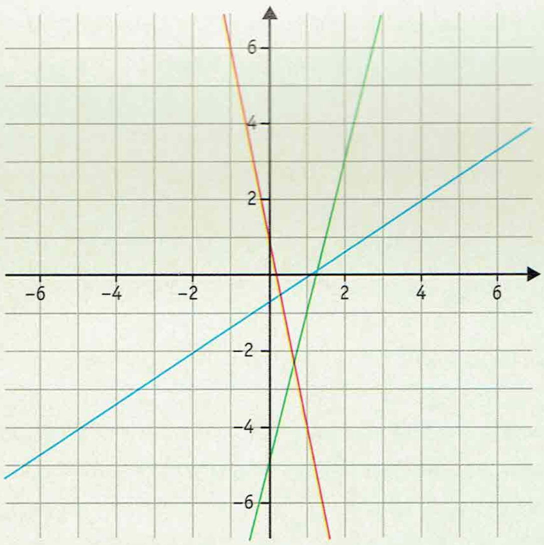
36. Encuentren tres ecuaciones distintas para una misma recta.

37. Realicen el gráfico de la función $f(x) = |x - 2|$. ¿Para qué valores de x la función vale 0?

38. Busquen múltiplos de 3 que sumados a múltiplos de 2 tengan como resultado múltiplos de 6.

39. Decidan qué gráfico corresponde a cada ecuación:

a. $y = -5x + 1$ **b.** $2x - 3y = 2$ **c.** $y = -5 + 4x$



40. Decidan si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifiquen su decisión.

a. Las rectas horizontales no tienen pendiente.
b. Las rectas oblicuas tienen pendiente positiva.
c. Todas las rectas perpendiculares a una recta vertical tienen pendiente 0.
d. Una solución de la inecuación $|x| \geq 6$ es $x = -8$.
e. El conjunto solución de la ecuación $|x| = 6$ es $S = \{6\}$
f. La inecuación $x \geq x$ tiene por conjunto solución $S = \mathbb{R}$.
g. Las ecuaciones de rectas dadas en forma implícita siempre pueden escribirse en forma explícita.
h. La inecuación: $x - 1 < x$ tiene conjunto solución $S = \emptyset$.
i. La inecuación: $2x > x$ tiene conjunto solución $S = \mathbb{R}$

41. Determinen si es cierto lo que dice el mago:
"Piensen un número, súmenle 8. Al resultado multiplíquenlo por 3 y resten el número pensado. Al resultado divídanlo por 2 y resten el número que pensaron. Cuando terminen les dará 12"

42. ¿Es cierto que para cualquier número que se elija, en el momento de truco en el que el mago dice que dividan por 2 el resultado será siempre entero?

43. Inventen otro truco que funcione siempre, como el de la actividad 41.

44. Los lados del cuadrilátero ABCD, están contenidos en las rectas cuyas ecuaciones se indican.

$\overline{AB}: y = 3x + 1$ $\overline{BC}: y = -\frac{1}{3}x + 2$

$\overline{CD}: y = 3x + 4$ $\overline{DA}: y = -\frac{1}{3}x - 1$

Clasifiquen al cuadrilátero ABCD. Justifiquen la clasificación realizada.

45. Una empresa de fletes tiene el siguiente cuadro tarifario para el traslado de mercadería.

- \$ 2 el km, más un cargo fijo de \$ 9, para distancias de hasta 12 km.
- \$ 1,80 el km, más un cargo fijo de \$ 10, para distancia mayores de 12 km.

a. ¿Es cierto que sale más barato pedir un flete por 13 km que por 12 km? ¿Por qué?
b. Encuentren la fórmula que permite calcular el precio del flete en función de los kilómetros recorridos.
c. Representen gráficamente el precio a pagar por el flete en función de la distancia recorrida.

46. Para la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 2 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a. Calculen $f(2)$; $f(-3)$; $f(0)$; $f(3)$; $f(4)$.

b. Grafiquen la función $f(x)$.

c. Determinen la imagen de $f(x)$.

d. Hallen los valores de x para los cuales se verifica cada una de las siguientes condiciones:

I. $f(x) = 0$ **II.** $f(x) = 3$ **III.** $f(x) = -1$

AUTOEVALUACIÓN

1. Se compraron biromes y cuadernos. Se sabe que cada cuaderno costaba 50 centavos y cada birome costaba \$1,50, y que se gastaron \$37.
Si B representa la cantidad de biromes y C representa la cantidad de cuadernos, indiquen cuál o cuáles de los siguientes pares de valores pueden corresponder a las cantidades que se compraron.

- a) $B=8 ; C=12$
- b) $B=21 ; C=11$
- c) $B=3{,}5 ; C=63{,}5$
- d) $B=44 ; C=10$

2. Indiquen cuál o cuáles de las siguientes expresiones representan todas las soluciones al problema de la actividad anterior.

- a) $50\,B+1{,}5\,C=37$
- b) $50\,C+150\,B=37$
- c) $0{,}5\,B+1{,}5\,C=37$
- d) $0{,}5\,C+1{,}5\,B=37$

3. La recta de ecuación $Ax+By=C$ es vertical cuando:

- a) $A=0$ y $B\neq 0$
- b) $C=0$ y $B\neq 0$
- c) $A=0$ y $B=0$
- d) Ninguna de las anteriores.

4. Las rectas cuyas ecuaciones son $\frac{1}{2}x-y=1$ y $\frac{1}{2}x-y=4$ tienen ambas:

- a) Pendiente positiva
- b) Ordenada al origen positiva.
- c) Ordenada al origen negativa.
- d) Ninguna de las anteriores.

5. Se sabe que el doble del anterior de un número es igual al cuadrado del consecutivo de dicho número. Si x representa dicho número, una ecuación que representa el enunciado es:

- a) $2\cdot(x-1)=(x+1)^2$
- b) $2\cdot(x-1)=x^2+1$
- c) $2\cdot(x+1)=x^2-1$
- d) Ninguna de las anteriores.

6. Entre las siguientes ecuaciones, una cuyo conjunto solución es $\mathbb{R}$ es:

- a) $-2\cdot(x+4)+x=-x$
- b) $-(2-x)=-2$
- c) $3-\frac{x-3}{2}=-\frac{x-9}{2}$
- d) Ninguna de las anteriores.

7. La recta de ecuación $Ax+By=4$ es horizontal, por ejemplo, cuando:

- a) $A=0$ y $B=4$
- b) $A=4$ y $B=4$
- c) $A=4$ y $B=0$
- d) Ninguna de las anteriores.

8. La recta de ecuación $5x+Ay=1$ tiene ordenada al origen -1 cuando:

- a) $A=5$
- b) $A=-5$
- c) $A=0$
- d) Ninguna de las anteriores.

9. De una función lineal $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se sabe que el conjunto de positividad es $C^{+}=\varnothing$. Entonces, la gráfica de la función es una recta:

- a) Horizontal.
- b) Vertical.
- c) Oblicua.
- d) Ninguna de las anteriores.

10. De una función lineal se sabe que tiene pendiente negativa y ordenada al origen positiva. Entonces, un cuadrante en el que la recta no tiene puntos es el:

- a) Primero.
- b) Segundo.
- c) Tercero.
- d) Cuarto.

11. Se considera la función $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R} \,/\, f(x)=-6x-4$. Los valores de x que verifican $-8<f(x)\leq 2$ son...

- a) $[-1 ; \frac{2}{3})$
- b) $[-16 ; 44)$
- c) $(-1 ; \frac{2}{3}]$
- d) Ninguna de las anteriores.

12. Se considera la función $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R} \,/\, f(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{si } x<1 \\ -x+1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

Un valor de x que tiene imagen 3 es:

- a) -2
- b) 3
- c) 2
- d) Ninguno de los anteriores.

13. La recta de ecuación $4x+3y=12$ es paralela pero no coincidente con la recta de ecuación:

- a) $y=-\frac{4}{3}x+4$
- b) $\frac{4}{3}x+y=12$
- c) $4x-3y=12$
- d) Ninguna de los anteriores.

CONTENIDOS

- Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas
- Interpretación de las situaciones y las soluciones
- Métodos de resolución: igualación; sustitución; reducción por sumas y restas
- Clasificación de sistemas; análisis de sistemas que involucran parámetros
- Sistemas con más de dos ecuaciones

En los dos capítulos anteriores, se estudiaron las características de las funciones lineales, cuyas gráficas son rectas. Cuando se trabaja con modelos lineales para analizar diferentes procesos, puede ocurrir que se pretenda comparar el comportamiento de dichos procesos. Por ejemplo, se puede comparar el crecimiento o decrecimiento de las variables involucradas. También es posible, en este estudio y comparación, determinar aquellos valores para los cuales procesos distintos producen los mismos resultados. Los sistemas de ecuaciones lineales permiten modelizar y resolver muchas situaciones que involucran a dos o más funciones lineales.

5 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Problema 1

En una función de cine organizada por el club del barrio, se cobró \$ 5 la entrada para adultos y \$ 3 la entrada para menores. Los organizadores saben que recaudaron \$ 516 y que asistieron a la función 140 personas. ¿Cuántos adultos y cuántos menores vieron la película?

Una forma de resolver este problema consiste en designar con letras a las variables y expresar la información dada en el enunciado mediante *ecuaciones*.

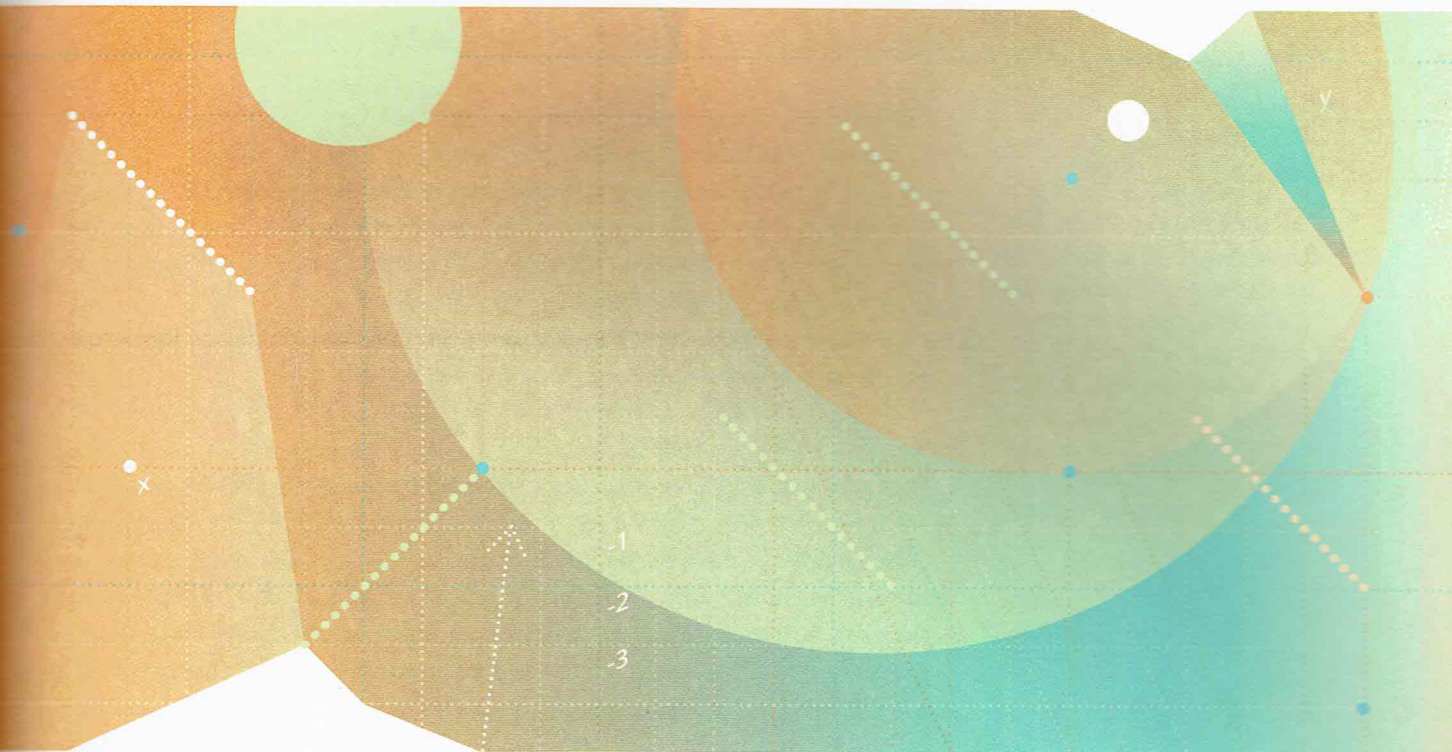
Si se utiliza A para designar a la cantidad de adultos y M a la cantidad de menores; al considerar el precio de las entradas, como cada adulto pagó \$ 5 y cada menor pagó \$ 3, el cálculo del total de dinero recaudado se puede expresar mediante la siguiente ecuación:

$$5 \cdot A + 3 \cdot M = 516$$

Pero hay muchos pares de valores $(A\ ;\ M)$ que cumplen la condición planteada en la ecuación anterior.

Por ejemplo:

$$\text{si } A = 78 \text{ y } M = 42 \ \Rightarrow \ \text{se verifica que: } 5 \cdot 78 + 3 \cdot 42 = 516$$



Sin embargo, estos valores de A y de M no son la solución del problema, pues no suman 140, que es la cantidad total de asistentes a la función. Entonces, de todos los pares $(A\ ;\ M)$ que verifican la ecuación anterior, solo se deben considerar aquellos que también verifiquen la siguiente condición: $A + M = 140$

Se construye así un *sistema de ecuaciones lineales* con el cual se expresa que deben cumplirse *dos condiciones simultáneamente*:

$$\longrightarrow \begin{cases} 5A + 3M = 516 \\ A + M = 140 \end{cases}$$

En la tabla siguiente se presentan algunos valores para A y para M que son solución de la primera ecuación.

A	**M**
90	22
84	32
48	92
42	102

Para hallar cada uno de estos pares de valores, se eligió primero arbitrariamente un valor para M y luego se obtuvo el valor correspondiente de A despejándolo de la primera ecuación.

Si, por ejemplo se toma $M = 22$ y se reemplaza en la ecuación

$$5A + 3M = 516$$
$$5A + 3 \cdot 22 = 516$$
$$5A + 66 = 516$$
$$5A = 450 \Rightarrow A = 90$$

Todos estos pares de valores verifican la primera ecuación. Para que alguno de ellos sea la solución del problema, falta verificar que la suma de A y de M sea 140. De los valores de la tabla el que cumple esta condición es $M = 92$ y $A = 48$, es decir: $92 + 48 = 140$.

Entonces, la respuesta es que asistieron 92 adultos y 48 menores a la función mencionada.

Sin embargo, la solución fue obtenida prácticamente por tanteo y si el problema es más complejo esta forma de resolución es poco práctica.

El procedimiento utilizado no garantiza llegar a la solución en otros casos similares, ni ofrece la posibilidad de analizar si la solución obtenida es única.

Búsqueda de un punto de encuentro

Problema 2

Un camión sale desde Mar del Plata hacia Buenos Aires, por la ruta 2, y viaja a una velocidad constante de 30 kilómetros por hora. En el mismo momento, sale de Buenos Aires hacia Mar del Plata, por la misma ruta, un auto que se desplaza a una velocidad constante de 130 kilómetros por hora. Se considera que las dos ciudades distan entre sí 400 km y que los vehículos no se detienen en todo el camino.

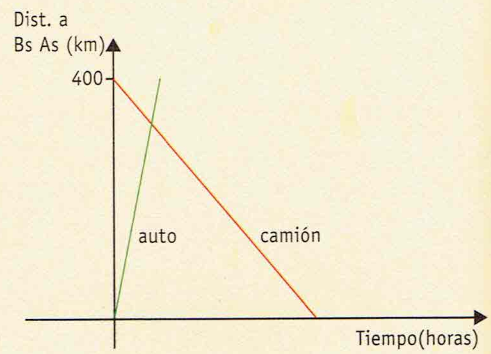
¿A qué distancia de Buenos Aires se cruzarán ambos vehículos? ¿Cuánto tiempo después de haber iniciado el viaje se producirá este encuentro?

Para interpretar este problema, es conveniente esbozar en un mismo gráfico la distancia a Buenos Aires de cada vehículo en función del tiempo transcurrido desde el comienzo del movimiento.

Como el camión sale de Mar del Plata, comienza a 400 km de Buenos Aires y se va acercando, por lo tanto el gráfico que representa la distancia a Buenos Aires de este camión irá decreciendo. Además, como avanza a velocidad constante, el gráfico será una recta.

Como el auto sale de Buenos Aires y se aleja a velocidad constante, el gráfico de la distancia a Buenos Aires será una semirecta que sale del origen de coordenadas.

El lugar y el momento en el que se cruzan los dos vehículos corresponden, en el gráfico, a las coordenadas del punto de intersección entre las dos rectas, ya que ese punto representa la situación en la que los dos vehículos se hallan en el mismo lugar en el mismo instante.



Al revisar el capítulo 3 se puede recordar que si un auto va a velocidad constante v y sale a una distancia d de una ciudad, la distancia a esa ciudad (D) en función del tiempo (t) está determinada por la fórmula:

$$D = v \cdot t + d$$

Entonces, para responder a las preguntas planteadas, se deben hallar las coordenadas del punto de intersección entre las rectas. Para poder hallar este punto, primero es necesario escribir las ecuaciones de las rectas.

Camión: $y = -30x + 400$ Auto: $y = 130x$

Hallar el punto de intersección entre las rectas es encontrar el valor de x para el cual el valor de y en ambas ecuaciones es el mismo. Por ejemplo, cuando x vale 1, transcurrió 1 hora desde que ambos vehículos comenzaron el movimiento; el camión recorrió 30 km y está a 370 km de Buenos Aires, mientras que el auto recorrió 130 km y está a 130 km de Buenos Aires. Entonces, este valor de x no es el buscado. Para no seguir probando con muchos valores, se busca un valor de x para el cual el resultado de $-30x + 400$ sea el mismo que el de $130x$, mediante el planteo y la resolución de la siguiente ecuación:

$$-30x + 400 = 130x$$
$$400 = 130x + 30x$$
$$400 = 160x$$
$$2{,}5 = x \longrightarrow$$

Se interpreta que ambos vehículos se encuentran cuando transcurrieron 2 horas y media desde que empezaron el movimiento.

El valor correspondiente de y puede calcularse reemplazando el valor de x obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones:

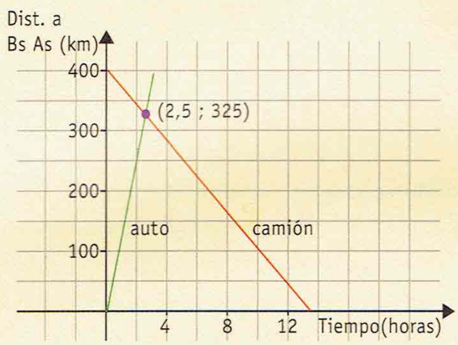
Para el camión: $y = -30 \cdot 2{,}5 + 400 = 325$ Para el auto: $y = 130 \cdot 2{,}5 = 325$

Se concluye que los vehículos se cruzan a 325 kilómetros de Buenos Aires cuando transcurrieron 2 horas y media de sus respectivas partidas.

Si se realiza el gráfico, teniendo en cuenta las fórmulas de la página anterior:

Camión: $y = -30x + 400$ Auto: $y = 130x$

Puede observarse que el punto (2,5 ; 325) es el único que pertenece a ambas rectas, es decir, se han hallado las coordenadas del punto de intersección entre ellas.



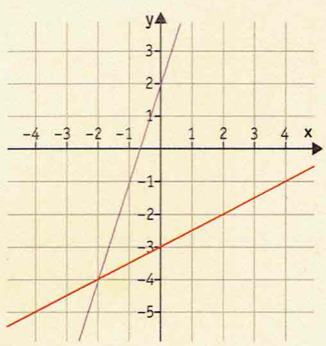
En este problema, la búsqueda del punto de encuentro se realizó mediante la resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos variables, cuya única solución es el punto (2,5 ; 325). Para verificar la solución obtenida, se reemplazan x e y por estos valores en ambas ecuaciones y se comprueba que se obtienen igualdades.

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Método de igualación

En el gráfico siguiente están representadas las dos rectas asociadas a dos ecuaciones que forman un sistema.

$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ -\frac{1}{2}x + y = -3 \end{cases}$$



Las dos rectas se intersecan en un punto. Como cada recta contiene a los puntos cuyas coordenadas $(x ; y)$ verifican una de las ecuaciones, hallar las coordenadas exactas del punto de intersección equivale a *resolver* el sistema de ecuaciones, es decir, hallar el par $(x ; y)$ que verifica ambas ecuaciones a la vez.

Uno de los procedimientos que puede usarse para resolver un sistema consiste en expresar ambas ecuaciones en función de una de las variables, en este caso:

$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ -\frac{1}{2}x + y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = \frac{1}{2}x - 3 \end{cases}$$

A continuación, se busca cuál es el valor de x para el cual se obtiene el mismo valor de y en ambas ecuaciones, es decir, se halla el valor de x para el que se cumple la siguiente igualdad:

$$3x + 2 = \frac{1}{2}x - 3$$

Quedó planteada una ecuación cuya única incógnita es la coordenada x del punto de intersección. Al resolverla, se obtiene:

$$3x - \frac{1}{2}x = -3 - 2$$
$$\frac{5}{2}x = -5$$
$$x = -5 : \frac{5}{2}$$
$$x = -2$$

Entonces, para $x = -2$, las rectas coinciden. Falta averiguar cuál es el valor de y que corresponde, en ambas rectas, a este valor de x. Para encontrarlo, se reemplaza el valor obtenido para x en una de las ecuaciones dadas:

$$y = 3x + 2 \Rightarrow y = 3(-2) + 2 \iff y = -4$$

Si el valor de x obtenido se reemplaza en la otra ecuación, se obtiene el mismo valor para y, pues -2 es el valor de x para el cual el valor de y en ambas expresiones es el mismo. Por eso, este reemplazo es útil como estrategia de verificación. En este caso:

$$\frac{1}{2}x - 3 = \frac{1}{2}(-2) - 3 = -4 \iff y = -4 \longrightarrow$$

El valor obtenido coincide con el hallado en el cálculo anterior.

Entonces, el par $(-2 ; -4)$ es la solución del sistema de ecuaciones. Esto se refleja en el gráfico en que las rectas se intersecan en un solo punto que es el $(-2 ; -4)$.

El conjunto solución del sistema es $S = \{(-2 ; -4)\}$

Las rectas tienen un único punto común. Por eso, este sistema de ecuaciones es *compatible determinado*.

Este procedimiento se conoce con el nombre de **método de igualación**, debido a que consiste en "igualar" las expresiones que se obtienen en ambas ecuaciones al despejar la misma variable.

El *método de igualación* consta de los siguientes pasos:
1. se despeja la misma variable en ambas ecuaciones;
2. se igualan las expresiones obtenidas en 1, lo que permite obtener el valor de una de ellas, en caso de que exista;
3. se reemplaza el valor obtenido en 2 en cualquiera de las expresiones del primer paso para obtener el valor de la otra variable.

El *conjunto solución* de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es el conjunto formado por todos los pares de valores que son solución de ambas ecuaciones al mismo tiempo.

Problema 3

Una empresa fabrica dos tipos de productos. Para tomar decisiones relacionadas con la producción, un especialista estudió comparativamente la evolución de las ventas de ambos y obtuvo que, durante un cierto período, las ventas (y, en miles de pesos) en función del precio por unidad (x, en pesos) se podían aproximar mediante las siguientes funciones lineales.

Producto A: $y = \frac{1}{2}x + 30$ Producto B: $y = \frac{2}{3}x + 35$

¿Para qué precio se igualan las ventas?

El precio para el cual se igualan las ventas será aquel valor de x que provoque que se venda la misma cantidad de ambos productos, es decir, el valor de x para el cual las fórmulas tienen el mismo resultado. Esto se expresa a través del siguiente sistema de ecuaciones.

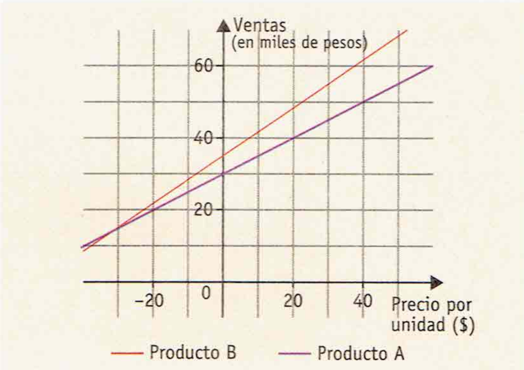
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 30 \\ y = \frac{2}{3}x + 35 \end{cases}$$

Al igualar las fórmulas y resolver la ecuación que queda planteada, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x + 30 &= \frac{2}{3}x + 35 \\ \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}x &= 35 - 30 \\ -\frac{1}{6}x &= 5 \\ x &= 5 : \left(-\frac{1}{6}\right) \\ x &= -30 \end{aligned}$$

Como la variable x representa el precio por unidad, el valor obtenido no es un valor posible para esta variable. En el gráfico siguiente se representan las rectas asociadas al sistema de ecuaciones considerado.

Las rectas se intersecan en un único punto que tiene abscisa −30. El sistema de ecuaciones es compatible determinado, pero la solución obtenida no tiene sentido en el contexto en el que se planteó el problema.



Se concluye que no hay ningún precio por unidad para el cual se igualen las ventas de ambos productos.

ACTIVIDADES

1. Hallen, en cada caso, analítica y gráficamente, el punto de intersección entre las gráficas de las siguientes funciones lineales.

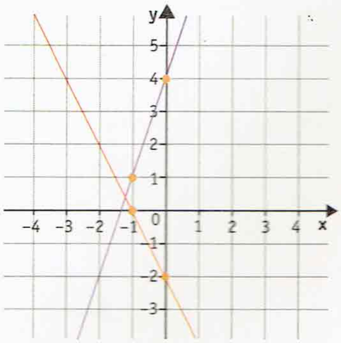
a. $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = 3x + 2$ **b.** $f(x) = -2x + 1$ y $g(x) = \frac{3}{2}x$

2. Resuelvan los siguientes sistemas de ecuaciones.

a. $\begin{cases} y = -4x + 2 \\ y = \frac{1}{2}x - 4 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = -\frac{3}{4}x + 5 \end{cases}$

3. Dos autos parten simultáneamente, se desplazan por una misma ruta y van en la misma dirección, para realizar un viaje de aproximadamente 500 km. El primero lo hace a una velocidad constante de 120 km/h; el otro parte desde un pueblo que se encuentra sobre la misma ruta pero 60 km más adelante, y se desplaza con una velocidad constante de 90 km/h. ¿Alcanzará el primer auto al segundo? ¿En qué momento?

4. Hallen el punto de intersección entre los gráficos de las siguientes funciones lineales:



Método de sustitución

Problema 4

Actualmente, un hombre tiene seis veces la edad de su hijo. Hace dos años, el padre era ocho veces mayor. ¿Qué edades tienen ambos actualmente?

Las dos incógnitas que plantea el problema son las edades de ambos. Para designar las variables con precisión, puede elegirse, por ejemplo, la actualidad como referencia:

Edad actual del padre:	Edad actual del hijo:
p	h

Es conveniente expresar también las otras edades a las que se hace mención en el enunciado, en función de las variables elegidas:

Edad del padre hace dos años:	Edad del hijo hace dos años:
$p-2$	$h-2$

Luego, debe expresarse en ecuaciones la información dada en el enunciado.

En el enunciado dice...	Significa que...	Ecuación
Actualmente un hombre tiene seis veces la edad de su hijo.	La edad del padre es la que resulta de multiplicar por 6 a la del hijo.	$p=6\cdot h$
Hace dos años, el padre era ocho veces mayor que el hijo.	La edad que tenía el padre hace dos años es la que resulta de multiplicar la del hijo en ese momento por 8.	$p-2=8\cdot(h-2)$

Queda planteado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} p = 6h \\ p - 2 = 8\,(h - 2) \end{cases}$$

Como ya se sabe que $p = 6h$, es conveniente sustituir esta expresión para p en la segunda ecuación del sistema, así:

$$6h - 2 = 8 \cdot (h - 2)$$

Resolviendo la ecuación anterior, se averigua el valor de h:

$$6h - 2 = 8(h - 2)$$
$$6h - 2 = 8h - 16$$
$$-2 + 16 = 8h - 6h$$
$$14 = 2h$$
$$h = 7 \longrightarrow$$ El hijo tiene 7 años.

Para calcular la edad del padre, se reemplaza en la primera ecuación el valor obtenido para h:

$$p = 6h \Rightarrow p = 6 \cdot 7 \Rightarrow p = 42 \longrightarrow$$ El padre tiene 42 años.

Además del método de igualación, existen otros métodos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. En el problema anterior no se utilizó el método de igualación, se utilizó el método de sustitución. En el siguiente ejemplo se explica este método con más detalle

Ejemplo 1

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + y = 3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

Para resolver este sistema aplicando el método de sustitución se realizan los pasos siguientes.

Primero, se elige una de las ecuaciones y se despeja cualquiera de las variables. Por ejemplo, se despeja la variable y de la primera ecuación.

$$\frac{x}{2} + y = 3 \Rightarrow y = -\frac{x}{2} + 3$$

La nueva ecuación obtenida es equivalente a la original. Los pares $(x \,;\, y)$ que sean solución del sistema deben cumplir esta ecuación y también la segunda ecuación del sistema original.

El paso siguiente consiste en sustituir la expresión obtenida para y en la otra ecuación del sistema:

$$2x + 3y = 4$$

$$2x + 3 \cdot \overbrace{\left(-\frac{x}{2} + 3\right)} = 4$$

La ecuación que quedó planteada tiene una sola variable; al resolver esta ecuación se halla el valor de x.

$$\begin{aligned} 2x + 3 \cdot \left(-\frac{x}{2} + 3\right) &= 4 \\ 2x - \frac{3}{2}x + 9 &= 4 \\ \frac{1}{2}x &= 4 - 9 \\ x &= -5 : \left(\frac{1}{2}\right) \\ x &= -10 \end{aligned}$$

Una vez hallado el valor de x, se lo reemplaza en la expresión en la cual se despejó y. De este modo, se halla el valor de la otra variable:

$$y = -\frac{x}{2} + 3 \Rightarrow \text{Para } x = -10,\ y = -\frac{(-10)}{2} + 3 \Rightarrow y = 8$$

Entonces, el par ordenado $(-10 \,;\, 8)$ es el *único* par de valores que verifica ambas ecuaciones simultáneamente. Se concluye que el sistema es compatible determinado y su conjunto solución es $S = \{(-10 \,;\, 8)\}$.

El método de sustitución consta de los siguientes pasos:
1. se despeja una variable de una de las ecuaciones;
2. se sustituye la expresión obtenida en 1 en la otra ecuación y se resuelve la nueva ecuación planteada. Se halla, así, el valor de una de las variables;
3. se reemplaza el valor obtenido en el paso 2 en la expresión que se obtuvo en el paso 1. Así se halla el valor de la otra variable.

Con el siguiente ejemplo se sintetizan los pasos que deben realizarse para resolver un sistema de ecuaciones por sustitución.

Ejemplo 2

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2 - 3x = 2y \\ x + 5y = \dfrac{17}{6} \end{cases}$$

Para resolverlo por *sustitución* se realizan los pasos siguientes.

1. Se despeja una variable de una de las ecuaciones. Es conveniente elegir la ecuación y la variable para las que el despeje resulte más sencillo. En este caso, es conveniente despejar la variable x de la segunda ecuación.	$x + 5y = \frac{17}{6}$ $x = \frac{17}{6} - 5y$
2. La expresión obtenida en el paso **1** se *sustituye* por la variable en la otra ecuación. Queda planteada una nueva ecuación con una sola variable. Se resuelve esta ecuación y se obtiene el valor de dicha variable.	$2 - 3x = 2y$ $2 - 3 \cdot \left(\frac{17}{6} - 5y\right) = 2y$ $2 - \frac{17}{2} + 15y = 2y$ $15y - 2y = -2 + \frac{17}{2}$ $13y = \frac{13}{2}$ $y = \frac{1}{2}$
3. El valor hallado para la variable en el paso **2** se reemplaza en la expresión obtenida en el paso **1**. Se obtiene así el valor de la otra variable.	$x = \frac{17}{6} - 5y$ Para $y = \frac{1}{2}$: $x = \frac{17}{6} - 5 \cdot \frac{1}{2}$ $x = \frac{1}{3}$

Se ha encontrado que el único punto que verifica ambas ecuaciones es $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$. Este sistema es compatible determinado, y su conjunto solución es

$$S = \left\{\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)\right\}$$

Problema 5

Buscar dos números que cumplan que la diferencia entre la mitad del primero y la tercera parte del segundo es 1 y que la diferencia entre el triple del primero y el doble del segundo es 6.

Para resolver este problema es posible escribir las ecuaciones que lo representan y construir un sistema, ya que deben cumplirse dos condiciones simultáneamente:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$$

Una vez escrito el sistema, para resolver el problema hay que intentar encontrar la solución. Sin embargo, en este caso se presenta una situación diferente de las anteriores, como se muestra en el desarrollo que sigue.

Se elige, por ejemplo, despejar la variable x en la segunda ecuación.	$3x - 2y = 6 \Leftrightarrow 3x = 6 + 2y$ $x = \frac{6+2y}{3}$
Se sustituye la expresión obtenida en la otra ecuación y se resuelve la ecuación con una variable que queda planteada.	$\left(\frac{6+2y}{3}\right)\cdot\frac{1}{2} - \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow$ $\frac{6+2y}{6} - \frac{y}{3} = 1$ $1 + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}y = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$

Como la igualdad obtenida es siempre válida, significa que, para cualquier valor que se elija de y, siempre se cumple la segunda igualdad. La ecuación tiene infinitas soluciones ya que puede elegirse cualquier valor para y con el cual, a partir de la condición $x = \frac{6+2y}{3}$ se determina el valor de x, por lo tanto, existen infinitos pares $(x\,;y)$ que verifican las condiciones propuestas en el problema.

Por ejemplo si se elige $y = 9$ el valor de x correspondiente es $x = \frac{6+2.9}{3} = 8$. Por lo tanto los números 8 y 9 son una solución del problema. De igual manera se podría utilizar cualquier valor de y.

Se concluye que el sistema tiene infinitas soluciones y se lo llama *compatible indeterminado.*

Para cualquier valor de y, el correspondiente valor de x puede obtenerse con el cálculo siguiente:

$$x = \frac{6+2y}{3}$$

Los pares que son solución del sistema tienen la forma $\left(\frac{6+2y}{3}\,;y\right)$, con y cualquier número real que se quiera elegir.

Entonces, el conjunto solución, se puede expresar del siguiente modo:

$$S = \left\{\left(\frac{6+2y}{3}\,;y\right),\ y \in \mathbb{R}\right\}$$

ACTIVIDADES

5. Resuelvan los siguientes sistemas de ecuaciones por sustitución.

a. $\begin{cases} \frac{x}{2} + y = 5 \\ -x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x + \frac{y}{2} = 1 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} 2y + x = 12 \\ 2y = x + 8 \end{cases}$

6. Julieta gastó \$107 comprando en un kiosco 5 ejemplares de una revista y 7 ejemplares de un libro. Marcelo compró en el mismo kiosco 3 de esas revistas y 14 de esos libros y gastó \$172. ¿Cuánto cuesta cada revista y cada libro?

7. Hallen dos números, sabiendo que su suma es 9 y su diferencia es 2.

8. En un bolso hay 40 monedas, todas de 25 y 50 centavos. Si en total hay \$16,50, ¿cuántas monedas de cada valor hay?

9. Dos de los ángulos de un cuadrilátero miden 70° y 80°, respectivamente. La diferencia entre las amplitudes de los otros dos es 18°. Hallen la amplitud de cada uno de los ángulos desconocidos.

Si se multiplican todos los coeficientes de una ecuación por un mismo número se obtiene otra ecuación equivalente, es decir, la nueva ecuación tendrá el mismo conjunto solución que la original.

Para resolver un sistema por el *método de reducción por sumas o restas* se realizan los siguientes pasos.

1. Se expresan ambas ecuaciones en forma implícita.

2. Se multiplican o se dividen todos los coeficientes de una de las ecuaciones por un mismo número, de modo que los coeficientes de una de las variables, en ambas ecuaciones, resulten iguales en valor absoluto.

3. Se suman o se restan la ecuación obtenida en el paso 2 con la del sistema original, que no fue alterada, de manera que se anulen los términos que contienen a una de las variables; esto permite obtener una ecuación con una sola variable. Se resuelve esta ecuación y se halla el valor de una de las variables.

4. Se sustituye el valor obtenido en el paso 3 en cualquiera de las ecuaciones originales y se obtiene el valor de la otra variable.

Método de reducción por sumas o restas

En páginas anteriores se habló de diferentes métodos para resolver sistemas de ecuaciones: sustitución e igualación. Con el siguiente ejemplo se analizará el método de reducción por sumas y restas.

Ejemplo

Se considera el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 4 \end{cases}$$

Al analizar las rectas asociadas a las ecuaciones de este sistema, las mismas están dadas en forma implícita. Para casos como éste, es conveniente aplicar el *método de reducción por sumas o restas*, que consiste en los siguientes pasos.

1. Se reemplaza una de las ecuaciones del sistema por otra equivalente, elegida de modo que los coeficientes de alguna de las variables, en ambas ecuaciones, resulten iguales en valor absoluto. Para este caso, resulta útil multiplicar por 2 todos los coeficientes de la primera ecuación. De esta manera el coeficiente de y en la primera y en la segunda ecuación resulta ser 4.	$5x - 2y = 4 \xrightarrow{\cdot 2} 10x - 4y = 8$
2. La ecuación transformada y la otra, se suman o se restan, según convenga, y se obtiene una ecuación con una sola variable. En este caso, se restan ambas ecuaciones y se obtiene otra ecuación equivalente cuya única variable es x.	$\begin{array}{r} 10x - 4y = 8 \\ -\quad 2x - 4y = 4 \\ \hline 8x = 4 \end{array}$
3. Se resuelve la ecuación obtenida, y se halla el valor de una de las variables.	$8x = 4$ $x = \frac{1}{2}$
4. Se sustituye el valor hallado en cualquiera de las ecuaciones iniciales, se resuelve y se obtiene el valor de la otra variable.	$2x - 4y = 4$ $x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 4y = 4$ $y = -\frac{3}{4}$

En este caso, se concluye que el sistema es compatible determinado y su conjunto solución es $S = \left\{ \left(\frac{1}{2} ; -\frac{3}{4} \right) \right\}$

10. Resuelvan por el método de reducción por sumas o restas los siguientes sistemas de ecuaciones.

a. $\begin{cases} 4x + 3y = 3 \\ x - 6y = 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 9x - y + 1 = 3 \\ 5x + 2y - 2 = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 5x + 2y = -4 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$

Clasificación de sistemas de ecuaciones

Como todo sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables puede asociarse con dos rectas, es importante considerar que dos rectas no siempre se intersecan en un punto.

Ejemplo 1

Por ejemplo, si se despeja la variable y en las ecuaciones del sistema siguiente

$$\begin{cases} -3x + y = 1 \\ -3x + y = 4 \end{cases}$$

se obtiene otro sistema, que es equivalente al anterior:

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$$

Dos rectas con igual pendiente son paralelas.

Esta forma de expresar las ecuaciones permite apreciar que se trata de dos ecuaciones asociadas a dos rectas que tienen la misma pendiente y distinta ordenada al origen, es decir, son *rectas paralelas no coincidentes*. Como las rectas no tienen puntos en común, el conjunto solución del sistema de ecuaciones es $S = \phi$. Es decir, no hay ningún par de valores $(x ; y)$ que verifiquen simultáneamente ambas ecuaciones.

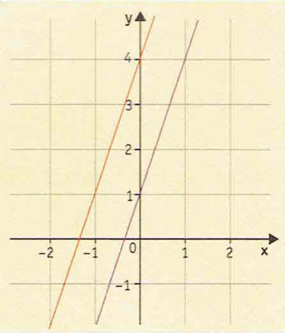
Si se intenta resolver este sistema con el método de igualación, se obtiene lo siguiente.

$$3x + 1 = 3x + 4$$
$$3x - 3x = 4 - 1$$
$$0 = 3 \rightarrow \textit{absurdo}$$

Al resolver la ecuación se llega a una expresión *falsa*. Se concluye que la ecuación planteada no tiene solución, es decir, no hay ningún valor de x que la verifique. En consecuencia, tampoco hay ningún valor de y. Entonces, el conjunto solución es $S = \phi$ y el sistema es *incompatible*.

Un sistema de ecuaciones lineales que no tiene solución se llama **incompatible**. Su conjunto solución es $S = \phi$ y las rectas que representan las ecuaciones son paralelas no coincidentes.

No hay ningún punto que pertenezca a ambas rectas. La representación gráfica de ambas rectas comprueba lo obtenido a través del procedimiento algebraico.



Ejemplo 2

Para resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} y = 5x - 1 \\ 10x - 2y = 2 \end{cases}$

Si se transforma este sistema en otro equivalente, de la misma manera que en el ejemplo anterior:

$$\begin{cases} y = 5x - 1 \\ 10x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x - 1 \\ -2y = -10x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x - 1 \\ -y = -5x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x - 1 \\ y = 5x - 1 \end{cases}$$

Un sistema de ecuaciones lineales que tiene infinitas soluciones se llama **compatible indeterminado**.
Su conjunto solución se expresa así:

$S = \{(x\ ;\ mx + b), x \in \mathbb{R}\}$

siendo $y = mx + b$ la ecuación de cada una de las rectas que lo forman, que son paralelas coincidentes.

En la última expresión obtenida para el sistema, se advierte que está formado por dos rectas *coincidentes*. Entonces, ambas rectas tienen infinitos puntos en común: todos los puntos que las forman. Los sistemas como éste tienen infinitas soluciones.

Igual que en el caso anterior, puede analizarse qué sucede al resolver el sistema con el método de igualación. Para realizarlo, se plantea la ecuación y se la resuelve:

$$5x - 1 = 5x - 1$$
$$5x - 5x = -1 + 1$$
$$0 = 0 \rightarrow$$ ***La expresión obtenida es verdadera para cualquier valor de x.***

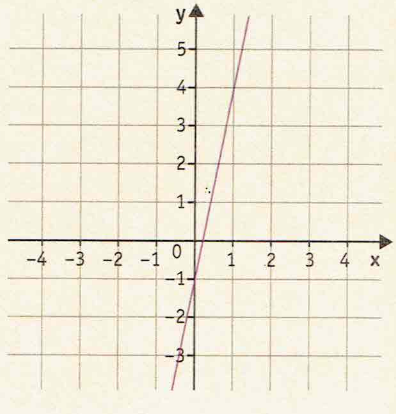
Se concluye que cualquier valor de x verifica la ecuación. Falta buscar el valor de y que corresponde a cada valor de x, reemplazando su valor en la ecuación $y = 5x - 1$. En el cuadro siguiente se muestra cómo se obtienen algunas soluciones.

Para $x = 2 \Rightarrow y = 5 \cdot 2 - 1 \Rightarrow y = 9$	El par (2 ; 9) es una de las infinitas soluciones del sistema.
Para $x = -1 \Rightarrow y = 5 \cdot (-1) - 1 \Rightarrow y = -6$	El par (-1 ; -6) es otra de las infinitas soluciones del sistema.

De este modo, se puede seguir obteniendo soluciones para cualquier valor que se elija arbitrariamente para x. Como no es posible enumerar las infinitas soluciones del sistema, se busca alguna manera de expresarlas. Como para cada valor de x, el valor de y correspondiente se obtiene con el cálculo $5x - 1$, los infinitos pares $(x\ ;\ y)$ que son soluciones del sistema tendrán la forma $(x\ ;\ 5x - 1)$, siendo x un número real cualquiera. Esto puede expresarse simbólicamente del modo siguiente:

$$S = \{(x\ ;\ 5x - 1), x \in \mathbb{R}\}$$

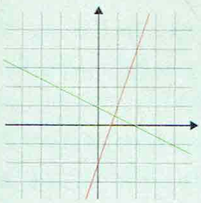
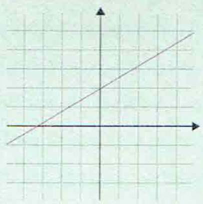
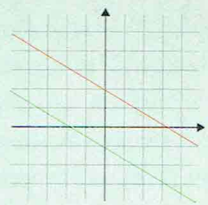
La representación gráfica de este sistema de ecuaciones muestra dos rectas coincidentes. Todos los pares $(x\ ;\ y)$ que son las coordenadas de los puntos de esta recta verifican simultáneamente las dos ecuaciones que componen el sistema, es decir, son soluciones.



Clasificación de sistemas de dos ecuaciones lineales

Todo sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables está asociado a un par de rectas en un sistema cartesiano. Por eso, la clasificación del sistema, y, por ende, la cantidad de soluciones que tiene, guardan estrecha vinculación con la relación entre las rectas que lo representan gráficamente.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables puede ser...

Compatible (tiene solución)		**Incompatible**
Compatible determinado	**Compatible indeterminado**	▮ No tiene solución. ▮ Las rectas son paralelas no coincidentes.
▮ La solución es única. ▮ Las rectas se intersecan en un punto.	▮ Tiene infinitas soluciones. ▮ Las rectas son paralelas coincidentes.	
		

Cuando las dos ecuaciones que componen un sistema están expresadas en la forma explícita, es posible anticipar la cantidad de soluciones que tiene el sistema y clasificarlo, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo

A. $\begin{cases} y = 4x - 3 \\ y = 4x + 1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} y = 6x - 3 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$

▮ Las rectas asociadas al sistema A tienen igual pendiente y distinta ordenada al origen, es decir, son paralelas no coincidentes. Este sistema es *incompatible*.

▮ Las rectas asociadas al sistema B tienen distinta pendiente, de lo cual se concluye que se intersecan en un punto. Este sistema es *compatible determinado*.

▮ Las rectas asociadas al sistema C tienen la misma pendiente y la misma ordenada al origen, es decir, son rectas coincidentes. Este sistema es *compatible indeterminado*.

11. Resuelvan los siguientes sistemas de ecuaciones y represéntenlos gráficamente.

a. $\begin{cases} y = \frac{5}{4}x \\ y = \frac{5}{4}x - 2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} y = -4x + 1 \\ 2x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2} \end{cases}$

12. Sin resolverlos, clasifiquen los siguientes sistemas de ecuaciones:

a. $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{4}{3} \end{cases}$ b. $\begin{cases} y = 2x - \frac{1}{2} \\ y = 2x \end{cases}$ c. $\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + 1 \\ y = -\frac{4}{3}x + 1 \end{cases}$

Sistemas de ecuaciones lineales y parámetros

En las ecuaciones que componen los sistemas que se estudian a continuación se omiten algunos datos y se analiza el tipo de sistema que se obtiene y la cantidad de soluciones que tiene, en cada caso, según los valores que se asignen a los datos faltantes.

Problema 6

En cada caso determinar los valores que pueden reemplazarse en la línea punteada para que el sistema sea:

a. $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = \ldots x - 2 \end{cases}$ incompatible.

b. $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = \ldots x - 2 \end{cases}$ compatible indeterminado.

c. $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = \ldots x - 2 \end{cases}$ compatible determinado.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables es incompatible cuando las pendientes de las rectas asociadas a las ecuaciones son iguales y las ordenadas al origen son distintas. En el problema **a**, las ordenadas al origen son distintas y lo que hay que completar es la pendiente de la segunda recta. Si las líneas punteadas se completan con el número 3, las pendientes resultan iguales. Entonces, el sistema resulta incompatible cuando la línea punteada se completa con el valor 3.

Un sistema es compatible indeterminado cuando, tanto las pendientes de las rectas asociadas a las ecuaciones, como las ordenadas al origen, son iguales. En la parte **b**, las ordenadas al origen son distintas y no pueden modificarse. Entonces, no hay valor posible para el que el sistema pueda resultar del tipo pedido.

Un sistema es compatible determinado, cuando las pendientes de las rectas asociadas a las ecuaciones son distintas. En la parte **c** lo que hay que completar es la pendiente de la segunda ecuación, para que las pendientes de las rectas sean distintas puede elegirse cualquier valor, excepto el 3. Entonces, el sistema será compatible determinado para todos los números reales excepto para el 3.

Cuando en una ecuación aparece otra letra además de las variables, se la llama **parámetro**. Por ejemplo en la ecuación $y = 6x + k$, k es el parámetro y permite asociar a cualquier recta con pendiente 6.

Problema 7

Determinar para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

$$\begin{cases} y = 2x + k \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

Como las pendientes de las rectas asociadas a las ecuaciones son iguales, se concluye que no existen valores de k para los cuales el sistema pueda resultar compatible determinado.

Para $k = 3$, el sistema resulta compatible indeterminado, porque, en este caso, ambas rectas tienen pendientes y ordenadas al origen iguales.

Para todos los demás valores reales de k, el sistema es incompatible, porque las rectas tienen pendientes iguales y ordenadas al origen distintas.

Es importante tener en cuenta que un sistema de ecuaciones que contiene un parámetro representa a infinitos sistemas de ecuaciones, uno para cada valor que se le asigne al parámetro.

Por ejemplo, en el último caso:

Para $k=3$	el sistema es:	$\begin{cases} y=2x+3 \\ y=2x+3 \end{cases}$	El sistema resulta compatible indeterminado.
Para $k=-1$	el sistema es:	$\begin{cases} y=2x-1 \\ y=2x+3 \end{cases}$	El sistema resulta incompatible.

Un sistema de ecuaciones con un parámetro es una familia de sistemas. El análisis desarrollado permite agrupar los sistemas que pueden presentarse en relación con los valores que puede tomar el parámetro.

Hay que tener en cuenta que es diferente analizar, dentro de una familia de sistemas, para qué valor del parámetro el sistema tiene determinada característica, que resolver el sistema.

Por ejemplo, en el caso del problema 6 de la página anterior, se obtuvo que hay infinitos valores para los que el sistema dado resulta compatible determinado (cualquier valor de k distinto de 3).

Encontrar los valores de k que cumplen esa condición no aporta ninguna información acerca de cuál es la solución del sistema que queda al reemplazar k, solamente da información sobre cuántas soluciones tiene. Si se quiere conocer cuál es la solución del sistema que se obtiene al reemplazar k por algún valor en particular, se lo debe resolver.

Problema 8

a. $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + my = 8 \end{cases}$ Determinar para qué valores reales de $m \in \mathbb{R}$ el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b. $\begin{cases} y - \frac{a}{2}x = 6 \\ x = \frac{a-y}{3} \end{cases}$ Determinar para qué valores reales de $a \in \mathbb{R}$ el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

Si $m = 0$ el sistema queda: $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 0y = 8 \end{cases}$

De la segunda ecuación $x = 2$, y entonces $2 \cdot 2 + 3y = 4 \Rightarrow y = 0$.
Cuando $m = 0$, el sistema es compatible determinado.

Si $m \neq 0$, el primer sistema puede ser trasformado en otro equivalente, con las ecuaciones de las rectas en forma explícita, de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + my = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = -2x + 4 \\ my = -4x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \\ y = -\frac{4}{m}x + \frac{8}{m} \end{cases}$$

Para que el sistema sea compatible determinado las rectas deben tener distinta pendiente, es decir:

$$-\frac{2}{3} \neq -\frac{4}{m} \Leftrightarrow 2m \neq 12 \Leftrightarrow m \neq 6$$

Por lo tanto, si m ≠ 6 las rectas tendrán distinta pendiente, entonces el sistema será compatible determinado.

Para $m = 6$ las pendientes son iguales y, al analizar las ordenadas al origen, se tiene:

$$\frac{8}{m} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Las ordenadas al origen son iguales.

Entonces, para $m = 6$, las rectas tienen la misma pendiente y la misma ordenada al origen, es decir, son coincidentes y por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Como no hay otro valor para el que las pendientes resulten iguales, se concluye que para todos los demás valores de m, excepto para $m = 6$, el sistema es compatible determinado y no existen valores que puedan darse a m de modo que el sistema resulte incompatible.

Para resolver el segundo problema es conveniente expresarlo con ecuaciones equivalentes a las originales, en las cuales las rectas asociadas estén expresadas en forma explícita. Esto se logra despejando la variable y en cada ecuación.

$$\begin{cases} y - \frac{a}{2}x = 6 \\ x = \frac{a-y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{2}x + 6 \\ 3x = a - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{2}x + 6 \\ y = -3x + a \end{cases}$$

La última expresión obtenida para el sistema permite analizar la relación entre los coeficientes y la clasificación del sistema. Las rectas tienen pendientes iguales, cuando se cumple que: $\frac{a}{2} = -3 \Rightarrow a = -6$

En este caso, las ordenadas al origen son distintas: una es 6 y la otra es −6.

Entonces, para $a = -6$, el sistema es incompatible. Como no hay otro valor de a para el cual las pendientes resulten iguales, para ningún valor de a resulta un sistema compatible indeterminado.

Para todos los valores de a distintos de −6, el sistema es compatible determinado.

ACTIVIDADES

13. Completen, en cada caso, las líneas punteadas con un valor para el cual la clasificación indicada resulte correcta. En los casos en que se completa con más de un valor, los valores que se buscan no deben ser necesariamente iguales. Indiquen en cada caso si el valor o los valores que eligieron son los únicos posibles.

a. $\begin{cases} y = 2x - \frac{5}{2} \\ y = ...x + 1 \end{cases}$ Compatible determinado.

b. $\begin{cases} y = 4x + 1 \\ y = 4x + ... \end{cases}$ Compatible indeterminado.

c. $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 1 \\ y = ...x + ... \end{cases}$ Incompatible.

d. $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + ... \\ y = 4x + ... \end{cases}$ Compatible determinado.

e. $\begin{cases} y = 5x - 1 \\ y = 3x + ... \end{cases}$ Incompatible.

14. Indiquen, en cada caso, para qué valores reales de c el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

a. $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 1 \\ y = c \cdot x - 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} y = x - 3 \\ y = c \cdot x - 3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} y = 4x + c \\ y = 5x + c \end{cases}$

d. $\begin{cases} y = \frac{4}{5}x + c \\ y = c \cdot x + \frac{4}{5} \end{cases}$

e. $\begin{cases} y = 7x + \frac{1}{3} \\ y = (c+1) \cdot x + 2 \end{cases}$

15. Hallen, en cada caso, los valores de a para los cuales el sistema dado es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

a. $\begin{cases} ax + 3y = 1 \\ 2x - 9y = 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} ax + y = 4 \\ 5x + 4y = 16 \end{cases}$

Sistemas con más de dos ecuaciones

Problema 9

Encontrar, si existe, algún punto que pertenezca a las tres rectas que se presentan a continuación.

$$x + y = 4 \qquad -3x + 2y = 3 \qquad y = 3x + 3$$

Para responder esta pregunta es posible pensar la intersección entre las tres rectas como un sistema de tres ecuaciones lineales con dos variables:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ -3x + 2y = 3 \\ y = 3x + 3 \end{cases}$$

Una forma de resolverlo es encontrar, en principio, la intersección entre dos de las rectas.

Por ejemplo se toman las dos primeras ecuaciones y se resuelve el sistema obtenido por sustitución.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ -3x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$y = 4 - x \Rightarrow -3x + 2 \cdot (4 - x) = 3 \Leftrightarrow -3x + 8 - 2x = 3 \Leftrightarrow -5x = -5 \Leftrightarrow x = 1$$

El valor de y es:

$$y = 4 - x \Rightarrow y = 4 - (1) = 3$$

Las dos primeras rectas tienen como único punto común al (1 ; 3), por lo que el último sistema planteado es compatible determinado. Pero, si hay un punto que pertenece a las tres rectas, ese punto debe pertenecer a la tercera recta; si no pertenece, no habría ningún punto común a las tres rectas.

El punto (1 ; 3) no pertenece a la tercera recta porque no verifica su ecuación que es $y = 3x + 3$:

$$3 \neq 3 \cdot (1) + 3 \Leftrightarrow 3 \neq 6$$

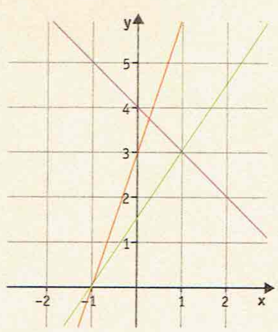
Esto significa que las tres rectas no se intersecan en un mismo punto, por lo tanto, el sistema formado por las tres ecuaciones es incompatible.

Otro modo de comprobar el resultado obtenido es mediante un gráfico:

Si se arman sistemas con dos de las ecuaciones, resultan compatibles determinados (cada par de rectas tiene un punto común), pero el sistema formado por las tres es incompatible porque no hay puntos comunes a las tres.

Puede observarse que las tres rectas no se intersecan en un mismo punto.

- $-3x + 2y = 3$
- $y = 3x + 3$
- $x + y = 4$



ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN

16. ABCD es un cuadrilátero. Las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados son las siguientes.

AB: $y=\frac{1}{2}x+1$ AD: $y=-2x+1$

CD: $y=\frac{1}{2}x+6$ BC: $y=-2x+10$

a. Clasifiquen el cuadrilátero
b. Hallen las coordenadas de los vértices del cuadrilátero.

17. Si se sabe que las igualdades $ax+by=10$ y $bx+ay=11$, se cumplen cuando $x=1$ e $y=2$. ¿Qué números son a y b?

18. La recta R_1 contiene al punto $(-1\,;-3)$ e interseca al eje de abscisas en 3. La recta R_2 interseca al eje de ordenadas en 0 y es perpendicular a R_1. Representen gráficamente la situación y hallen las coordenadas del punto de intersección entre ambas rectas.

19. Dos números cuya diferencia es 9 cumplen además que la suma entre el duplo del primero y el triple del segundo es 24. ¿Cuáles son esos números?

20. En una heladería, María compró tres cucuruchos y dos vasitos y gastó \$ 3,35. En la misma heladería, Juan compró dos cucuruchos y tres vasitos del mismo tipo, y gastó \$ 3,15. ¿Cuál es el precio de un cucurucho y de un vasito?

21. Carlos cargó en el tanque de su auto 4 litros de nafta súper y 1 litro de nafta común, y gastó \$ 24,5. En otra ocasión, había cargado 4 litros de nafta común y 1 litro de nafta súper, y había gastado \$ 23. ¿Cuánto cuesta el litro de nafta de cada tipo?

22. El promedio de dos números es 7 y el triple de la diferencia entre ellos es 18. ¿Cuáles son los números?

23. Resuelvan los siguientes sistemas de ecuaciones.

a. $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y=12 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 2x+4y=-4 \\ x=3y-2 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} x-2y=1 \\ 5x-y=1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \\ 3x-2y=6 \end{cases}$ **e.** $\begin{cases} 2x+y=13 \\ 3x+2y=21 \end{cases}$

24. Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+\frac{y}{2}=-2 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$$

a. Hallen la pendiente y la ordenada al origen de cada una de las rectas asociadas a las ecuaciones del sistema.
b. Representen gráficamente la situación y hallen las coordenadas del punto de intersección entre ambas rectas.

25. Dentro de tres años, un perro tendrá la edad que su dueño tenía hace cuatro años. Si en este momento la suma de sus edades es 15, ¿qué edades tienen actualmente?

26. Propongan, en cada caso, un sistema de dos ecuaciones con dos variables que cumpla las condiciones que se indican.
a. El conjunto solución es $S=\{(2\,;-3)\}$.
b. El sistema es incompatible.
c. El conjunto solución es $S=\{(x\,;-2x-1),\, x\in\mathbb{R}\}$
d. El sistema es compatible indeterminado y el par $(3\,;\,4)$ es una de las soluciones.

27. a. Inventen un problema cuya formulación algebraica sea el planteo del sistema

$$\begin{cases} y=50x+100 \\ y=20x+160 \end{cases}$$

b. Resuelvan el problema planteado.

28. Consideren el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} -x+5y=9 \\ \ldots x+10y=\ldots \end{cases}$$

Completen las líneas punteadas con un número de manera que el sistema dado resulte como se indica en cada uno de los casos siguientes.
a. compatible determinado con solución $(-1\,;\,2)$.
b. incompatible.

29. Resuelvan analítica y gráficamente los siguientes sistemas de tres ecuaciones con dos variables:

a. $\begin{cases} y+3x=1 \\ 2x-2y=6 \\ x-y=3 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} y=-4x-1 \\ x=-2y \\ 4y+2x=1 \end{cases}$

Biblioteca Pública Municipal
Gral. MANUEL BELGRANO
Calle 222 - N°. 1493

AUTOEVALUACIÓN

Marquen las opciones que consideren correctas en cada caso.

1. Consideren el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x=-\dfrac{y}{2}+1 \end{cases}$

- **a** (1 ; 1) es solución.
- **b** (0 ; 2) es la única solución.
- **c** (1 ; –2) es solución.
- **d** Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

2. El sistema: $\begin{cases} k^2x+3y=k \\ 3x+y=1 \end{cases}$ es:

- **a** Compatible indeterminado cuando $k=-3$.
- **b** Incompatible cuando $k=3$.
- **c** Compatible determinado cuando $|k|\neq 3$.
- **d** Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

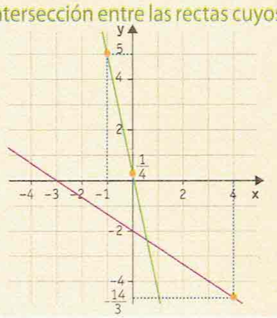
3. Las edades de Juan y José suman 52 años, pero hace 8 años sumaban 36. Dos ecuaciones que representan este problema son:

- **a** $\begin{cases} x+y=52 \\ x+y+16=36 \end{cases}$
- **b** $\begin{cases} x+y=36 \\ x+y-16=52 \end{cases}$
- **c** $\begin{cases} x+y=52 \\ x+y-16=36 \end{cases}$
- **d** $\begin{cases} x+y=52 \\ x+y-16=52 \end{cases}$

4. La ecuación $5x-2y=1$ forma un sistema incompatible con la ecuación:

- **a** $y=\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}$
- **b** $2y=5x$
- **c** $2x-5y=1$
- **d** Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

5. El punto de intersección entre las rectas cuyos gráficos se muestran es:



- **a** $\left(\frac{27}{49};-\frac{116}{49}\right)$
- **b** (1 ; –2)
- **c** $\left(1;-\frac{9}{2}\right)$
- **d** Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

6. El sistema $\begin{cases} y=kx-1 \\ y=(k-2)x+3 \end{cases}$ es compatible determinado:

- **a** Para cualquier k.
- **b** Para ningún k.
- **c** Solo para $k=2$.
- **d** Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

7. Consideren el sistema $\begin{cases} y-3x=0 \\ 2y+ax=1 \end{cases}$

- **a** Si $a=-6$ el sistema es compatible determinado.
- **b** Si $a=-6$ el sistema es incompatible.
- **c** Si $a=0$ el sistema es compatible indeterminado.
- **d** Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

8. Consideren el sistema $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$

- **a** El conjunto solución es $S=\{(-1;3)\}$.
- **b** El par (–1 ; 3) es una solución.
- **c** El sistema es incompatible.
- **d** Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

9. Dado un sistema de ecuaciones lineales se verifica que:

- **a** Dos rectas perpendiculares forman un sistema compatible determinado.
- **b** Dos rectas con igual pendiente forman un sistema compatible indeterminado.
- **c** Una recta horizontal y una recta vertical forman un sistema compatible determinado.
- **d** Tres rectas nunca se cruzan en un punto.
- **e** Tres rectas solo se cruzan en un punto si dos de ellas son perpendiculares.
- **f** Tres rectas nunca se cruzan en un punto si dos de ellas son paralelas.

CONTENIDOS

- Las relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo
- Seno y coseno de un ángulo
- Tangente de un ángulo
- Relación entre la tangente y la pendiente de una recta
- Relaciones trigonométricas para cualquier triángulo,
- Teoremas del seno y del coseno

Existen varias situaciones que para ser resueltas requieren del establecimiento de relaciones entre las medidas de los lados de un triángulo y las medidas de sus ángulos. Hasta ahora en un triángulo se han estudiado las relaciones que se establecen entre sus lados. Y también las que se establecen entre sus ángulos.

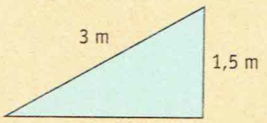
En este capítulo se tratarán las relaciones que se pueden establecer entre las medidas de los lados y los ángulos de un triángulo. La rama de la matemática que se encarga de estudiar estas relaciones es la trigonometría, palabra que significa medida de triángulos.

6 TRIGONOMETRÍA

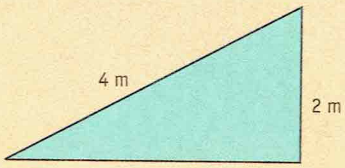
Problema 1

Para el taller de diseño industrial los alumnos tienen que realizar una rampa. Decidieron elegir aquella propuesta en la cual la rampa tiene mayor ángulo de inclinación con el suelo.

Dos grupos propusieron los siguientes diseños:



Diseño 1



Diseño 2

¿En cuál de los dos diseños el ángulo de inclinación de la rampa con el suelo es mayor?

Si se realiza el cociente entre la altura de la rampa y su longitud, se obtiene en ambos casos

$$\frac{1,5}{3} = 0,5 \qquad \text{y} \qquad \frac{2}{4} = 0,5$$

Por lo tanto, $\frac{1,5}{3} = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{1,5}{2} = \frac{3}{4}$

Los lados de los esquemas que representan las rampas y sus alturas son proporcionales.

Como los triángulos son rectángulos se puede calcular la medida del otro lado usando el Teorema de Pitágoras:

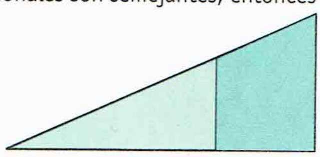
Diseño 1	$3^2 = 1{,}5^2 + x^2 \quad x = \frac{3}{2}\sqrt{3}$
Diseño 2	$4^2 = 2^2 + y^2 \quad y = \sqrt{12}$

Estos lados también guardan la misma proporción:

$$\frac{3}{2}\sqrt{3} : \sqrt{12} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{12}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Por lo tanto si en dos triángulos sus tres lados son proporcionales son semejantes, entonces los ángulos son iguales.

De este modo se pueden superponer los triángulos coincidiendo los ángulos de inclinación con el suelo pues sus ángulos son congruentes.

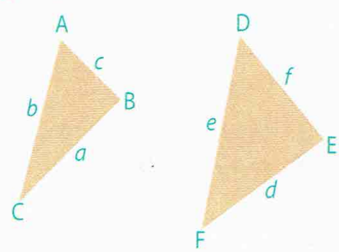


¿Cualquier rampa que tenga el mismo cociente entre la altura y la longitud tendrá el mismo ángulo de inclinación con el suelo?

Si se procede como se hizo previamente, se obtiene que los triángulos son semejantes. Por lo tanto el ángulo que forman las rampas con el suelo es el mismo.

Dos triángulos son semejantes cuando sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos respectivamente congruentes.

Si $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{DEF}$ son triángulos semejantes.



Entonces

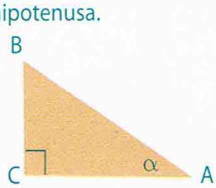
$$\hat{A} = \hat{D};\ \hat{B} = \hat{E};\ \hat{C} = \hat{F}$$
$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

Usualmente se utilizan para designar ángulos las letras griegas. Algunas de ellas son:

- α alfa
- β beta
- δ delta
- γ gamma
- φ fi

Siempre que se construyan triángulos rectángulos en los que α sea uno de sus ángulos interiores no recto se obtienen **triángulos semejantes.**

En un triángulo rectángulo, a los lados que están incluidos en las semirrectas que forman el ángulo recto se los llama catetos. Y al lado que se encuentra opuesto al ángulo de 90º se lo llama hipotenusa.



$\overline{AB}$ es la hipotenusa

$\overline{CB}$ es el cateto opuesto al ángulo α

$\overline{CA}$ es el cateto adyacente al ángulo α

Para todo ángulo α con $0º < \alpha < 90º$ se define:

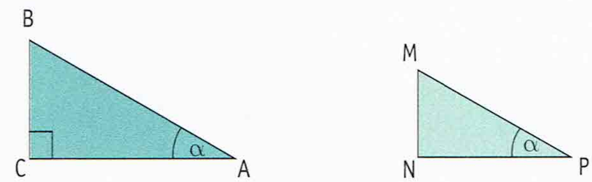
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Como el seno y el coseno de un ángulo son el resultado de un cociente de longitudes no tienen unidades y resultan ser números reales.

Las relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo

Si se tienen dos triángulos rectángulos ABC y PMN con un ángulo agudo igual



Como ambos triángulos tienen $\hat{C} = \hat{N}$, por ser rectos y $\hat{P} = \hat{A} = \alpha$, son triángulos semejantes, por lo tanto sus lados correspondientes son proporcionales, entonces:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{PN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{MN}}$$

Si se toma una proporción $\quad \dfrac{\overline{AB}}{\overline{MP}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{MN}} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{MN}}{\overline{MP}}$

Es decir que si se toman dos lados de un triángulo rectángulo, la razón entre ellos es la misma que si se toman los lados correspondientes del otro triángulo rectángulo con un ángulo agudo igual. Por lo tanto, los cocientes entre dos lados de un triángulo rectángulo solo dependen del ángulo agudo α .

Si se utiliza la terminología propia para triángulos rectángulos se tiene que:

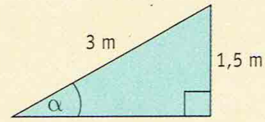
$$\frac{\text{cateto opuesto } a\ \alpha \text{ (en } \overset{\Delta}{ABC})}{\text{hipotenusa (en } \overset{\Delta}{ABC})} = \frac{\text{cateto opuesto } a\ \alpha \text{ (en } \overset{\Delta}{MNP})}{\text{hipotenusa (en } \overset{\Delta}{MNP})}$$

De este modo resulta que **cualquiera** que sea el triángulo rectángulo con un ángulo α, este cociente es **siempre igual**. Por este motivo, tiene un nombre específico: **seno de α** y se escribe **sen α**.

Del mismo modo, el cociente entre el cateto adyacente al ángulo α y la hipotenusa resulta ser siempre igual dependiendo solo del ángulo α.

Esta razón se llama **coseno de α** y se escribe **cos α**.

Por ejemplo, si se tiene uno de los triángulos rectángulos del problema 1, el seno del ángulo α es igual a $\frac{1,5}{3} = 0,5$ y se escribe sen $\alpha = 0,5$.

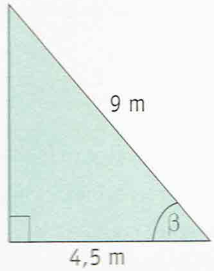


¿Cómo calcular el valor de un ángulo?

Problema 2

Un grupo de alumnos del taller de diseño industrial propusieron hacer una rampa de 9 metros con una base de 4,5 metros. Si la construyen de esta manera, ¿tendrá un ángulo de inclinación mayor que una rampa de 6 metros y 3 metros de altura?

Para la primera rampa se puede dibujar el siguiente esquema:

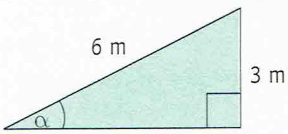


donde β es el ángulo que forma la rampa con el suelo.

En este triángulo rectángulo solo se cuenta con las medidas de la hipotenusa y del cateto adyacente al ángulo β, por lo tanto se puede calcular el coseno de β

$$\cos \beta = \frac{4{,}5}{9} = 0{,}5$$

Para la segunda rampa se puede hacer el siguiente esquema



Aquí α es el ángulo que forma la rampa con el suelo.

Como en este caso se tiene la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo y la medida del cateto opuesto a α se puede calcular el seno de α

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

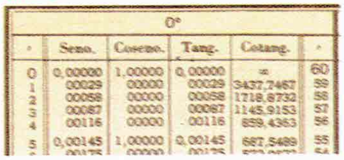
Con la información del seno de α y del coseno de β, *¿alcanza para saber cuál es el mayor ángulo de inclinación? ¿α será igual a β? ¿Cuánto mide α y cuánto mide β?*

Para calcular el valor de α se puede proceder con la calculadora del siguiente modo: Sabiendo que sen α = 0,5, tecleando 2NDF o INV o SHIFT y sin luego 0,5 = aparecerá en el visor el número 30, lo que significa que α mide 30°. En algunas calculadoras hay que oprimir 0,5 y luego las teclas INV y sin.

Con el mismo procedimiento pero con las teclas 2NDF o INV o SHIFT y cos se obtiene el ángulo β. $\cos \beta = 0{,}5 \Rightarrow \beta = 60°$

Por lo tanto la primera rampa tiene mayor inclinación que la segunda.

Antes de la invención de la calculadora científica, la única forma de conocer la medida de un ángulo a partir del valor del seno o el coseno era a través de tablas.



0°					
′	Seno.	Coseno.	Tang.	Cotang.	′
0	0,00000	1,00000	0,00000	∞	60
1	00029	00000	00029	3437,7467	59
2	00058	00000	00058	1718,8732	58
3	00087	00000	00087	1145,9153	57
4	00116	00000	00116	859,4363	56
5	0,00145	1,00000	0,00145	687,5489	55

Hoy en las calculadoras científicas se encuentran los valores de los senos y cosenos de los ángulos medidos en grados. No se necesita recurrir más a esas tablas.

En la calculadora verán las teclas sin y cos.

Para calcular el seno de un ángulo de 38° deberán teclear sin 38 = así aparecerá en el visor el número 0,615661475, lo que significa que el seno de 38° es aproximadamente igual a 0,61566.

En algunas calculadoras científicas, el orden en que se deben presionar las teclas para realizar los cálculos es distinto. Se deberá consultar el manual de la calculadora para estar seguros de su manejo.

1. Calculen los siguientes valores utilizando la calculadora científica:

sen 45° cos 36° sen 5° cos 89° sen 1°

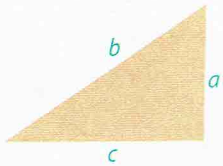
2. Busquen con la calculadora para qué valor de α entre 0° y 90° se cumple cada una de las siguientes igualdades:

cos α = 0,0001 sen α = 0,89 sen α = 0,32 cos α = 0,99999

ACTIVIDADES

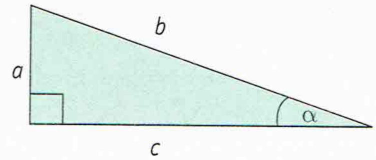
Relaciones entre el seno y el coseno de un ángulo agudo

Teorema de Pitágoras: "En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"
Si se tiene un triángulo rectángulo con las medidas de sus lados



por el Teorema de Pitágoras se obtiene la siguiente igualdad
$b^2 = a^2 + c^2$

Si en un triángulo rectángulo se llama α a uno de sus ángulos agudos



La relación entre las medidas de los lados con el ángulo α permite establecer las siguientes igualdades:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{a}{b} \qquad \cos\alpha = \frac{c}{b}$$

Pero estas no son las únicas relaciones que hay en un triángulo rectángulo.

Si se aplica el Teorema de Pitágoras también se puede establecer una relación entre los lados del triángulo rectángulo, $b^2 = a^2 + c^2$

¿Es posible relacionar estas tres igualdades planteadas?

Usualmente $(\text{sen}\ \alpha)^2$ se escribe como $\text{sen}^2\ \alpha$.

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad b \cdot \text{sen}\ \alpha = a$$

$$\cos\alpha = \frac{c}{b} \quad \Rightarrow \quad b \cdot \cos\alpha = c$$

Si se reemplazan a y c en $b^2 = a^2 + c^2$, se obtiene

$$b^2 = (b\ \text{sen}\ \alpha)^2 + (b \cos\alpha)^2$$

Por lo tanto:

$$b^2 = b^2\ \text{sen}^2\ \alpha + b^2 \cos^2\alpha$$

Si se saca factor común b^2

$$b^2 = b^2\ (\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\alpha)$$

Al dividir ambos miembros por b^2, que no es cero pues b es la hipotenusa del triángulo, queda:

$$1 = \text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\alpha$$

Esta igualdad se verifica para **cualquier valor de** α entre 0° y 90°.

Identidad Pitagórica: Si $0° < \alpha < 90°$ se tiene $\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\alpha = 1$

Es decir, que para cualquier valor de α siempre se puede relacionar el valor del sen α y del cos α.

A esta igualdad se la llama **identidad pitagórica.**

ACTIVIDADES

3. Un pueblo está atravesado por un río. Para pedir la construcción de un puente, los pobladores quieren medir el ancho de ese río. Pero como es demasiado ancho y no cuentan con los instrumentos necesarios no pueden hacerlo. Los chicos de la escuela del pueblo que están estudiando trigonometría pensaron en utilizar sus conocimientos para ayudar a la comunidad. Ellos afirman que, utilizando el gran árbol que se encuentra sobre una de las orillas del río es posible medir el ancho del mismo. Dicen que para eso solo necesitan conocer la altura del árbol y parándose uno de ellos en la orilla opuesta del río, frente al árbol y mirando hacia la punta del árbol medir el ángulo de visión. De este modo, utilizando las razones trigonométricas que aprendieron en clase podrán dar un cálculo aproximado del ancho del río.
¿Consideran que es posible lo que dicen estos alumnos? ¿Por qué? ¿En qué conocimientos de trigonometría se están apoyando para hacer estas afirmaciones? Si les dicen que el árbol mide 4,7 metros y que el ángulo de visión es de 10°, ¿cuál será el ancho del río?

Relaciones entre seno y coseno de ángulos complementarios

Problema 3

Si se conoce el valor del *sen 36°*, ¿es posible conocer el valor del *cos 54°*?

En principio, parece que no hay ninguna relación entre *sen 36°* y *cos 54°*.

Si se construye un triángulo rectángulo con un ángulo $\alpha = 36°$, como la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180°, para calcular la medida del otro ángulo, β:

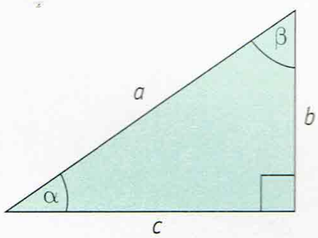
$$\alpha + \beta + 90° = 180° \Rightarrow \beta = 180° - 90° - \alpha \Rightarrow$$
$$\beta = 90° - 36° \Rightarrow \beta = 54°$$

Se llaman ángulos complementarios a los ángulos cuyas amplitudes suman 90º.
Por ejemplo, dos ángulos que miden 36º y 54º son complementarios.

Por lo tanto α y β son ángulos complementarios.

Esto sucede en cualquier triángulo rectángulo, sus ángulos agudos son complementarios.

$\alpha + \beta = 90°$



Si se plantea el sen α y el cos β se obtiene:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto } a\ \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos \beta = \frac{\text{cateto adyacente } a\ \beta}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

Luego:

$$\text{sen } \alpha = \cos \beta$$

Pues el cateto opuesto al ángulo α resulta ser el cateto adyacente al ángulo β.

Del mismo modo

$$\cos \alpha = \frac{c}{a} \text{ y } \text{sen } \beta = \frac{c}{a}$$

Se tiene entonces que:

$$\text{sen } \alpha = \cos \beta$$
$$\cos \beta = \text{sen } \alpha$$

Si $0º < \alpha < 90º$, $90º - \alpha$ es el complementario de α y por lo tanto se verifican las siguientes relaciones:

$$\text{sen } \alpha = \cos (90º - \alpha)$$
$$\cos \alpha = \text{sen } (90º - \alpha)$$

Si en el problema $\alpha = 36°$ y $\beta = 54°$, como $36° + 54° = 90°$ se obtienen las siguientes igualdades:

$$\text{sen } 36° = \cos 54°$$
$$\cos 36° = \text{sen } 54°$$

4. Sabiendo que cos 38º es aproximadamente 0,78 calculen:

sen 38º = cos 52º = sen 52º =

5. Sabiendo que sen 47º es aproximadamente 0,73 calculen:

cos 47º = sen 43º = cos 43º =

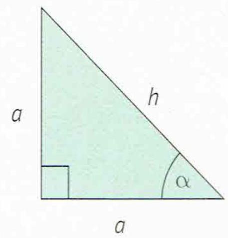
ACTIVIDADES

Cálculo de seno y coseno para ángulos de 30°, 45° y 60°

Problema 4

Calcular el valor del sen 45° sin utilizar la calculadora.

Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 45°, también el otro ángulo mide 45°. Si en un triángulo se tiene dos ángulos iguales entonces se oponen a dichos ángulos, lados iguales. Con lo cual el triángulo es isósceles.



Se puede afirmar que

$$\text{sen } 45° = \frac{a}{h}$$

y también

$$\cos 45° = \frac{a}{h}$$

Por lo tanto el sen 45° y el cos 45° resultan ser iguales.

Si se aplica la identidad pitagórica, se obtiene

$$\text{sen}^2 45° + \cos^2 45° = 1$$

pero como sen 45° = cos 45°,

$\text{sen}^2 45° + \text{sen}^2 45° = 1$	Se reemplaza cos 45° por sen 45°.
$2 \cdot \text{sen}^2 45° = 1$	Se opera.
$\text{sen}^2 45° = \frac{1}{2}$	Se despeja.
$\lvert\text{sen } 45°\rvert = \sqrt{\frac{1}{2}}$	Se extrae raíz cuadrada en ambos miembros.

De este modo se obtiene:

$$\lvert\text{sen } 45°\rvert = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por lo tanto $\lvert \text{sen } 45°\rvert = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Como el sen 45° es positivo por que es el cociente ente las longitudes de dos lados, que son números positivos, se tiene que:

$$\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{y también} \quad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

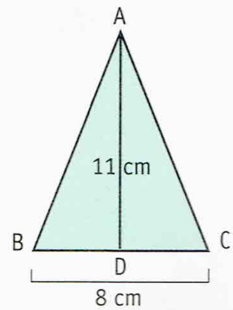
Tangente de un ángulo

Otra relación entre lados y ángulos de un triángulo es la que se presenta a partir del siguiente problema:

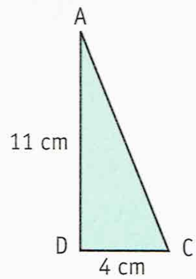
Problema 6

Si el triángulo ABC es isósceles con $\overline{AB} = \overline{AC}$ y con base igual a 8 cm y altura igual a 11 cm, ¿cuál es la medida de sus ángulos?

Para resolver este problema se puede hacer el siguiente esquema donde $\overline{AD}$ es la altura del triángulo:



Como el triángulo es isósceles, la altura divide a la base en partes iguales, quedando determinados dos triángulos rectángulos congruentes.



Para todo ángulo α con $0° \leq \alpha \leq 90°$ se define:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Para hallar, por ejemplo, el ángulo C con los datos con que se cuentan, no alcanza con recurrir al seno y al coseno. En este caso se necesita una relación entre el cateto adyacente al ángulo C y su cateto opuesto.

El cociente entre el cateto opuesto de un ángulo α y su cateto adyacente se llama **tangente** de α y se escribe **tg** α o **tan** α.

Por lo tanto $\qquad \text{tg}\ C = \frac{11}{4} = 2{,}75$

Si se procede como cuando se calculó el ángulo teniendo el valor del seno o del coseno; del mismo modo se usa la calculadora y se teclea (según la calculadora que se usa):

2NDF o INV o SHIFT tan 2,75 =

Aparece en el visor 70,0168934; lo que significa que el ángulo C mide 70,017° aproximadamente.

ACTIVIDADES

11. A cierta hora del día, los rayos del sol forman con la horizontal un ángulo de 30°. Si un árbol tiene una altura de 2,5 m, ¿cuál será la longitud de su sombra a esa hora del día?

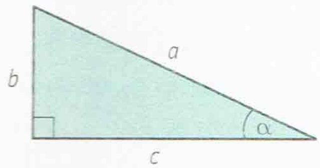
Relación entre coseno, seno y tangente de un ángulo

Es posible establecer relaciones entre seno, coseno y tangente de un ángulo, tal como se propone en el siguiente problema:

Problema 7

Sin utilizar calculadora científica, calcular la *tg* 30°.

Primero se analiza el siguiente triángulo con ángulo agudo



Entonces

$\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{a}$	$a \cdot \text{sen}\,\alpha = b$
$\cos\alpha = \frac{c}{a}$	$a \cdot \cos\alpha = c$
$\text{tg}\,\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow$	$\text{tg}\,\alpha = \frac{a \cdot \text{sen}\,\alpha}{a \cdot \cos\alpha} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$

Se obtiene para cualquier ángulo agudo α:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

En el problema se debe calcular tg 30°, entonces:

$$\text{tg}\,30° = \frac{\text{sen}\,30°}{\cos 30°}$$

Si α es un ángulo entre 0° y 90° $\Rightarrow tg\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$

Si se usa lo que se calculó en el problema 5 se tiene que sen $\alpha = \frac{1}{2}$, falta calcular el cos 30°. Por la relación pitagórica:

$$\text{sen}^2\,30° + \cos^2 30° = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 30° = 1$$

$$\left(\frac{1}{4}\right) + \cos^2 30° = 1 \Rightarrow \cos^2 30° = \frac{3}{4}$$

Nuevamente como el coseno es el cociente entre dos medidas su valor es positivo, por lo tanto:

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Con lo cual

$$\text{tg}\,30° = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

12. ¿Qué ángulo forma con la horizontal un cable de 6 m que se tensa desde el extremo de un poste de 4 m de altura hasta el piso?

13. Se tiene tirantes de madera de 4 m de longitud que se usarán para armar el esqueleto de un techo a dos aguas de una casa. La altura del techo no debe superar 1,5 m. ¿Bajo qué ángulo de inclinación se deberán colocar los tirantes de madera?

14. A una distancia de 1,5 metros de una pared se apoya una escalera de 3,5 metros de largo. ¿Cuál es el ángulo de inclinación que forma la escalera con el suelo?

15. Calculen:

a. tg 45° **b.** tg 60°

Valores posibles del seno y el coseno de un ángulo

Problema 8

Hallar, si existe, el ángulo α cuyo coseno es igual a 2.

Se sabe que en un triángulo rectángulo en el cual α es uno de los ángulos agudos, el coseno de α es igual al cociente entre el cateto adyacente de α y la hipotenusa.

Como la medida de la hipotenusa siempre será mayor que la medida de los catetos, entonces el cociente

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

debe dar un número menor a 1, porque se divide un número por otro mayor que él, por lo tanto no existe un ángulo α cuyo coseno sea 2.

Si en la calculadora se quiere obtener el ángulo cuyo coseno es 2, se hace:
INV COS 2 =
y se obtiene "error".
Esto significa que no hay ningún ángulo cuyo coseno sea 2.

Problema 9

¿Qué sucede con el ángulo de un triángulo rectángulo si su coseno toma valores cada vez más próximos a 1?

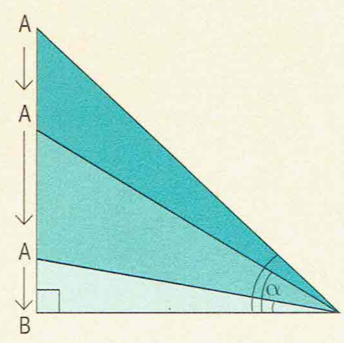
En un triángulo rectángulo con un ángulo agudo igual a α:

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente } a\ \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

Si este cociente resulta un número próximo a 1 significa que el cateto adyacente y la hipotenusa van a tener longitudes casi iguales, *¿qué sucede con el ángulo?*

Si $0° < \alpha < 90°$ entonces el seno y el coseno de α varían de 0 a 1.

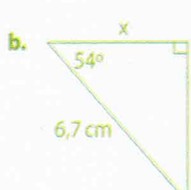
Decir que el cateto adyacente va siendo igual a la hipotenusa es como ir "aplastando" el triángulo, es decir, que el cateto opuesto $\overline{AB}$ se hace cada vez más chico y de esta forma el ángulo también se aplastará, se parece a "no tener ángulo".
En ese caso **$\cos 0° = 1$**



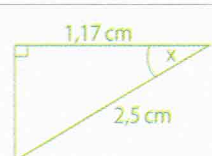
16. En cada triángulo rectángulo, determinen la medida indicada con la letra x.

a.

b.



c.



d.

17. a. Calculen sen 0°, cos 90°, sen 90°, tg 0° y tg 90°.

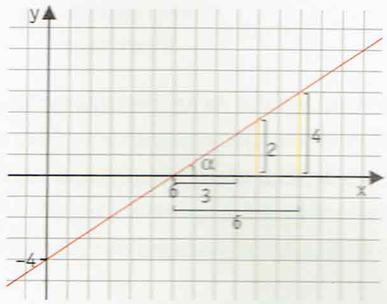
b. ¿Entre que valores se encuentra la tangente de un ángulo?

Relación entre la tangente y la pendiente de una recta

Problema 10

Dada la función lineal $f(x) = \frac{2}{3}x - 4$. ¿Cuál es el ángulo de inclinación que forma el gráfico de la función con el eje x en dirección a la derecha?

Como la pendiente de esta recta es $\frac{2}{3}$, significa que por cada 3 unidades que avanza x, y sube 2 unidades. Por lo tanto a partir del cero de la función, que está en el punto (6 ; 0), se pueden construir distintos triángulos rectángulos .



Todos los triángulos son semejantes, porque para llegar a otro punto de la recta los catetos serán proporcionales a 3 y 2. Esto indica:

$$\text{tg } \alpha = \frac{2}{3}$$

Si se utiliza la calculadora se obtiene, aproximadamente

$$\alpha = 33{,}6900675° = 33° \ 41' \ 24''$$

De este modo se pone de manifiesto que la **pendiente** es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje x.

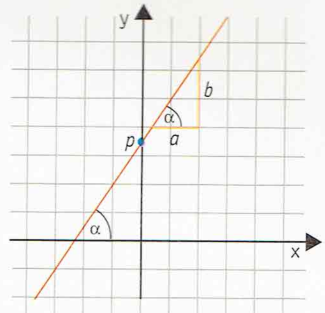
En el capítulo de función lineal se analizó que la pendiente de una recta se interpreta como:

$$m = \frac{b}{a} \quad \frac{\rightarrow \text{variación de las ordenadas}}{\rightarrow \text{variación de las abscisas}}$$

entre dos puntos cualquiera.

Si $y = mx + b$, con $m > 0$, es la ecuación de una recta creciente; entonces el ángulo, α, que forma la recta con el eje de las abscisas hacia la derecha verifica:

$$\text{tg } \alpha = m$$



18. Para cada caso, hallen la ecuación de la recta.

19. a. Completen sin usar calculadora, la siguiente tabla:

α	0°	30°	45°	60°	90°
sen α					
cos α					
tg α					

b. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $(5 ; \frac{4}{3})$ y $(\frac{1}{3} ; -7)$?

Razones trigonométricas para cualquier ángulo

Hasta el momento se trabajó con razones trigonométricas para ángulos comprendidos entre 0° y 90°.

Problema 11

¿Es posible calcular el seno, el coseno y la tangente de cualquier ángulo mayor a 90°?

Ya se conoce que para un ángulo α entre 0° y 90°

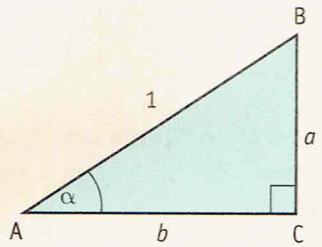
$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto } a\ \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

donde α es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.

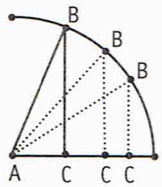
En particular es posible construir un triangulo rectángulo donde la hipotenusa mida 1.

En ese caso resulta

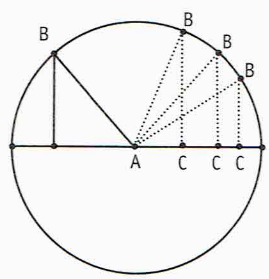
$$\text{sen}\ \alpha = a$$
$$\cos \alpha = b$$



Si se cambian las medidas de los catetos, sin cambiar la medida de la hipotenusa y dejando fijo el punto A, es posible construir todos los triángulos rectángulos con hipotenusa igual a 1 para valores de α entre 0° y 90° siempre midiendo el ángulo α entre $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$. El punto B determina, de este modo, un cuarto de circunferencia con centro en A y radio 1.



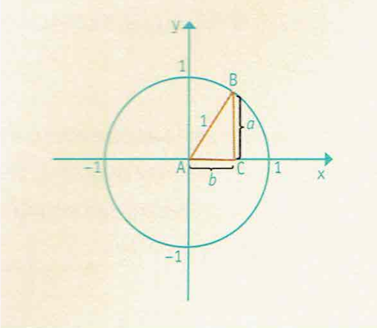
Si se continúa rotando el lado AB se comienzan a obtener ángulos mayores a 90°



El punto C no forma parte necesariamente de la circunferencia pero se va modificando a medida que se mueve B, en cambio todos los puntos de la circunferencia quedan determinados al girar el punto B.

Esta circunferencia se puede representar utilizando los ejes coordenados. Si se toma el punto A como la intersección de los ejes, es decir el punto (0 ; 0), se tiene una circunferencia de radio 1 con centro (0 ; 0) que pasa por los puntos (1 ; 0) ; (0 ; 1) ; (-1 ; 0) y (0 ; -1).

En el primer cuadrante de esta circunferencia quedan determinados todos los triángulos rectángulos con hipotenusa igual a 1. El vértice B se relaciona con un punto del plano que se determina con dos coordenadas, una para el eje *x*, por ejemplo *b* y una para el eje *y* por ejemplo *a*.



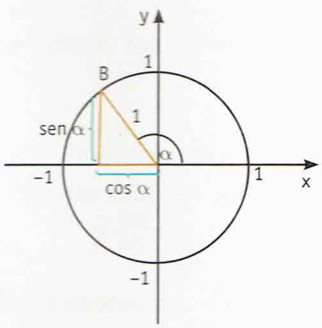
De este modo, para un valor de α (ángulo comprendido entre $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$) se tiene un único triángulo rectángulo con hipotenusa igual a 1 que está representado en el primer cuadrante de esta circunferencia. Ese triángulo rectángulo determina con su vértice B un único punto del plano sobre la circunferencia con coordenadas (*b* ; *a*). Si se replantean las relaciones trigonométricas, se obtiene.

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{1} = a$$

$$\cos\ \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{1} = b$$

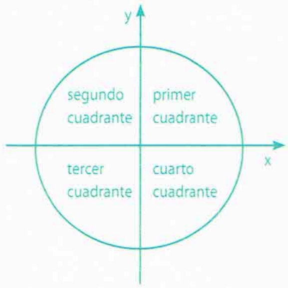
Si se continúa girando el lado $\overline{AB}$, se pasa hacia el segundo cuadrante, en el cual el ángulo α resulta ser mayor que 90°. Para estos ángulos es posible extender la relación anterior, es decir, el seno de ese ángulo mayor a 90° es el valor de la coordenada del eje *y* para el punto B de la circunferencia. El coseno de ese ángulo es el valor de la coordenada del eje *x* del punto B.

De este modo se determina el valor del seno y del coseno para cualquier ángulo.



La circunferencia de radio 1 y centro (0 ; 0) recibe el nombre de **circunferencia trigonométrica**.

La circunferencia trigonométrica queda dividida por los ejes coordenados en cuatro sectores, cada uno de esos sectores se llaman cuadrantes. Los cuadrantes se numeran en sentido contrario a las agujas del reloj.



20. Completen el siguiente cuadro.

α	130°	270°	206°	302°	345°
sen α					
cos α					
tg α					

Análisis del signo del seno, coseno y tangente de un ángulo

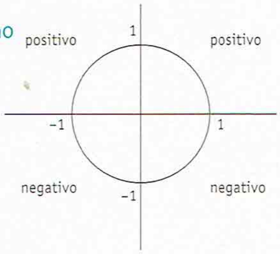
Problema 12

¿Dónde están ubicados en la circunferencia trigonométrica los ángulos cuyo seno es negativo? ¿Y cuyo coseno también es negativo?

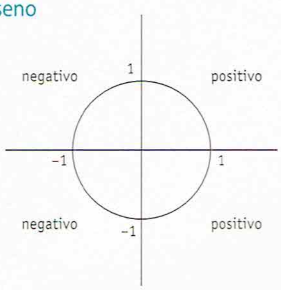
Si se señala en la circunferencia trigonométrica diferentes ángulos, se puede observar que para que el seno sea negativo, el ángulo tiene que estar en el tercer o cuarto cuadrante, para que la coordenada *y* sea negativa. Por lo tanto si el ángulo toma valores entre 180° y 360° el seno será negativo.

Signo del seno, del coseno y de la tangente.

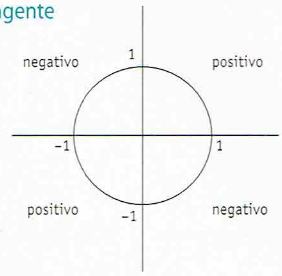
Seno

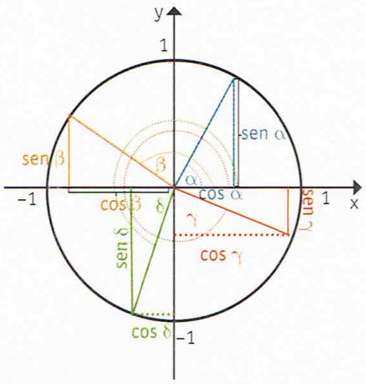


Coseno



Tangente





Se puede ver, además, que los ángulos que tienen coseno negativo son los que se encuentran en el segundo o tercer cuadrante, para que la coordenada x sea negativa. Los ángulos comprendidos entre 90° y 270°, tienen coseno negativo.

Para que un ángulo tenga seno negativo y coseno también negativo es necesario que el ángulo se encuentre solamente en el tercer cuadrante, para que ambas coordenadas sean negativas. Por lo tanto si el ángulo está comprendido entre 180° y 270°, tanto el seno como el coseno serán negativos con lo cual la tangente es positiva.

Problema 13

¿Qué signo tiene la tangente de un ángulo que se encuentra en el cuarto cuadrante?

Si un ángulo se encuentra en el cuarto cuadrante, el seno de ese ángulo es negativo, mientras que el coseno es positivo. Si se analiza la relación

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha}$$

se deduce que la tangente del ángulo es el cociente entre un número negativo y otro número positivo, por lo tanto el resultado es un número negativo. Es decir si un ángulo está en el cuarto cuadrante la tangente es negativa.

ACTIVIDADES

21. La tangente de un ángulo es igual a 1,4825, ¿cuánto mide ese ángulo si se sabe que se encuentra en el tercer cuadrante?

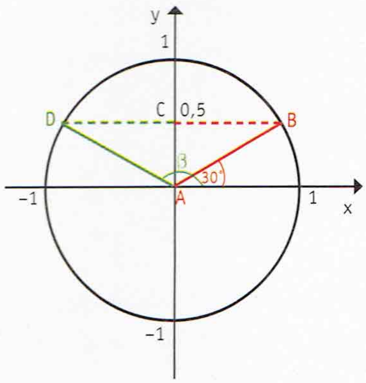
22. El ángulo θ se encuentra en el cuarto cuadrante y $\cos\theta = 0{,}618$. ¿Cuál es su amplitud?

23. Si se conoce que el seno de un ángulo es igual a 0,64278 y el ángulo se encuentra entre 90° y 180°, ¿cuánto mide ese ángulo?

Problema 14

¿Cuál o cuáles son los ángulos cuyo seno es igual a 0,5? ¿Y cuyo seno es igual a –0,5?

Si se utiliza la calculadora científica se obtiene que el ángulo de 30° tiene seno igual a 0,5. Si se observa la circunferencia trigonométrica:



En la circunferencia trigonométrica se encuentran todos los ángulos comprendidos entre 0° y 360°.

se puede reconocer que existe, además, un ángulo mayor de 90° que también tiene seno igual a 0,5. Pero ese valor no lo da la calculadora, entonces,

¿cómo se puede saber cuál es el otro ángulo de la circunferencia trigonométrica que también tiene seno 0,5?

Los triángulos BCA y DCA tienen:

el lado $\overline{CA}$ común a ambos.

$B\hat{C}A = D\hat{C}A$ por ser ángulos rectos

$\overline{AB} = \overline{AD} = 1$ porque son radios de la circunferencia que miden 1.

Como los triángulos son rectángulos, con dos lados iguales, el tercero también coincidirá.

Por lo tanto los triángulos BCA y DCA son congruentes.

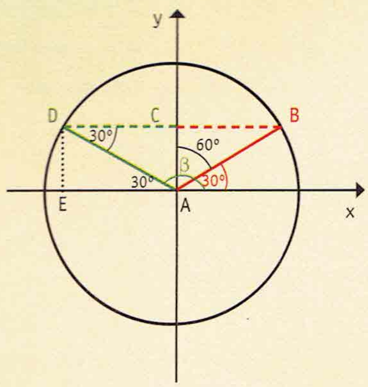
Luego las ordenadas de los puntos B y D coinciden. Pero la ordenada de B es el valor del seno de 30°, o sea 0,5. D = (x ; 0,5)

Falta averiguar la medida de β.

Los triángulos ADE y DAC son congruentes porque son rectángulos y tienen los tres lados iguales, entonces el ángulo DAE mide 30°.

Se puede observar que

$\beta = 180° - D\hat{A}E = 180° - 30° = 150°$.



Para un ángulo β resulta sen β = sen (180° - β)

Luego el ángulo β resulta ser igual al ángulo llano menos 30°, es decir, 150°.

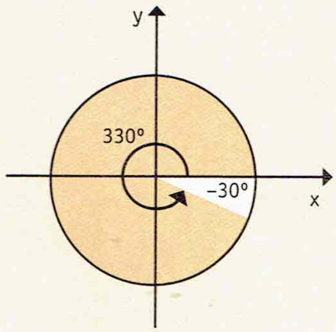
Entonces

$$\textbf{sen } (180° - 30°) = \textbf{sen } 30°$$

La *altura de un triángulo* es el segmento perpendicular a un lado que pasa por el vértice opuesto.

Si se quiere calcular el valor del ángulo cuyo seno es igual a $-0,5$, en la calculadora aparece el valor -30, *¿qué significa un ángulo de $-30°$?*

La medida de los ángulos se cuenta desde el eje positivo de las abscisas en el sentido contrario a las agujas del reloj. Tener un ángulo negativo significa que se cambia el sentido, con lo cual, el ángulo $-30°$ resulta ser equivalente a $360° - 30° = 330°$.



Muchas veces en Matemática, y en particular en Geometría, se utiliza una representación general de un objeto. Por ejemplo, el trabajo que se realiza en esta parte del capítulo con este triángulo en particular, perfectamente podría realizarse con **cualquier** triángulo, es decir, que este triángulo, esta representación, se está utilizando a modo general.
Se puede realizar el **mismo** razonamiento que se hace para este triángulo con cualquier triangulo.

El otro ángulo, cuyo seno es $-0,5$; estará en el tercer cuadrante. Con un análisis similar al anterior se tiene que el ángulo debe medir $180° -(-30°) = 180° + 30° = 210°$. Se tiene que los ángulos cuyo seno es $-0,5$ son $330°$ y $210°$.

Relaciones entre los lados y los ángulos en cualquier triángulo

Teorema del seno

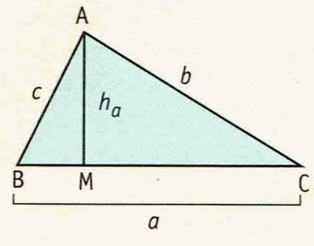
En el comienzo de este capítulo se establecieron relaciones entre las medidas de los lados y los ángulos de triángulos rectángulos.

Más adelante, se calcularon los senos, cosenos y tangentes para ángulos que miden entre $90°$ y $360°$.

¿Se podrá relacionar los lados y los ángulos de un triangulo cualquiera, donde por ejemplo haya ángulos obtusos?

Para contestar esta pregunta es posible realizar un análisis de la situación tomando como modelo el triángulo ABC como sigue

h_a es la altura correspondiente al lado a y lo corta en el punto M. Esta altura divide al triángulo ABC en dos triángulos rectángulos, el $\overset{\Delta}{ABM}$ y el $\overset{\Delta}{ACM}$.



En $\overset{\Delta}{ACM}$	$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{h_a}{b}$	$b \cdot \text{sen}\,\hat{C} = h_a$
En $\overset{\Delta}{ABM}$	$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{h_a}{c}$	$c \cdot \text{sen}\,\hat{B} = h_a$
Si se igualan las expresiones de h_a		$b \cdot \text{sen}\,\hat{C} = c \cdot \text{sen}\,\hat{B}$

Luego:

$$\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

Si se realiza un análisis similar al anterior pero trazando la altura correspondiente al lado b, se obtiene que:

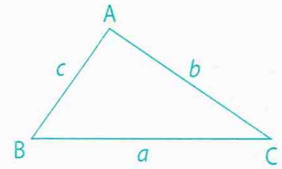
$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

Si se tomó en cuenta la otra relación obtenida en el cuadro se tiene lo que se llama el **Teorema del seno:**

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

Teorema del seno

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$



Teorema del coseno

Hasta aquí se han establecido algunas relaciones entre los lados y los senos de los ángulos de este triángulo. A continuación se estudiarán otras relaciones.

Por ejemplo, en los triángulos rectángulos: AMC y AMB, de la página anterior, si se aplica el Teorema de Pitágoras se establecen las siguientes igualdades:

En $\overset{\Delta}{ACM}$	$h_a{}^2 + \overline{MC}^2 = b^2$ (1)	
En $\overset{\Delta}{AMB}$	$h_a{}^2 + \overline{BM}^2 = c^2$	$h_a{}^2 = c^2 - \overline{BM}^2$ (2)

Cuadrado de un binomio

Si a y b son dos números, se tiene la siguiente igualdad

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Como $\overline{MC} = a - \overline{BM}$, reeplazando en (1):

$$h_a{}^2 + \overline{MC}^2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad h_a{}^2 + (a - \overline{BM})^2 = b^2$$

$h_a{}^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot \overline{BM} + \overline{BM}^2 = b^2$	Se resuelve el cuadrado del binomio.
$c^2 - \overline{BM}^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot \overline{BM} + \overline{BM}^2 = b^2$	Se reemplaza utilizando (2) del cuadro anterior.
$c^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot \overline{BM} = b^2$	Se cancela $\overline{BM}^2$.

Teorema del coseno

$c^2 + a^2 - 2a\,c \cos B = b^2$

$b^2 + a^2 - 2a\,b \cos C = c^2$

$c^2 + b^2 - 2b\,c \cos A = a^2$

Si se observa el triángulo BAM se puede plantear:

$$\cos \hat{B} = \frac{\overline{BM}}{c} \Rightarrow \overline{BM} = c \cdot \cos \hat{B}$$

Al reemplazar esta condición en la última expresión que se obtuvo en el cuadro, se consigue lo que se llama el **Teorema del coseno:**

$$c^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot c \,.\, \cos \hat{B} = b^2$$

ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN

24. Sabiendo que sen $x = 0{,}83$ y $0° \leq x \leq 90°$, calculen

a. cos x **b.** sen $(90° - x)$

c. cos $(90° - x)$ **d.** ¿Cuánto vale x?

25. Consideren $0° \leq x \leq 90°$. Sabiendo que sen $x = 0{,}857$

a. Calculen cos x, sen $(90° - x)$, cos $(90° - x)$.

b. Con la calculadora, hallen el valor de x.

26. Si el $\cos(3x) = 0{,}068$ y $0 \leq x \leq 90°$ utilizando calculadora, calculen:

a. El valor de x. **b.** El valor de cos x.

27. Si $\text{sen}(45° + x) = 0{,}78$, calculen el valor de x, sabiendo que $0 \leq x \leq 90°$.

28. Si $\text{sen}(37° + x) = 1$ y $0 \leq x \leq 90°$, ¿cuánto vale x? ¿Por qué?

29. Si $\text{sen}\, 37° + \text{sen}\, x = 1$, ¿cuánto vale x?

30. a. Si se sabe que el $\text{sen}(2x) = 0{,}25$, ¿cuánto vale x, si $0 \leq x \leq 90°$?

b. Calculen el sen x.

31. Sabiendo que $\text{tg}\, x = 4$ y $0 \leq x \leq 90°$, sin utilizar la calculadora calculen:

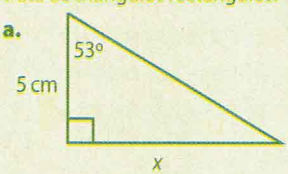
a. sen x **b.** cos x

c. sen $(90° - x)$ **d.** $\cos(90° - x)$

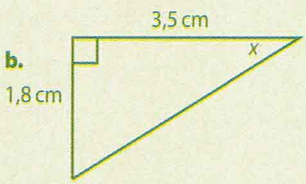
32. Un poste de electricidad de 4 metros de altura se debe sujetar con unos tensores desde su extremo superior hasta el piso. Los expertos recomiendan que el ángulo de inclinación de los tensores con el suelo debe ser de 50°. ¿Cuál debe ser la longitud de los tensores?

33. En cada caso calculen el valor indicado con la letra x sabiendo que se trata de triángulos rectángulos.

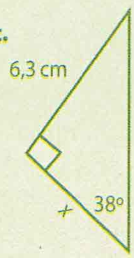
a.



b.



c.



34. Hallen la ecuación de la recta que forma un ángulo de 68° con el eje horizontal y pasa por el punto (–1 ; 3).

35. A. Calculen, en cada caso, los posibles valores de θ sabiendo que θ está comprendido entre 0° y 360°.

a. $2\,\text{sen}\,\theta = -0{,}951$ **b.** $\cos(\theta + 60°) = 0{,}85$

c. $\cos\theta + 0{,}5 = 0{,}85$ **d.** $\text{tg}\,\theta + 45 = 137$

e. $3\,\text{tg}\theta = 38$ **f.** $\frac{\text{sen}(3\theta)}{4} = 0{,}215$

g. $3\,\text{sen}\,\theta = 9$ **h.** $\text{sen}^2\theta = \frac{1}{2}$

i. $\cos^2\theta + \cos\theta = 0$ **j.** $\cos^2\theta + \text{sen}\,\theta = 1$

B. ¿Cuáles serían los valores de θ si estuviese comprendido entre 360° y 720°, en cada una de las ecuaciones anteriores?

36. ¿Es cierto que, para cualquier valor de x resulta $\text{sen}(2x) = 2\,\text{sen}\,x$? Justifiquen su respuesta.

37. ¿Cuál es la ecuación de la recta que tiene ordenada al origen igual a 6 y que forma un ángulo de 150° con la recta y = 6?

38. Calculen el área y el perímetro de un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 8 cm y el ángulo desigual mide 70°.

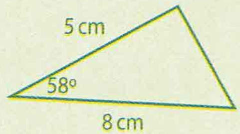
39. Si la sombra de una señora a cierta hora del día es la mitad de su altura, ¿qué ángulo forman los rayos del sol con el horizonte?

40. Se puede construir un rectángulo conociendo un lado y la diagonal. ¿Cuál es el valor del ángulo que forma la diagonal con el lado del cuadrado?

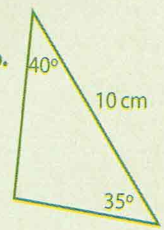
41. Se quiere apoyar contra la pared una escalera de 4,5 m de largo. Además el ángulo que forma la escalera con la pared no debe ser menor que 30°. ¿A qué distancia de la pared se debería ubicar la escalera?

42. Con los datos dados, en cada caso determinar el perímetro y el área de los triángulos.

a.



b.



43. En el triángulo ABC, ¿es cierto que el área del triángulo es igual a Área $\overset{\Delta}{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC} \cdot \text{sen}\, C$?

44. Calculen los posibles valores de β sabiendo que β está comprendido entre 0° y 360°.

a. $3 + \text{sen}\left(\frac{1}{5} \cdot \beta\right) = 3{,}51$ **b.** $\frac{2}{9} \cdot \text{sen}(\beta - 30°) = -\frac{1}{10}$

c. $\cos\beta - 5 = -\frac{27}{5}$ **d.** $\text{tg}(\beta - 15°) = -10$

AUTOEVALUACIÓN

1. Sabiendo que α está comprendido entre 270° y 460° señalen la opción correcta en cada caso:

A. $\frac{1}{3}\cos(\alpha - 60°) = \frac{1}{4}$

- **a** $\alpha \approx 378{,}6°$
- **b** $\alpha \approx 101{,}6°$
- **c** $\alpha \approx 318{,}6°$
- **d** $\alpha \approx 41{,}4°$
- **e** No existe valor de α.

B. $\text{sen}(\alpha + 30°) = -0{,}766$

- **a** $\alpha \approx 230°$
- **b** $\alpha \approx 280°$
- **c** $\alpha \approx 200°$
- **d** $\alpha \approx 310°$
- **e** No existe valor de α.

2. La recta que pasa por los puntos $(\frac{7}{2}; 10)$ y $(-\frac{3}{2}; -3)$ tiene un ángulo de inclinación igual a:

- **a** 35,53°
- **b** 68,96°
- **c** 215,53°
- **d** 324,46°

3. Sabiendo que $\text{tg}\, x = -2$ y además $90° \leq x \leq 270°$, sin utilizar calculadora señalen la respuesta correcta en cada caso.

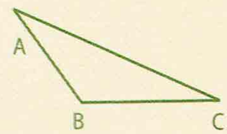
A. cos x es igual a :

- **a** 0,447
- **b** 1,414
- **c** −0,447
- **d** −1

B. sen (180°-x) es igual a

- **a** 0,894
- **b** −0,894
- **c** 0,8001
- **d** −0,8001

4. Se conocen los siguientes datos del triángulo ABC



$\hat{B} = 98°$

$\overline{AB} = 7{,}5$ cm

$\hat{C} = 46°$

Se puede saber que el lado AC mide aproximadamente

- **a** 5,44 cm
- **b** −1,51 cm
- **c** 10,32 cm
- **d** 1,51 cm
- **e** Con estos datos no es posible saber cuánto mide el lado AC.

5. Sabiendo que $\text{sen}\, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y que $90° < x < 180°$ marquen, sin usar la calculadora, las opciones correctas.

A. $\cos x =$

- **a** $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- **b** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
- **c** -1
- **d** 1

B. $\text{tg}\, x =$

- **a** -1
- **b** 1
- **c** $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- **d** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

7 FUNCIONES CUADRÁTICAS

CONTENIDOS

- Funciones cuadráticas
- Desplazamientos del gráfico de la función $f(x) = x^2$
- Características de las parábolas: eje de simetría, vértice. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Ceros de una función cuadrática. Conjuntos de positividad y negatividad. Forma canónica de la función cuadrática
- La fórmula $f(x) = a \cdot x^2$

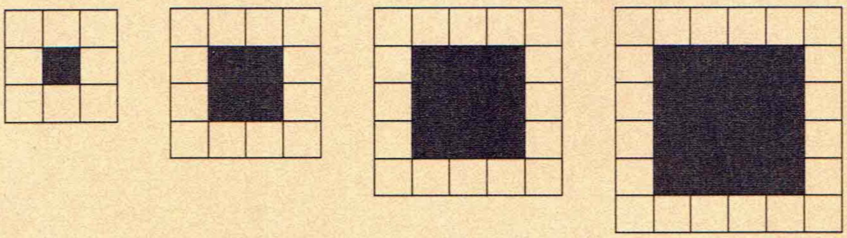
Al estudiar y representar en gráficos cartesianos fenómenos como la trayectoria que describe un cuerpo cuando es lanzado en forma oblicua o la relación entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido para un móvil que se desplaza con aceleración constante, aparecen gráficas compuestas por puntos que no se encuentran alineados y pertenecen a una curva llamada parábola.

En las fórmulas de las funciones que resultan adecuadas para representar estas situaciones, aparece la variable elevada al cuadrado. A estas funciones se las llama funciones cuadráticas.

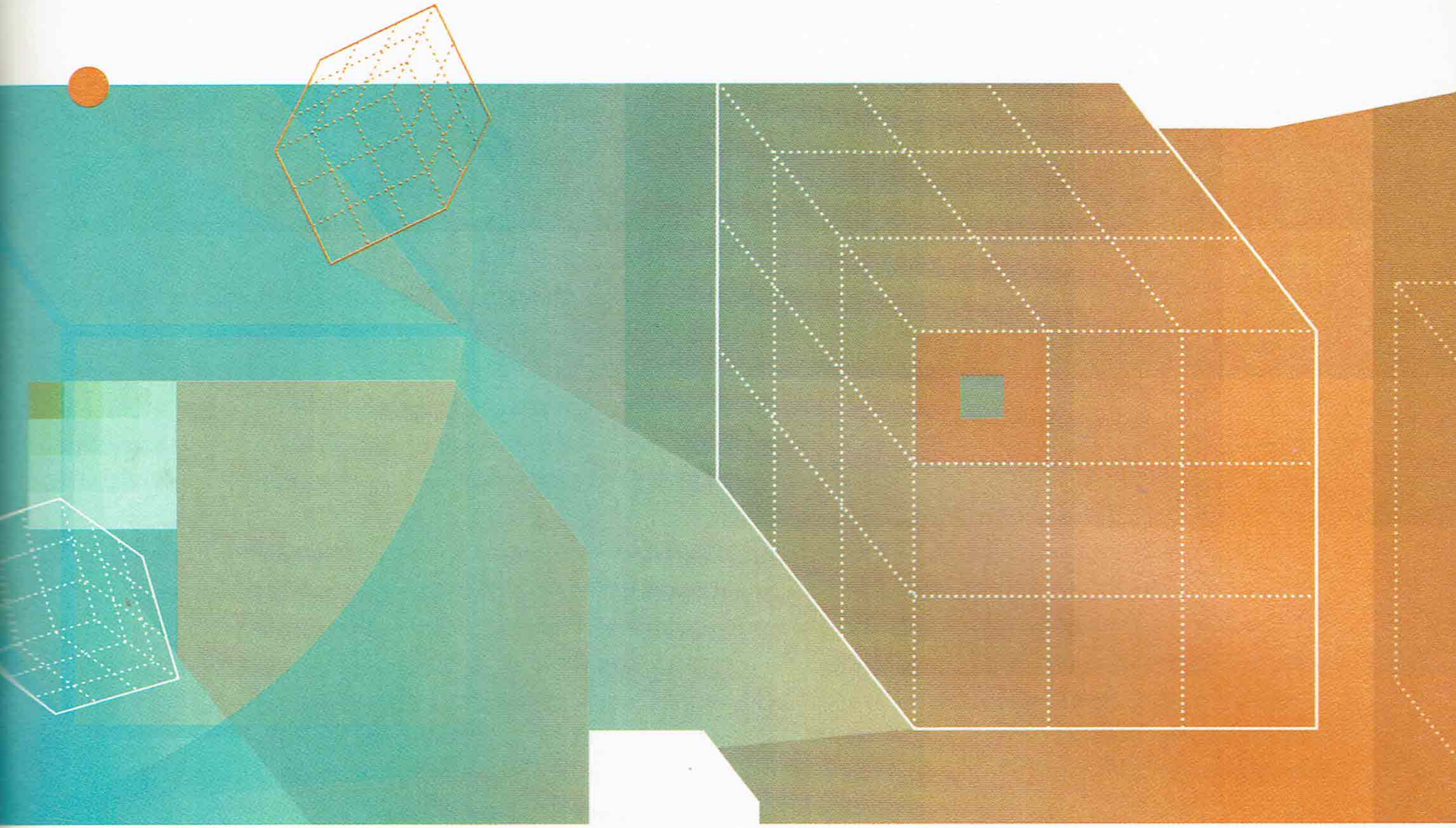
Problema 1

Los cuadrados que se ven a continuación fueron construidos y pintados respetando la siguiente regularidad.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4



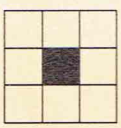
Determinar una fórmula que permita calcular la cantidad de cuadraditos pintados en cada figura, en función de la cantidad de cuadraditos que tiene en cada lado el cuadrado mayor.



Para resolver este problema, es conveniente comenzar por analizar algunos ejemplos. Es útil tener en cuenta que, en cada figura, los cuadraditos pintados también conforman un cuadrado.

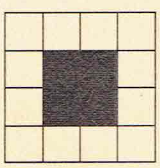
Al trabajar con cada ejemplo se puede ver:

Figura 1
1 cuadradito pintado



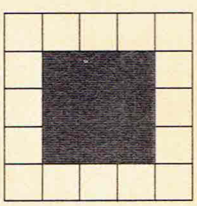
El cuadrado mayor de la **Figura 1** tiene 3 cuadraditos de lado y el cuadrado pintado tiene 1 cuadradito de lado. De las tres filas dos no se pintan como así también, de las tres columnas dos no se pintan. Solo queda pintado un cuadradito. Se obtiene: *Cuadraditos pintados* $= (3 - 2)\cdot(3 - 2) = 1$

Figura 2
4 cuadraditos pintados



Para la **Figura 2**, como tiene 4 cuadraditos de lado, al sacar dos filas y dos columnas que no forman la parte pintada, se obtiene:
Cuadraditos pintados $= (4 - 2)\cdot(4 - 2) = 4$

Figura 3
9 cuadraditos pintados



La **Figura 3** tiene 5 cuadraditos por lado, al sacar las dos filas y las dos columnas sin pintar, se obtiene:
Cuadraditos pintados $= (5 - 2)\cdot(5 - 2) = 9$

En la **Figura 4**, como el cuadrado mayor tiene 6 cuadraditos por lado, al restar las dos filas y las dos columnas por lado, que no forman el centro sombreado, se obtiene

$$\textit{Cuadraditos pintados} = (6 - 2)\cdot(6 - 2) = 16$$

Por lo tanto, para un cuadrado grande formado por n cuadraditos de lado, la fórmula buscada es:

$$\textit{Cantidad de cuadraditos pintados} = (n - 2)\cdot(n - 2)$$

Esta fórmula también puede ser expresada $(n - 2)\cdot(n - 2) = (n - 2)^2$

Se puede pensar la fórmula de otra manera. Si el cuadrado mayor tiene n cuadraditos por lado, la cantidad total de cuadraditos es n^2. Como todo el borde está sin sombrear hay que restar esos cuadraditos para obtener los sombreados.

Cada lado tiene n cuadraditos, entonces en los 4 lados hay $4n$ cuadraditos no sombreados. De esta manera se cuentan cuántos hay en los cuatro lados, pero los de las 4 puntas se cuentan dos veces, entonces los cuadraditos del borde son: $4n - 4$.

Finalmente, los cuadraditos sombreados se calculan haciendo la resta del total de cuadraditos del cuadrado mayor y los cuadraditos del borde:

$$\textit{Cantidad de cuadraditos sombreados} = n^2 - (4n - 4)$$

Esta es otra expresión que permite calcular los cuadraditos sombreados. Como ambas expresiones cuentan lo mismo (cuadraditos sombreados de un cuadrado de n cuadraditos por lado) son equivalentes.

En la resolución de éste problema aparecieron dos fórmulas que permiten contar la cantidad de cuadraditos sombreados en función de la cantidad de cuadraditos por lado. Como cada una de las fórmulas responde a una manera correcta de contar los cuadraditos pintados, deberían ser iguales. Si se desarrolla la primera:
$(n - 2)^2 = (n - 2)\cdot(n - 2) =$
$= n^2 - 2n - 2n + 4 =$
$= n^2 - 4n + 4 =$
$= n^2 - (4n - 4)$
se obtiene la segunda.
Esto demuestra que, partiendo de una de las fórmulas, se ha podido construir la otra por medio de transformaciones apelando a diversas propiedades. Son dos fórmulas distintas, pero equivalentes.

Las expresiones en las que, en su forma más simplificada, sólo hay potencias naturales de la variable independiente, aparece dicha variable elevada a la potencia 2, y esta es la máxima potencia, se denominan **expresiones cuadráticas**.

Ejemplo 1:

$$x^2 + 2x + 2$$

es una expresión cuadrática porque está escrita en la forma más simple y las potencias de x son 1 y 2.

Ejemplo 2:

$$(x + 2)^2 - x^2$$

Para saber si es una expresión cuadrática hay que llevarla a la expresión más simplificada:

$$(x + 2)^2 - x^2 = (x + 2)\ (x + 2) - x^2 = x^2 + 2x + 2x + 4 - x^2 = 4x + 4$$

No es una expresión cuadrática porque la potencia mayor de x es 1.

Funciones cuadráticas

Una función cuya fórmula es una expresión cuadrática se llama **función cuadrática.**
Un ejemplo de función cuadrática es la siguiente: $f(x) = x^2$.

En esta expresión, como la variable independiente está elevada el cuadrado, los valores de la imagen son siempre positivos o cero. Por lo tanto la imagen de esta función es el intervalo $[0 ; +\infty)$.

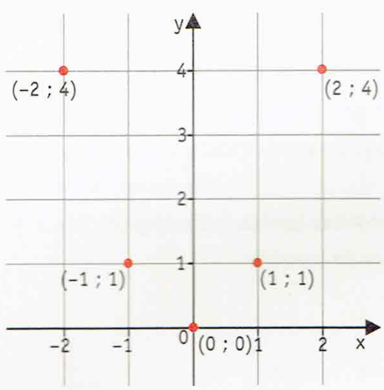
Los valores de x pueden reemplazarse por cualquier número real debido a que la operación, elevar al cuadrado, puede hacerse con cualquier número. Por lo tanto el dominio de esta función es el conjunto de los números reales: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Si $x = 1$ entonces $f(1) = 1^2$, $f(1) = 1$
Si $x = -1$ entonces $f(-1) = (-1)^2$, $f(-1) = 1$
Si se reemplaza x por distintos valores se puede armar una tabla, por ejemplo:

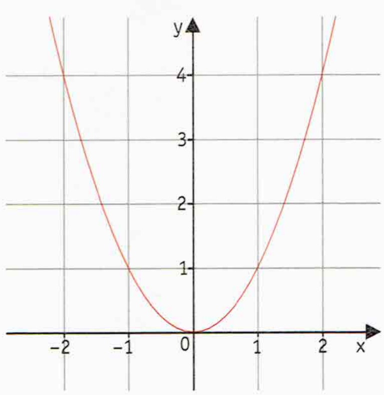
x	0	1	−1	2	−2
$f(x)$	0	1	1	4	4

Los valores de la tabla se obtienen al calcular:
$f(0) = 0$
$f(1) = 1$
$f(-1) = 1$
$f(-2) = 4$
$f(2) = 4$

Al trasladar los datos de la tabla a un sistema de ejes cartesianos se obtienen los puntos:



Como el $Dom(f) = \mathbb{R}$, si se toman más puntos podrá verse que forman una curva y al unirlos queda el siguiente gráfico:



Los gráficos de las funciones cuadráticas son curvas que se llaman **parábolas**.

El gráfico de $f(x) = x^2$ tiene dos ramas, una decreciente y otra creciente. El punto de unión de las dos ramas se llama ***vértice***. En el gráfico anterior el vértice es el punto V = (0 ; 0).

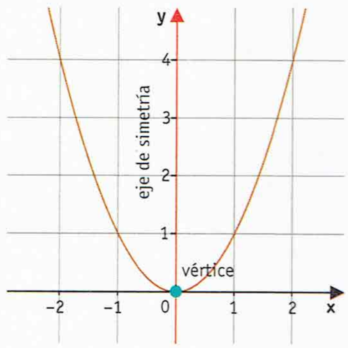
Si se traza una recta vertical que pase por el vértice y se dobla la hoja siguiendo esta recta, las dos ramas de la parábola se superponen. Esto es provocado por el hecho de que x^2 siempre da como resultado un número positivo y la imagen de un número cualquiera coincide con la de su opuesto. Es decir que para cualquier valor de a se verifica que

$$a^2 = (-a)^2$$

La recta vertical que pasa por el vértice es el ***eje de simetría*** de la parábola.

En este caso, el eje de simetría de la función graficada, $f(x) = x^2$, es la recta vertical $x = 0$, o sea el *eje y*.

Otra forma de presentar la función que se está analizando es la siguiente:
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^2$
Esta escritura indica que se está estableciendo una relación entre conjuntos de números reales, donde la imagen de cada número real se obtiene al elevarlo al cuadrado.

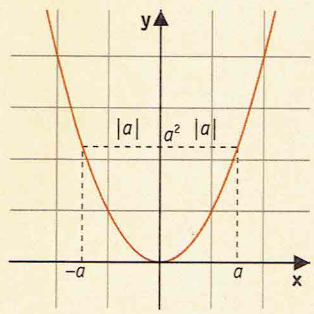


Debido a esta simetría, salvo el vértice, todos los puntos de la parábola tienen un punto simétrico.

Los puntos (−1 ; 1) y (1 ; 1) son simétricos porque la distancia de estos puntos a la recta $x = 0$ es una unidad.

También son simétricos los puntos (−2 ; 4) y (2 ; 4) ya que ambos puntos están a 2 unidades de distancia del eje de simetría.

Como los números simétricos respecto a la recta $x = 0$ son los opuestos, los puntos $(a\,;\,a^2)$ y $(-a\,;\,a^2)$ son simétricos.
Esto ocurre porque la distancia al eje y de cada uno de ellos, es de $|a|$ unidades.



1. En la función de proporcionalidad directa se verifica que al doble de un cierto valor de x le corresponde el doble en su imagen. Expliquen por qué esto no ocurre en la función $f(x)=x^2$.

2. Se ha dibujado un cuadrado y ahora se quiere ampliar el dibujo de manera que cada uno de los lados mida el triple de lo que medía antes. ¿El área del nuevo cuadrado también se triplica?

Desplazamientos del gráfico de la función $f(x) = x^2$

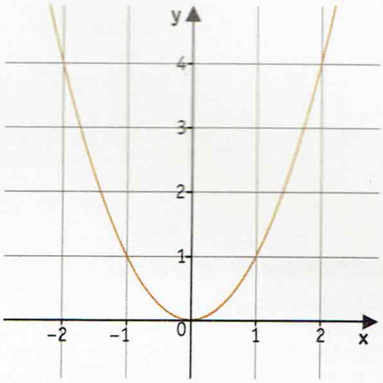
Diferentes modificaciones de la fórmula de la función $f(x) = x^2$, producen cambios en su gráfico. Se estudiarán esos cambios en las situaciones que se presentan a continuación.

Problema 2

a. ¿Qué modificaciones hay que hacerle a la fórmula de $f(x) = x^2$ para que su gráfico, tenga el vértice en el punto $(0 ; 2)$?

b. ¿Qué modificaciones hay que hacerle a la fórmula de $f(x) = x^2$ para que su gráfico, tenga el vértice en el punto $(0 ; -4)$?

El gráfico de $f(x) = x^2$ ya es conocido:

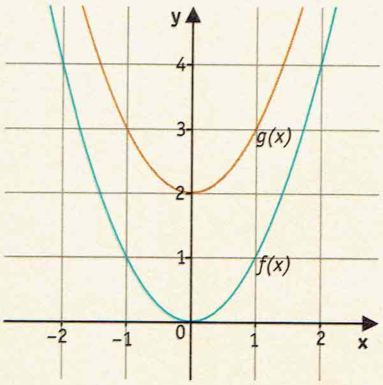


a. Para que la parábola se desplace y el vértice sea $(0 ; 2)$, es necesario que cada punto de la gráfica suba dos lugares. Es decir, cada imagen debe ser incrementada en 2 unidades.

Si la imagen de x es x^2, ahora tiene que ser $x^2 + 2$.

Queda una nueva función $g(x) = x^2 + 2$ que está 2 unidades arriba del gráfico de $f(x) = x^2$.

Si se realizan ambos gráficos, el de $f(x)$ y el de $g(x)$ en un mismo sistema de ejes cartesianos se obtiene:



Cuando la función se desplaza verticalmente, el eje de simetría no varía, pero sí se desplaza el vértice de la función. El vértice de $f(x) = x^2 + k$ es $V = (0 ; k)$ y el eje de simetría es la recta $x = 0$.

Puede decirse que: $g(x) = f(x) + 2$.

Al modificar la fórmula de $f(x)$ se produjo un desplazamiento de su gráfico dos unidades hacia arriba.

Para resolver la parte **b.** se necesita que las imágenes de $f(x) = x^2$ se desplacen 4 unidades hacia abajo. Por lo tanto, la función que cumple con estas condiciones será $h(x) = x^2 - 4$.

Al graficar ambas funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos se observa que el gráfico de la función $f(x)$ se desplazó 4 unidades hacia abajo.

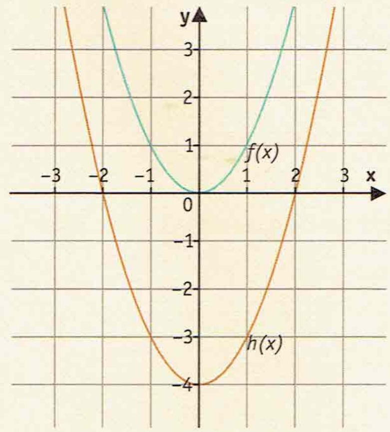
¿Cómo se observa la diferencia entre $f(x)$ y $h(x)$ para un cierto valor de x?

$f(5) = 5^2 = 25$

$h(5) = 5^2 - 4 = 21$

Efectivamente, la imagen de 5 es 4 unidades menos en $h(x)$ que en $f(x)$.

x	$h(x)$
0	−4
1	−3
−1	−3
2	0
−2	0
3	5
−3	5



En el siguiente cuadro se presenta una comparación entre las funciones

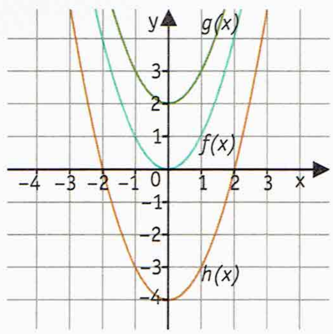
$$f(x) = x^2 \; ; \; g(x) = x^2 + 2 \; ; \; h(x) = x^2 - 4$$

Al trasladar k unidades en forma vertical la función $f(x) = x^2$ se obtiene una nueva función, $g(x) = x^2 + k$.

Si k es positivo, la función se desplaza k unidades hacia arriba.

Si k es negativo, la función se desplaza $|k|$ unidades hacia abajo.

Función	Eje de simetría	Vértice	Conjunto imagen
$f(x) = x^2$	$x = 0$	$(0\,;0)$	$[0\,;+\infty)$
$g(x) = x^2 + 2$	$x = 0$	$(0\,;2)$	$[2\,;+\infty)$
$h(x) = x^2 - 4$	$x = 0$	$(0\,;-4)$	$[-4\,;+\infty)$



ACTIVIDADES

3. A partir del gráfico de $f(x) = x^2$, realicen el gráfico de las siguientes funciones: $m(x) = x^2 + 3$ y $n(x) = x^2 - (-4)$.

4. ¿Cuál es la mínima cantidad de pares ordenados que es necesario graficar para poder dibujar una parábola?

5. ¿Es posible que una parábola con vértice en el punto $V = (0\,; -3)$, pase por los puntos $(4\,;2)$ y $(-4\,;2)$? Justifiquen la respuesta.

6. ¿Cuál es el simétrico del punto $(3\,;8)$ en una parábola cuyo vértice es el punto $(0\,; -1)$? ¿Cuál es la fórmula de esta parábola?

7. Una función cuadrática $g(x)$ tiene por imagen al conjunto $[-2\,;+\infty)$. Hallen la fórmula de $g(x)$.

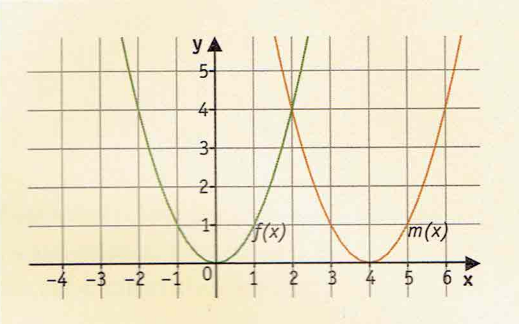
Otros desplazamientos de $f(x) = x^2$

Problema 3

Analizar las diferencias entre el gráfico de la función $f(x) = x^2$ y los gráficos de las funciones $m(x) = (x - 4)^2$ y $t(x) = (x + 3)^2$.

Si se realizan los gráficos de $f(x)$ y $m(x)$ en un mismo sistema de ejes cartesianos, se observa lo siguiente:

x	$m(x)$
0	16
1	9
–1	25
1	9
–2	36
3	1



Si $m(x)= (x-4)^2$ entonces:

$m(0)= (0-4)^2 = 16$

$m(1)= (1-4)^2 = 9$

$m(-1)= (-1-4)^2 = 25$

$m(2)= (2-4)^2 = 4$

$m(-2)= (-2-4)^2 = 36$

$m(3)= (3-4)^2 = 1$

Se observa que el gráfico de $m(x)= (x-4)^2$ está desplazado 4 unidades hacia la derecha con respecto al de $f(x)= x^2$. El vértice y el eje de simetría también se desplazaron 4 unidades hacia la derecha.

¿Por qué se desplaza el gráfico hacia la derecha 4 unidades?

Para $f(x) = x^2$ se verifica que $f(0)= 0^2 = 0$.

¿Para qué valores de x se obtiene en m(x) esa misma imagen, o sea, para qué valores de x, m(x) = 0?

$m(x) = 0$ significa resolver la ecuación $(x-4)^2 = 0$.

Como 0 es el único número que elevado al cuadrado da 0, debe cumplirse que $x - 4 = 0$, es decir $x = 4$. O sea:

$$\left.\begin{array}{r} f(0) = 0 \\ m(4) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) = m(4)$$

Ocurre lo mismo para cualquier otro punto.

Por ejemplo: $f(1)= 1^2 =1$ y $f(-1)= (-1)^2 = 1$.

¿Qué valor debe tomar x ahora en m(x) para que el valor de su imagen sea 1?

Hay que resolver la ecuación $(x-4)^2 = 1$.

Los números que elevados al cuadrado dan como resultado 1 son 1 y –1, por lo tanto:

$$x - 4 = 1 \qquad \text{o} \qquad x - 4 = -1$$

Si se resuelve cada ecuación queda: $x = 5$ o $x = 3$

O sea que

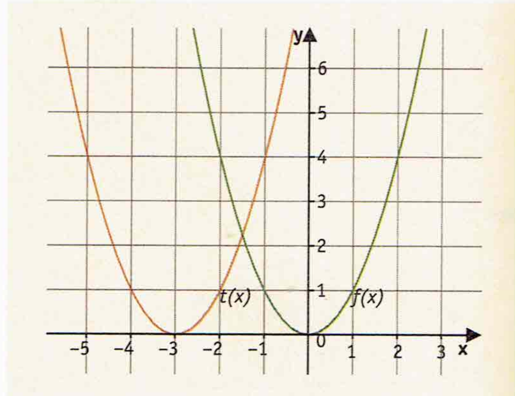
$$\left.\begin{array}{r} f(1)= 1 \\ m(5)= 1 \end{array}\right\} f(1)= m(5) \qquad \left.\begin{array}{r} f(-1) = 1 \\ m(3) = 1 \end{array}\right\} f(-1) = m(3)$$

Esto permite afirmar que, para que la imagen sea la misma, los valores de x deben ser 4 unidades mayores.

Para comparar los gráficos de $f(x) = x^2$ y $t(x) = (x + 3)^2$, se representan en el mismo sistema de ejes coordenados.

Al trasladar q unidades en forma horizontal la función $f(x)=x^2$ se obtiene una nueva función $m(x)=(x-q)^2$.
Si q es positivo, la función se desplaza q unidades hacia la izquierda.
Si q es negativo, la función se desplaza $|q|$ unidades hacia la derecha.
Cuando la gráfica de la función se desplaza horizontalmente, se desplazan el eje de simetría y el vértice.

x	t (x)
0	9
1	16
−1	4
2	25
−2	1



El gráfico de $f(x) = x^2$ se desplazó 3 unidades hacia la izquierda. El vértice y el eje de simetría, también se desplazaron 3 unidades hacia la izquierda.

El siguiente cuadro presenta la comparación entre las tres funciones.

Función	Eje de simetría	Vértice	Conjunto imagen
$f(x) = x^2$	$x = 0$	(0 ; 0)	$[0 ; +\infty)$
$m(x) = (x-4)^2$	$x = 4$	(4 ; 0)	$[0 ; +\infty)$
$t(x) = (x+3)^2$	$x = -3$	(−3 ; 0)	$[0 ; +\infty)$

Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

Una función es creciente si para dos valores diferentes del dominio, si $a < b$ entonces $f(a) < f(b)$.
Una función es decreciente si para dos valores diferentes del dominio, si $a < b$ entonces $f(a) > f(b)$.
Una función es constante si para cualquier par de valores del dominio las imágenes son siempre iguales.

Problema 4

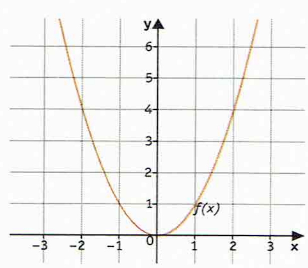
¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x - 5)^2$?

En el capítulo de funciones lineales se estudió que las rectas pueden ser:

- siempre crecientes, es decir cuando los valores de x aumentan los de y también;
- siempre decrecientes, es decir cuando los valores de x aumentan los de y disminuyen;
- constantes, es decir, para cualquier valor de x la y es siempre la misma.

¿Qué ocurrirá con la parábola?

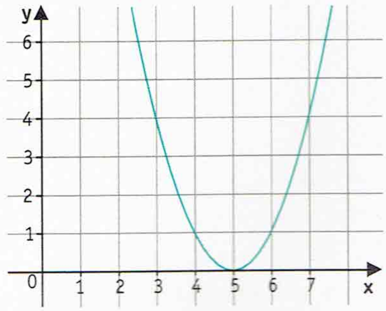
Al realizar el gráfico de $f(x) = x^2$ se observa que:



la función tiene intervalos de crecimiento y de decrecimiento, si el dominio está formado por todos los números reales.

En este caso, $f(x)= x^2$ es decreciente en el intervalo $(-\infty ; 0)$ y es creciente en el intervalo $(0 ; +\infty)$

Si se grafica $g(x) = (x - 5)^2$



Esta función es creciente en el intervalo $(5 ; +\infty)$ y es decreciente en el intervalo $(-\infty ; 5)$.

El **intervalo de crecimiento** de una función es un subconjunto del dominio en el cual a medida que crecen los valores de la variable independiente también crecen los valores de la variable dependiente.
De la misma manera, el **intervalo de decrecimiento** de una función es un subconjunto del dominio en el cual a medida que aumentan los valores de la variable independiente disminuyen los valores de la variable dependiente.

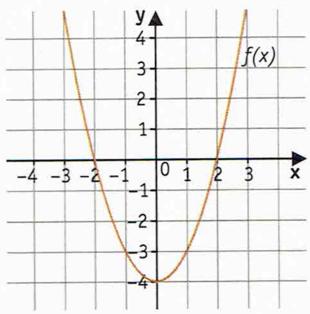
Ceros de la función cuadrática

El vértice de una parábola es el punto que marca el cambio de decrecimiento a crecimiento.

Problema 5

Calcular en qué puntos los gráficos de las siguientes funciones cortan al eje x:

$$f(x)= x^2 - 4 ; \quad g(x) = (x - 2)^2 \quad ; h(x) = x^2 + 1$$



Si se analiza el gráfico de la función se observa que el gráfico corta al eje x en dos puntos,

$$(2 ; 0) \quad y \quad (-2 ; 0)$$

Las abscisas de estos puntos se denominan ceros o raíces de la función. En este caso, las raíces son $x = 2$ y $x = -2$.

Con esta función no era difícil "leer" las raíces del gráfico, pero *¿cómo se pueden hallar los ceros o raíces sin usar el gráfico?*

Los puntos del eje x se caracterizan por tener la segunda coordenada igual a 0. Para buscar los puntos donde el gráfico corta al eje x es necesario calcular para qué valores de x la imagen de cada función da por resultado 0.

Si se comienza con $f(x)$. Para que un valor de x sea raíz de una función, su imagen debe ser $f(x) = 0$. Hay que resolver la siguiente ecuación:

$$x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4$$

entonces vale que

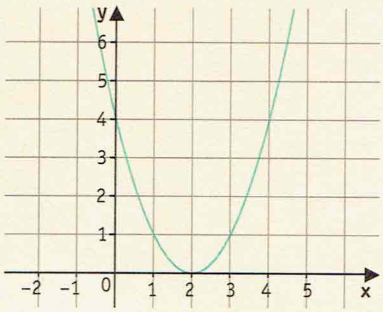
$$|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{o} \quad x = -2$$

Por lo tanto la parábola corta al eje x en los puntos $(2 ; 0)$ y $(-2 ; 0)$.

Los **ceros** de la función, también llamados raíces, representan los valores de x cuya imagen tiene valor cero. Para esos valores de x se obtienen, en el gráfico de la función, pares ordenados de la forma $(x ; 0)$, es decir, puntos que están sobre el eje de las abscisas.

La función $f(x) = (x-2)^2$ tiene una sola raíz.
$(x-2)^2 = 0$ entonces
$|x-2| = 0$
Por lo tanto si el módulo es igual a 0, la ecuación tiene una sola solución que se obtiene al despejar:
$x-2=0$ o sea $x=2$

Para la función $g(x) = (x-2)^2$ se sigue el mismo procedimiento:



$$(x-2)^2 = 0$$
$$|x-2| = 0$$
$$x-2 = 0$$
$$x = 2$$

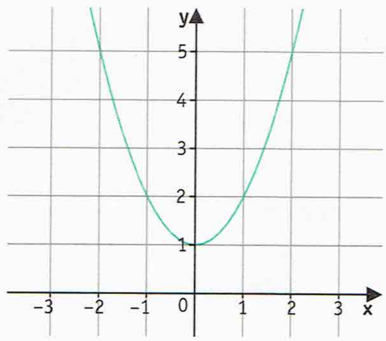
En el gráfico se verifica que el único punto donde la función toca al eje x es el punto $P = (2\ ;\ 0)$

Para la función $h(x) = x^2 + 1$, al igualar la fórmula a cero se obtiene la ecuación:

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = 0 - 1$$
$$x^2 = -1$$

Pero no existe ningún número real que, al elevarlo al cuadrado, su resultado sea −1. La ecuación no tiene solución. Por lo tanto el gráfico de esta función no corta al eje x.

El gráfico de la función $h(x) = x^2 + 1$ está desplazado 1 unidad hacia arriba respecto de la función $t(x) = x^2$, su vértice es el punto $V = (0\ ;\ 1)$.



Esto quiere decir que esta parábola no tiene raíces que sean números reales, por lo tanto no cortará al eje de las x.

ACTIVIDADES

8. Hallen las raíces de las siguientes funciones:
a. $f(x) = (x-4)^2$
b. $g(x) = 2x^2 - 32$
c. $h(x) = 5x^2 + 10$
d. $m(x) = 5x^2 - 25$

9. a. Busquen las raíces de las funciones:
$f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = (x-3)^2$, $h(x) = x^2 - 9$, $m(x) = (x+5)^2$
b. Grafiquen las funciones anteriores e indiquen eje de simetría, coordenadas del vértice e intervalos de crecimiento y de decrecimiento de cada una.

Conjunto de positividad y negatividad

Otra de las características que se estudian en las funciones son los intervalos de positividad y de negatividad. También se los llama conjunto de positividad y conjunto de negatividad.

El **conjunto de positividad** de una función es el subconjunto del dominio cuyas imágenes son números positivos.

El **conjunto de negatividad** es el subconjunto del dominio cuyas imágenes son números negativos.

Problema 6

Determinar los conjuntos de positividad y negatividad de las funciones:

$f(x) = x^2 - 4$ $\qquad h(x) = x^2 + 1$ $\qquad g(x) = (x - 2)^2$

Al conjunto de positividad se lo suele representar con el símbolo C^+.

A partir del gráfico se puede analizar cuándo la función es positiva y cuándo negativa. Con el gráfico de $f(x) = x^2 - 4$

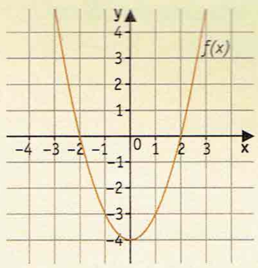
El conjunto de positividad es $C^+ = (-\infty\ ;\ -2) \cup (2\ ;\ +\infty)$.

El conjunto de negatividad es $C^- = (-2\ ;\ 2)$.

En la función graficada se verifica que:

$f(-3) = (-3)^2 - 4 = 5$

$f(1) = 1^2 - 4 = -3$



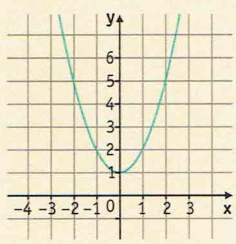
La imagen de -3 es un número positivo, por eso -3 pertenece al conjunto de positividad de la función. En cambio la imagen de 1 es un número negativo, por eso 1 pertenece al conjunto de negatividad.

Si se observan las gráficas de $h(x)$ y $g(x)$.

Al conjunto de negatividad se lo suele representar con el símbolo C^-.

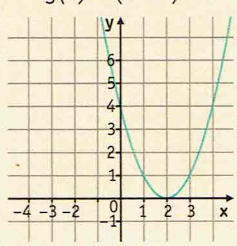
Como la gráfica se desplaza 1 unidad hacia arriba respecto de la de $t(x) = x^2$, no corta al eje de abscisas y es positiva en todo su dominio. Luego, $C^+ = \mathbb{R}$, $C^- = \varnothing$.

$h(x) = x^2 + 1$



Al restar 2 al valor de x, la gráfica se desplaza 2 unidades hacia la derecha. De esa manera, no cambia la imagen de la función, aunque sí el vértice y las raíces. Entonces, $C^+ = \mathbb{R} - \{2\}$, $C^- = \varnothing$.

$g(x) = (x - 2)^2$

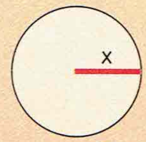


La fórmula $f(x) = a \cdot x^2$

Hay otras expresiones que también identifican a las funciones cuadráticas. Una de ellas es la que se trata en la siguiente situación.

Problema 7

a. Determinar la fórmula de la función que permite calcular la superficie de un círculo conociendo su radio



b. ¿La fórmula hallada corresponde a una función cuadrática?

c. ¿Para qué valores de x tiene sentido este problema?

d. ¿Cómo es el gráfico de la función?

En numerosas situaciones se considera $\pi = 3{,}14$ aunque se trate de un número con infinitas cifras decimales no periódicas.

La fórmula que permite calcular la superficie de un círculo con radio r es $\pi \cdot r^2$.

En este caso el radio mide x y es la variable independiente, la fórmula queda:

$$s(x) = \pi \cdot x^2$$

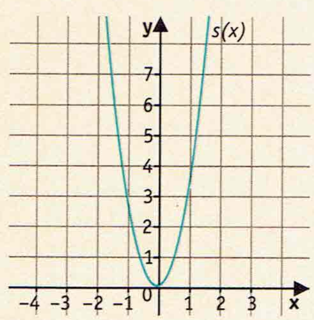
Esta fórmula corresponde a una función cuadrática ya que cumple con la condición de que la variable independiente está elevada al cuadrado.

Para determinar el dominio se debe considerar que el radio de un círculo no puede tomar valores negativos, por este motivo $\text{Dom}(s) = (0 ; +\infty)$.

Para graficar la función $s(x) = \pi \cdot x^2$, si bien el radio no puede tomar valores negativos, es posible incluirlos para analizar el gráfico con dominio de todos los números reales. Es decir que el dominio del problema son los números reales positivos y el dominio de la función son todos los números reales.

Una tabla de valores permitirá tener una idea del gráfico.

x	$s(x)$
1	$\pi \cdot 1$
2	$\pi \cdot 4$
0	0
–1	$\pi \cdot 1$



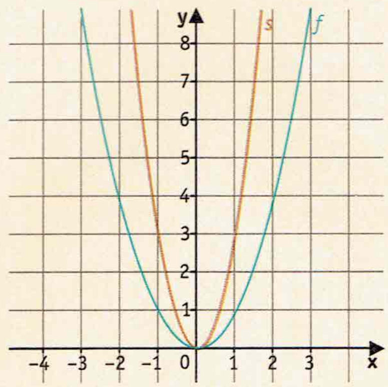
Problema 8

Determinar las variaciones que se presentan entre el gráfico de la función $f(x) = x^2$ y los gráficos de las funciones:

$s(x) = \pi \cdot x^2$ $\qquad g(x) = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad h(x) = -1 \cdot x^2$

Se puede graficar, en el mismo sistema de ejes coordenados, las funciones

$f(x) = x^2$ y $s(x) = \pi \cdot x^2$.

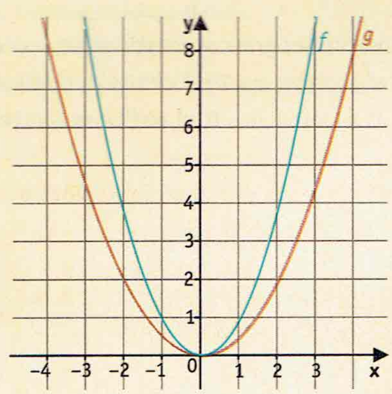


Se observa que se modificó la abertura de la parábola. Al multiplicar a la variable x^2 por π, que es un número real mayor que uno, las ramas de la parábola se acercaron al eje de simetría, pues cada imagen es más grande, con respecto a las imágenes de $f(x) = x^2$.

¿Cómo varía entonces el gráfico de $f(x) = x^2$ si ahora se multiplica esta función por un número menor que 1 pero mayor que 0?

Para comparar los gráficos de $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2$, se puede construir una tabla de $g(x)$:

x	g (x)
0	0
1	$\frac{1}{2}$
−1	$\frac{1}{2}$
2	2
−2	2



Si $a > 0$ las ramas de la función cuadrática van hacia arriba y el vértice es el mínimo de la función.

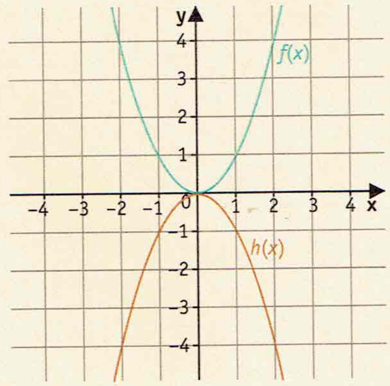
En el gráfico se observa que la abertura de la parábola es mayor. Al multiplicar a x^2 por $\frac{1}{2}$ las ramas de la parábola se alejaron del eje de simetría pues, en este caso, cada imagen que se obtiene es menor con respecto a las imágenes de x^2.

¿Cómo se modificará la fórmula de la función $f(x) = a \cdot x^2$ cuando el coeficiente a es negativo?

Ahora se compara $f(x) = x^2$ con $h(x) = -1 \cdot x^2$.

$h(0) = -1 \cdot 0^2 = 0$
$h(1) = -1 \cdot 1^2 = -1$
$h(-1) = -1 \cdot (-1)^2 = -1$
$h(2) = -1 \cdot 2^2 = -4$
$h(-2) = -1 \cdot (-2)^2 = -4$

x	h (x)
0	0
1	−1
−1	−1
2	−4
−2	−4



En el gráfico se observa que se modificó la imagen de la parábola. Al multiplicar a x^2 por un número negativo, las ramas de la parábola van hacia abajo.

La imagen de $f(x)$ es el intervalo $[0 ; +\infty)$.

La imagen de $h(x)$ es el intervalo $(-\infty ; 0]$.

Si $a < 0$ las ramas de la función cuadrática van hacia abajo y el vértice es el punto máximo de la función.

Al comenzar el capítulo se había indicado que el vértice de la parábola es el único punto que no tiene simétrico y, en los casos que se analizaron, siempre resultaba ser el mínimo de la función. En el caso en que a es negativo el vértice es máximo.

Al observar los gráficos anteriores se puede deducir que:
Si a es positivo, $a > 0$, el vértice es el mínimo de la función.
Si a es negativo, $a < 0$, el vértice es el máximo de la función.

Si se vierten los resultados obtenidos para las funciones de ecuación $f(x) = a \cdot x^2$, se puede armar la siguiente tabla:

	El vértice es…	**El intervalo de crecimiento es…**	**El intervalo de decrecimiento es…**	**La única raíz es…**	**C^+ es…**	**C^- es…**
$a > 0$	mínimo	$(0 ; +\infty)$	$(-\infty ; 0)$	$x = 0$	$\mathbb{R} - \{0\}$	Φ
$a < 0$	máximo	$(-\infty ; 0)$	$(0 ; +\infty)$	$x = 0$	Φ	$\mathbb{R} - \{0\}$

ACTIVIDADES

10. Determinen, sin realizar los gráficos, si las siguientes funciones cortan al eje x: $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^2 + 2$

11. Grafiquen las funciones: $h(x) = 2 \cdot x^2$, $m(x) = -2 \cdot x^2$, $g(x) = \frac{1}{3}x^2$, $f(x) = -\frac{1}{3}x^2$
Determinen el dominio y la imagen de cada una.
Indiquen si el vértice de cada una es máximo o mínimo. ¿De qué depende que el vértice sea máximo o mínimo?

12. Para cada una de las siguiente funciones, decidan cuál es "más abierta":

$f_1(x) = 2 \cdot x^2$ $f_2(x) = 3 \cdot x^2$

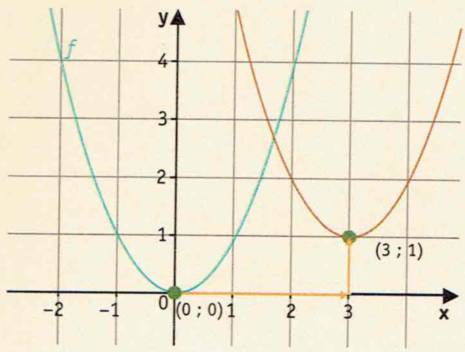
$f_3(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$ $f_4(x) = -5 \cdot x^2$

Forma canónica de la función cuadrática

Problema 9

¿Qué modificaciones hay que hacerle a la fórmula de la función $f(x) = x^2$ para que el vértice sea V = (3 ; 1) ?

Si se quiere que el gráfico de la función $f(x) = x^2$ se mueva de manera que el nuevo vértice sea (3 ; 1):



Se observa que el vértice deberá desplazarse 3 unidades hacia la derecha y 1 unidad hacia arriba. Esta es una combinación del desplazamiento vertical y horizontal. Al trasladar la función $f(x)= x^2$, 3 unidades en forma horizontal, hacia la derecha, se obtiene una nueva función $g(x) = (x - 3)^2$. Si ahora hay que trasladar 1 unidad en forma vertical, se obtiene la función:

$$h(x) = (x - 3)^2 + 1$$

Por trasladarse 1 unidad hacia arriba

Por trasladarse 3 unidades hacia la derecha

La notación que se utilizará al nombrar el vértice de una función cuadrática es:

$$V = (x_V ; y_V)$$

Se sabe que el vértice de la función $h(x)$ es V = (3 ; 1), y son precisamente esos valores los que aparecen en la fórmula de $h(x)$. Luego, si $V = (x_V ; y_V)$ es el vértice de una función cuadrática, su fórmula puede expresarse como $h(x) = (x - x_V)^2 + y_V$.

Cuando la fórmula de una función cuadrática está expresada de la forma

$$h(x) = (x - x_V)^2 + y_V$$

se dice que está en **forma canónica.**

La ventaja de conocer la fórmula de una función cuadrática en su forma canónica es que, al mirar la fórmula es posible leer las coordenadas del vértice $V = (x_V ; y_V)$.

Para trasladar el vértice de la función $f(x) = x^2$, que es (0 ; 0), al punto $V = (x_v ; y_v)$ debe desplazarse la parábola x_v unidades en forma horizontal e y_v unidades en forma vertical.
Por lo tanto se obtiene la función:

$$h(x) = (x - x_V)^2 + y_V$$

ACTIVIDADES

13. ¿Qué modificaciones hay que hacerle a la fórmula de la función $f(x) = x^2$ para que el vértice sea $V = (2 ; -3)$?

14. ¿Qué modificaciones hay que hacerle a la fórmula de la función $f(x) = x^2$ para que el vértice sea $V = (-2 ; 3)$?

15. Inventen un desplazamiento de la función $f(x) = x^2$ para que el vértice sea un punto del tercer cuadrante.

16. a. A partir del desplazamiento de la función, $f(x) = x^2$, grafiquen las funciones: $f_1(x) = (x - 4)^2 - 5$; $f_2(x) = (x + 2)^2 + 2$.

b. Determinen el dominio, imagen, eje de simetría, coordenadas del vértice, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, conjunto de positividad y negatividad de cada una.

ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN

17. Dada la función $f(x) = x^2 - 9$.

a. Determinen: $f(0)$; $f(-3)$; $f(1)$; $f(4)$.

b. Estudien si existe algún valor de x que cumpla que $f(x) = 3$, justifiquen la respuesta.

c. Analicen si existe algún valor de x tal que $f(x) = -13$, justifiquen la respuesta.

18. a. A partir del gráfico de la función $f(x) = x^2$, grafiquen:

I. $f(x) = x^2 - 9$

II. $f(x) = -(x+4)^2$

III. $f(x) = \frac{1}{4}x^2$

IV. $f(x) = \frac{1}{4}(x+3)^2 + 5$

V. $f(x) = -2 \cdot x^2$

VI. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

b. Para cada una de las funciones anteriores, determinen el dominio, imagen, eje de simetría, coordenadas del vértice, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, conjunto de positividad y negatividad.

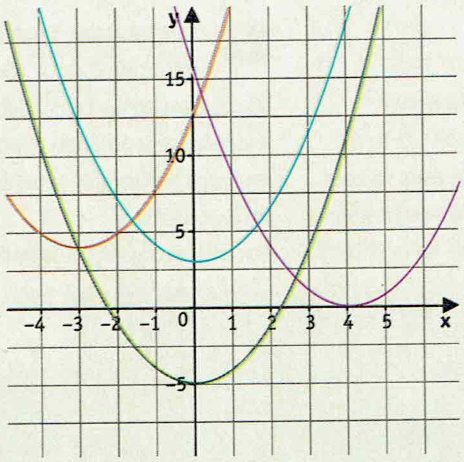
c. ¿En cuáles de las funciones anteriores el eje de simetría coincide con el eje de ordenadas?

d. ¿Cuáles de las funciones anteriores pasan por el centro de coordenadas? ¿Qué característica tienen en común estas funciones?

e. ¿Cuál es la parábola "más abierta" y cuál la "más cerrada"? ¿Por qué?

19. Si una parábola pasa por el punto A = (0 ; –3) y el vértice es V = (–1 ; –4), ¿cuál es el punto simétrico de A?

20. Vinculen cada uno de los siguientes gráficos con la fórmula correspondiente.

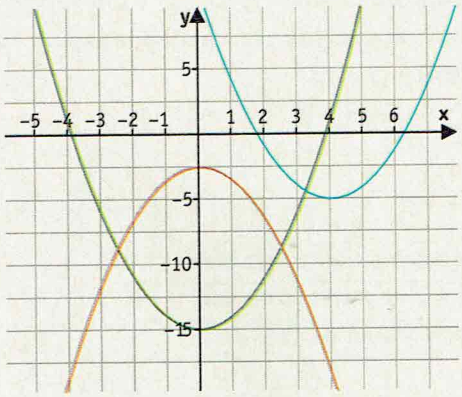


$f(x) = (x+3)^2 + 4$ $\quad$ $g(x) = (x-4)^2$

$h(x) = x^2 - 5$ $\quad$ $m(x) = x^2 + 3$

21. Si se quiere que la función $f(x) = x^2$ se desplace de manera que el nuevo vértice sea el punto V = (–1 ; 4). ¿Cuál será la fórmula?

22. A partir de desplazamientos del gráfico de la función $f(x) = x^2$, indiquen las fórmulas de las funciones graficadas:



23. En una isla, en la que no había ningún venado, se introduce una cierta cantidad de estos animales. Al principio la manada empezó a crecer rápidamente, pero después de un tiempo, por falta de alimentos, la población empezó a decrecer. La fórmula de la función que indica la cantidad de venados en función del tiempo es:

$N(t) = -1 \cdot (t - 11)^2 + 196$ donde t es el tiempo medido en años y N es el número de venados a lo largo del tiempo. Realicen un gráfico de la función y contesten las siguientes preguntas:

a. ¿Cuántos venados se introdujeron en la isla?

b. Determinen los valores positivos de t para los cuales la población aumenta y para cuales disminuye.

c. ¿Cuál fue la mayor cantidad de venados que hubo en la isla?

d. ¿Se extinguen en algún momento los venados? ¿Cuántos años transcurrieron?

24. A una fábrica de envases le encargan latas de pintura. Como la base es circular, el volumen de las latas es $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

El diseñador de etiquetas quiere que el radio de la base sea siempre de 10 cm, por este motivo para variar la capacidad de las latas, lo que puede cambiar es la altura. En cambio el capataz de la fábrica necesita que la altura sea de 40 cm para no tener problemas al ordenarlas en las estanterías, y prefiere que varíe el radio de la base.

Hallen las fórmulas de las funciones para ambas opciones y determinen qué tipo de función es cada una.

25. Si una parábola pasa por el punto A = (–1 ; 3) y el vértice es V = (2 ; 1), ¿cuál será el punto simétrico de A?

26. Encuentren la abscisa del vértice de una parábola si (–1 ; 4) y (3 ; 4) son puntos simétricos de la misma.

AUTOEVALUACIÓN

1. Si el gráfico de una función cuadrática pasa por los puntos $A=(3;7)$ y $B=(-5;7)$ la ecuación del eje de simetría es:

a $x=-1$

b $x=1$

c $y=-1$

d $x=0$

2. Si una parábola pasa por el punto $A=(1;6)$ y el vértice es $V=(3;2)$, el punto simétrico de A es:

a $B=(5;6)$

b $B=(0;6)$

c $B=(-1;6)$

d $B=(-1;-6)$

3. El vértice del gráfico de la función $f(x)=(x+5)^2-9$ es:

a $V=(-9;5)$

b $V=(5;-9)$

c $V=(-5;-9)$

d $V=(9;-5)$

4. Si se quiere que la función $f(x)=x^2$ se desplace de manera que el nuevo vértice sea el punto $V=(-4;9)$. La nueva fórmula es:

a $h(x)=(x-4)^2+9$

b $h(x)=(x+4)^2-9$

c $h(x)=(x+4)^2+9$

d $h(x)=(x-4)^2-9$

5. El desplazamiento de $h(x)=(x+1)^2-2$ respecto de $f(x)=x^2$ es:

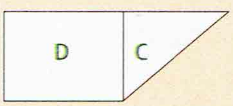
a Dos unidades a la izquierda y una unidad hacia arriba.

b Una unidad a la derecha y dos unidades hacia abajo.

c Una unidad a la izquierda y dos unidades hacia arriba.

d Una unidad a la izquierda y dos unidades hacia abajo.

6. En la siguiente figura, la superficie total es de $160\ cm^2$. C es un triángulo rectángulo isósceles y D es un rectángulo donde la base mide el doble de la altura. Los valores de los lados de las figuras C y D son:



a figura D: base = 8 cm , altura = 4 cm
figura C : catetos = 4 cm , hipotenusa = $4\sqrt{2}$ cm

b figura D: base = 16 cm , altura = 4 cm
figura C : catetos = 4 cm , hipotenusa = $4\sqrt{2}$ cm

c figura D: base = 16 cm , altura = 8 cm
figura C : catetos = 8 cm , hipotenusa = $8\sqrt{2}$ cm

7. El conjunto de positividad de la función $h(x)=-x^2+16$ es:

a $(-4;4)$

b $[-4;4]$

c $(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$

d Ninguna de las anteriores.

8. Una función cuadrática cuya fórmula es $f(x)=a\cdot x^2+c$,

a Siempre tiene dos raíces reales diferentes.

b Nunca tiene raíces reales.

c Puede no tener raíces reales o tener dos diferentes.

d Ninguna de las anteriores.

9. Indiquen cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

a Si la fórmula de una función cuadrática tiene $a>0$ e $y_v>0$, entonces no tiene raíces reales.

b Si la única raíz de una parábola es -2, entonces $C^+=\mathbb{R}-\{-2\}$.

c Si una parábola no tiene raíces, entonces $C^+=\mathbb{R}$ ó $C^-=\mathbb{R}$.

d Si x_v es la abscisa del vértice de una parábola, entonces la función crece en el intervalo $(x_v;+\infty)$ y decrece en $(-\infty;x_v)$.

10. Sea $g(x)$ una función cuadrática que tiene coeficiente $a>0$, entonces el intervalo de decrecimiento de $g(x)$ es:

a $(x_v;+\infty)$

b $(-\infty;x_v)$

c $(y_v;+\infty)$

d $(-\infty;y_v)$

11. Si $m(x)=(x+2)^2$, entonces se verifica que:

a $C^+=\mathbb{R}, C^-=\varnothing$.

b $C^-=\mathbb{R}, C^+=\varnothing$.

c $C^-=(-\infty;-2)$, $C^+=(-2;+\infty)$.

d Ninguna de las anteriores.

CONTENIDOS

- Organización de datos
- Gráficos de barras y gráfico circular
- Frecuencias, frecuencias relativas y frecuencias acumuladas
- Variables continuas
- Histogramas
- Medidas de tendencia central

Hay numerosas situaciones en las cuales es necesario organizar una gran cantidad de datos para que estén disponibles y se pueda leer toda la información que ellos proveen. En otras oportunidades hace falta hacer un resumen de esa colección de datos para tomar decisiones.

También es útil usar datos obtenidos a partir de una parte de un grupo para predecir qué sucederá con el grupo entero. En este capítulo se estudiará cómo recolectar datos necesarios, cómo organizar la información para sacar conclusiones válidas y cómo transmitir claramente esta información.

8 ESTADÍSTICA

Problema 1

Según los datos obtenidos en la revista N° 22 de la Asociación Civil "Luchemos por la Vida" durante el mes de junio de 2002, la cantidad de actas labradas en relación a la cantidad de infracciones de tránsito cometidas fueron:

Infracción	Cantidad de infracciones	Porcentaje en relación al total de infracciones	Cantidad de actas labradas
Violación de semáforo (luz roja)	66 096 000	52 %	4886
No respetar la prioridad de paso del peatón	26 517 600	21 %	11
No respetar uso del cinturón de seguridad	31 584 000	25 %	600
Niños en el asiento delantero	1 155 000	0,9 %	51
Falta de uso de casco en motos	1 716 000	1,1 %	83

a. ¿Cuál es la infracción que más se comete? ¿Y la que menos?

b. ¿Cómo se obtienen los valores de la columna que dice porcentaje?

c. Según la cantidad de actas labradas en relación a la cantidad de infracciones realizadas, ¿son confiables los controles de tránsito de la Ciudad de Buenos Aires?

En el cuadro correspondiente al problema anterior hay una gran cantidad de información que, si se sabe leer, permite responder las preguntas planteadas.

En primer lugar, la tabla informa acerca de tipos de infracciones de tránsito, que se cometieron en la Argentina en junio de 2002. Es decir, se analiza al parque automotor de la Argentina, y sobre él, las infracciones de tránsito. El parque automotor constituye la *población* en estudio y las infracciones de tránsito es la *variable* que se estudia. Las distintas infracciones de tránsito o valores de la variable que se observaron fueron: "Violación de semáforo rojo", "No respetar la prioridad de paso del peatón", "No respetar uso del cinturón de seguridad", "Niños en el asiento delantero" y "Falta de uso de casco en motos". Estos *datos* son los valores o categorías de la variable. Estos datos son del tipo cualitativo porque informan acerca de una cualidad de la infracción. Se dice que esta variable es de tipo *cualitativo*.

Si en cambio informaran sobre una cantidad se llamarían datos del tipo *cuantitativo*.

La columna "Cantidad de infracciones" es la que permite decidir, a partir de comparar la cantidad de veces que ocurrió cada infracción, cuál es la más frecuente y cuál la que ocurre la menor cantidad de veces. Cada una de esas cantidades se llama *frecuencia absoluta* de cada infracción.

La pregunta también puede responderse comparando los porcentajes, que representan las frecuencias porcentuales.

Una ***población*** es el conjunto de todos los individuos u objetos que se quiere estudiar.
Cada una de las características que puede estudiarse de una población se denomina ***variable***.
Los ***datos*** son los distintos valores, numéricos o no, que toma la variable.
La variable puede ser ***cuantitativa*** si hace referencia a cantidad o ***cualitativa*** si hace referencia a cualidades.

Se denomina ***frecuencia absoluta*** a la cantidad de veces que aparece un dato y se simboliza con la letra f.
Se llama ***frecuencia porcentual*** al porcentaje del total que corresponde a cada valor de la variable. Se la simboliza $f_{\%}$.

Una manera de determinar $n\%$ de una cierta cantidad a es a través del siguiente cálculo:

$$a \cdot \frac{n}{100}$$

Hay también otras maneras de hacerlo, apoyándose en el concepto de proporcionalidad.

A partir del cuadro es posible reconocer que la infracción que más frecuentemente se comete es la "Violación de semáforo". Del mismo modo es posible identificar que la infracción que se comete con menor frecuencia es "Niños en el asiento delantero".

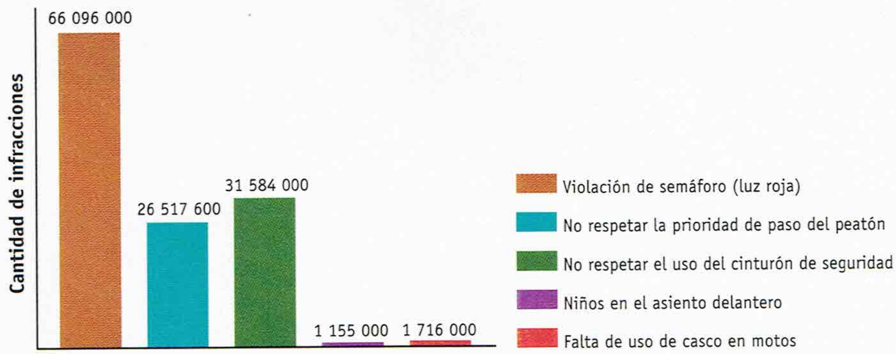
Por otro lado, es sencillo reconocer en el cuadro que hay muy pocas actas labradas en función de la cantidad de infracciones registradas. Por ejemplo, si se cometieron 26 517 600 de infracciones "No respetar la prioridad de paso del peatón" y solo se labraron 11 actas, es evidente que son muy pocas. El control es bastante deficiente.

Organización de datos

Muy frecuentemente en los medios informativos se presenta la información organizada de diferentes maneras, entre ellas, utilizando gráficos.

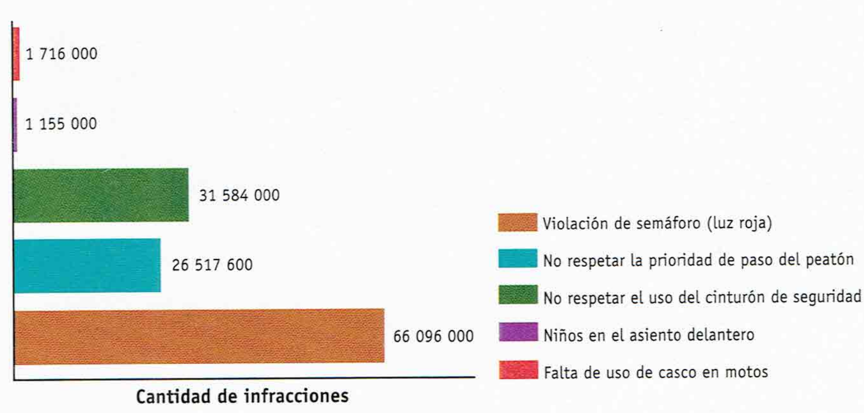
Gráfico de barras

En el siguiente gráfico se organizó la información de la tabla de la página 140.



Los gráficos se utilizan para visualizar relaciones entre los datos sin necesidad de comparar las cantidades. A partir de la mera observación del gráfico muchas veces es posible arribar a algunas conclusiones. En este caso, se visualiza con mayor claridad cuál es el dato con mayor frecuencia (Violación de semáforo) porque se observa la barra más alta, y el de menor frecuencia (Niños en el asiento delantero), sin necesidad de leer las frecuencias.

El mismo gráfico de barras se puede graficar con las barras horizontales, cambiando lo que se mide en cada eje:



© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Los gráficos de barras sirven para comparar los distintos valores de la variable en cuestión mirando solamente cuál de las barras es más larga (la de mayor frecuencia) y cuál más corta (la de menor frecuencia).

Este estilo de gráfico se utiliza en general para representar variables cualitativas.

Hay también otras maneras de representar gráficamente variables cualitativas.

Gráfico circular

Problema 2

En la elección a presidente del Club Villa Pueyrredón, se presentaron cuatro listas. El siguiente gráfico muestra los resultados obtenidos:

Lista	Porcentaje de votantes
Violeta	52%
Blanca	25%
Roja	21%
Naranja	0,90%
Verde	1,10%

¿Cómo fue armado el gráfico?

Para que el gráfico circular represente la distribución de frecuencias que se tiene, es necesario asignar a cada candidato una porción del círculo, en proporción a la cantidad de votos que recibió.

El sector circular se determina al calcular el ángulo central que corresponde a cada valor de la variable.

A la totalidad de casos, es decir al 100%, le corresponde un ángulo central de 360°.

Al candidato de la Lista violeta le corresponde el 52% del total de los votos, en el gráfico le corresponderá un ángulo que sea el 52% de 360°. Hay diferentes maneras de encontrar este valor:

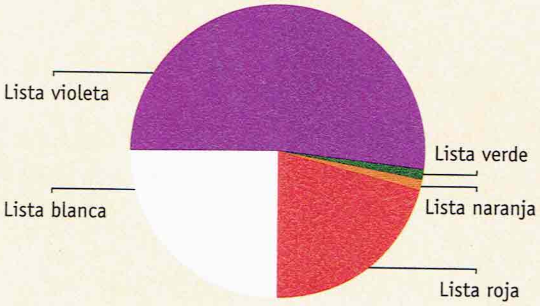
$$x = 0{,}52 \cdot 360° = 187°\ 12'$$

o bien de esta otra forma

$$\frac{100\%}{360°} = \frac{52\%}{x°} \Rightarrow x = \frac{360° \cdot 52\%}{100\%} \Rightarrow x = 187°\ 12'$$

Al calcular todos los ángulos:

Lista	Ángulo del sector circular
Violeta	187°12′
Blanca	90°
Roja	75° 36′
Naranja	3° 14′24″
Verde	3°57′36″



Una manera de obtener el ángulo, x, en un gráfico circular correspondiente a un valor p de la variable es la siguiente:

$$x = \frac{p \cdot 360°}{100}$$

donde p es el porcentaje correspondiente, y x el ángulo que determina.

Si el dato que se tiene es la frecuencia absoluta f y N es la cantidad total de frecuencias, el ángulo se obtiene a partir del siguiente cálculo:

$$x = \frac{f}{N} \cdot 360°$$

1. Según el registro de estadísticas del Hospital Zonal de la ciudad de Salta, las operaciones efectuadas durante el año 2003 fueron:

Tipo de operación	Número de casos
Torácica	20
Huesos y articulaciones	42
Ojos	15
Oído, nariz y garganta	58
Abdominal	65
Urología	37
Proctología	32
Ginecología	85
Neurocirugía	21
Cardiología	34
Totales	409

a. ¿Cuál es la población que se analiza?

b. La variable que se analiza, ¿es cualitativa o cuantitativa?

c. ¿Cuál fue la operación que más se realizó?

d. ¿Cuál fue la operación menos frecuente?

e. Realicen un gráfico de barras y uno circular que muestre la información dada en la tabla.

2. El profesor de educación física de la escuela le encargó a un grupo de alumnos que hicieran un relevamiento de los deportes que practican los chicos de séptimo grado. Con los datos que obtuvieron armaron la siguiente tabla:

DEPORTE	VARONES	MUJERES
FÚTBOL	25	-
BÁSQUET	10	7
VOLEY	12	20
RUGBY	5	-
HANDBOL	7	12
NATACIÓN	3	6
ARTES MARCIALES	2	3
TENIS	3	5
TOTAL	67	53

a. ¿Cuál es la población en estudio?

b. ¿Cuál es el deporte más practicado?

c. ¿Cuál es el deporte más practicado por los varones?

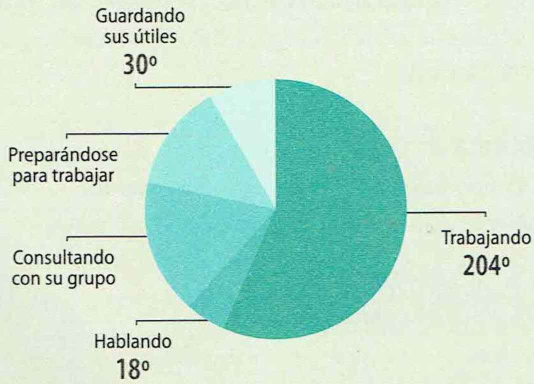
d. ¿Cuál es el porcentaje de alumnos que practican natación?

e. Realicen un gráfico de barras que muestre la cantidad de alumnos de ambos sexos que practican cada deporte.

f. Realicen un gráfico circular donde se observe la cantidad de mujeres que realizan cada deporte.

g. Realicen otro gráfico de barras de toda la población estudio, en donde se diferencien los varones de las mujeres.

3. El siguiente diagrama circular muestra de qué manera un alumno usa su tiempo de clase de 60 minutos de duración.

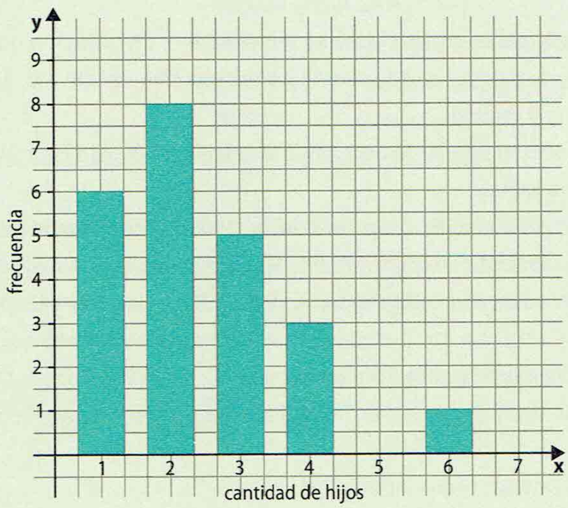


a. Indiquen cuánto tiempo pasa trabajando, hablando y guardando sus útiles.

b. Si el alumno pasa 10 minutos consultando con su grupo, ¿cuál es el ángulo que le corresponde a esta categoría en el diagrama circular?

c. ¿Cuánto tiempo pasa preparándose para trabajar?

4. El siguiente gráfico representa la cantidad de hijos de un grupo de familias.



a. ¿Cuántas familias tienen menos de 3 hijos?

b. ¿Cuántas familias fueron encuestadas?

c. ¿Cuál es la cantidad total de chicos que hay entre todas las familias encuestadas?

d. ¿Qué proporción de las familias tienen un solo hijo?

e. Completen la siguiente tabla y realicen, a partir de ella, un gráfico circular.

Cantidad de Hijos					
Ángulo central					

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Frecuencia relativa y porcentaje

Problema 3

En una carrera donde se enfrentaban dos equipos, los tiempos que tardaron los participantes en recorrer 100 metros, se presentan en las siguientes tablas:

Equipo A

Tiempo (en segundos)	Frecuencia
12	49
11	55
10	26
9	4
Total	134

Equipo B

Tiempo (en segundos)	Frecuencia
12	36
11	33
10	18
9	3
Total	90

Los del equipo A dicen que son más rápidos, pues hay más corredores que tardaron 9 segundos. Los del equipo B dicen que ellos son más rápidos pues, si bien hay menos corredores que tardaron 9 segundos, son menos corredores en total. ¿Quién tiene razón?

Según se observa en las tablas, la cantidad de corredores que tardaron 9 segundos es mayor en el equipo A que en el B. Pero también hay que tener en cuenta que la cantidad de corredores del equipo A es mayor que la del equipo B. Por este motivo, para comparar ambos equipos es necesario hacerlo en referencia al total de corredores de cada uno.

De esta manera es posible garantizar que en el equipo A hay 4 corredores de los 134 que tardaron 9 segundos en tanto que en el equipo B son 3 de 90. Puede observarse entonces que el equipo A tiene una proporción menor de corredores que tardaron 9 segundos, aunque sean más.

Una manera de comparar es, entonces, escribir los datos en forma de proporción.

Esta proporción entre la frecuencia absoluta de un valor de la variable y el total de frecuencias recibe el nombre de *frecuencia relativa*. La frecuencia relativa es, la proporción que representa la frecuencia absoluta con respecto al total de datos. Para obtener la frecuencia relativa se divide la frecuencia absoluta por la cantidad total de datos. En el problema las frecuencias relativas del equipo A y del B son:

$$\frac{4}{134} = 0{,}0298507.... \text{ y } \frac{3}{90} = 0{,}0333...$$

Una forma de interpretar la frecuencia relativa es la siguiente.

Al considerar el total de la muestra como la unidad, es decir, 1, se quiere saber qué parte corresponde a cada uno de los valores de la variable. Esta idea es muy similar al concepto de porcentaje. La diferencia es que al calcular porcentajes se supone que el total de la muestra se corresponde con el 100%.

Si se pretende calcular el porcentaje de corredores que tardaron 9 segundos en el equipo A, puede hacerse

$$\frac{4}{134} \cdot 100 = 2{,}98507\%$$

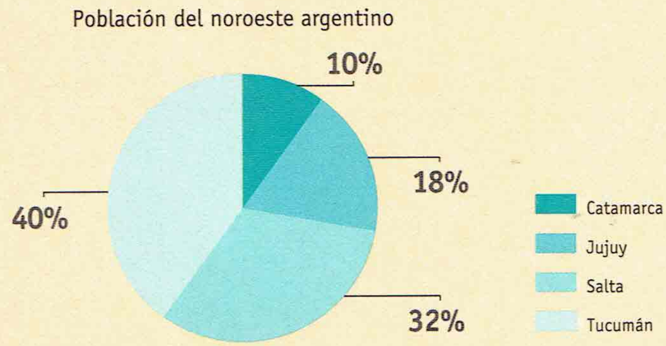
En esta operación el primer factor es la frecuencia relativa. Por lo tanto, el porcentaje se puede obtener multiplicando a la frecuencia relativa por 100.

La **frecuencia relativa** es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos que intervienen en el experimento, se simboliza: f_R e indica la proporción que representa un valor de la variable con respecto al total.

$f_{\%} = f_R \cdot 100$

Problema 4

En un artículo publicado por el INDEC (Instituto Nacional de Estadística y Censos) se muestra mediante un gráfico circular el porcentaje de habitantes de Salta, Jujuy, Tucumán y Catamarca con respecto a la cantidad total de habitantes del noroeste argentino.



Si el total de habitantes de las cuatro provincias es 3 364 030, ¿cuál es la cantidad de habitantes en cada provincia?

Si se denomina c a la cantidad de habitantes de Catamarca, como son el 10% de los 3 364 030 habitantes del noroeste argentino, para averiguar la cantidad de habitantes hay que hallar el 10% del total.

$$c = 0{,}10 \cdot 3\,364\,030 = 336\,403 \quad \text{ó} \quad \frac{3\,364\,030}{100} = \frac{c}{10} \Rightarrow c = \frac{3\,364\,030 \cdot 10}{100} = 336\,403.$$

En Catamarca hay entonces 336 403 habitantes.

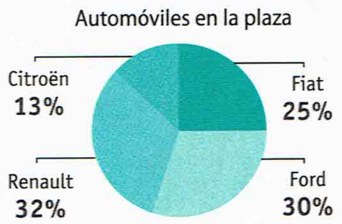
El 18% de los habitantes del noroeste argentino son de Jujuy:
$j = 0{,}18 \cdot 3\,364\,030 = 605\,525$ habitantes, redondeando al número entero más cercano.

En Salta: $s = 0{,}32 \cdot 3\,364\,030 = 1\,076\,490$ habitantes aproximadamente.

En Tucumán: $t = 0{,}40 \cdot 3\,364\,030 = 1\,345\,612$ habitantes.

ACTIVIDADES

5. En la ciudad de Santa Rosa se realizó un estudio acerca de las marcas de los 1200 automóviles que estuvieron estacionados en la plaza el día domingo. Con la información recogida se confeccionó el siguiente gráfico:



a. ¿Cuál es la población en estudio?

b. ¿Qué tipo de variable se está estudiando?

c. ¿Cuántos automóviles de cada marca se estacionaron?

d. Completen la tabla de frecuencias y de porcentajes.

Marca	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas	Porcentaje respecto al total de automóviles estacionados
Fiat			
Ford			
Renault			
Citroën			

e. Construyan un gráfico de barras donde se visualicen las frecuencias absolutas de cada valor de la variable.

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Variables cuantitativas continuas. Intervalos de clase

Problema 5

Una fábrica de ropa para adolescentes necesita saber qué largo de pantalones le conviene fabricar para vender la mayor cantidad posible. El dueño decidió elegir 80 chicos de edades entre 13 y 17 años y les consultó acerca de su altura. Las estaturas registradas, en cm, fueron:

152	156	178	154	165	143	145	157	156	154
151	165	145	172	155	153	152	144	156	146
140	178	143	179	151	164	171	151	157	172
158	143	160	156	161	166	158	143	172	165
144	165	144	145	165	170	155	157	156	177
156	143	158	164	162	151	165	156	157	154
178	156	159	166	156	152	160	151	152	150
143	154	148	156	155	165	161	160	154	149

a. ¿Por qué se seleccionaron 80 personas?
b. ¿Cuál es la mayor y la menor de las alturas registradas?
c. ¿Cómo se pueden utilizar los datos obtenidos de manera tal de poder decidir de qué talle conviene fabricar más pantalones?

Como es imposible entrevistar a todos los adolescentes, el dueño realizó una selección de 80 personas. En este caso, se tomó una *muestra de la población*.

Se llama ***muestra*** a un subconjunto de la población. Se toma una ***muestra*** cuando el número de la población es tan grande que no se puede encuestar o analizar las respuestas de todos.

La variable en estudio es la estatura. Es una variable cuantitativa *continua* porque entre dos valores posibles de la variable siempre hay infinitos, aunque no se puedan medir.

Al observar la tabla se puede afirmar que para la muestra considerada, las alturas varían entre 140 y 180 cm. Estos valores constituyen el mínimo y máximo valor observado.

Como no se pueden fabricar pantalones para todas las alturas existentes, el dueño debe considerar intervalos de altura para determinar la medida de los diferentes talles. Para eso, usa las frecuencias absolutas de cada altura con el objetivo de determinar los intervalos de alturas que se corresponden con cada talle.

Una variable cuantitativa puede ser ***continua*** o ***discreta.***
Es continua si entre dos valores de la misma siempre hay infinitos valores.
Si eso no ocurre se llama discreta.

La estatura de una persona varía de manera continua, aunque la medición no pueda hacerse de la misma manera. Saber cuántos chicos miden 155 cm o si ninguno mide 163 cm no le aporta información relevante al fabricante para planificar su producción.

En estos casos es posible agrupar los valores de la variable en intervalos, llamados *intervalos de clase*. De esta manera, se pierde información, ya que al asignarle una frecuencia a un intervalo deja de tenerse el dato de a qué valor corresponde cada uno.

Se denomina ***intervalo de clase*** a cada uno de los intervalos en que pueden agruparse los datos de una variable cuantitativa continua.

¿Cómo se determinan los intervalos de clase?

Para armar una tabla agrupando los datos en intervalos de clase hay que tener en cuenta algunas cuestiones:

- Generalmente se toman todos los intervalos con la misma amplitud, aunque no tiene por qué ser así. Depende de qué se está midiendo.
- Cada dato debe pertenecer a un único intervalo.
- La cantidad de intervalos depende de la cantidad de datos y de la precisión que se necesita.
- Muchas veces se toman intervalos que son abiertos en un extremo y cerrados en el otro, ya que cada dato debe pertenecer solo a un intervalo. Otras veces, se consideran como extremos de los intervalos valores que seguro no pueden ser valores de la variable en cuestión.

¿Cómo se calcula la amplitud de cada intervalo?

Para determinar la amplitud de cada intervalo hay que tener en cuenta el mayor y menor de los datos. En el problema 5, la estatura mayor es 180 cm y la estatura menor es 140 cm.

La diferencia entre la estatura mayor y la menor es: 180 cm – 140 cm = 40 cm. Esta estatura se la divide por la cantidad de intervalos que se quiere armar. Si se desea distribuir a los datos en 8 intervalos, la amplitud de cada uno debe ser: $\frac{40\ cm}{8} = 5$ cm

Esto quiere decir que la amplitud de cada intervalo es 5 cm y que quedan determinados 8 intervalos.

[140 ; 145) ; [145 ; 150) ; [150 ; 155) ; [155 ; 160)
[160 ; 165) ; [165 ; 170) ; [170 ; 175) ; [175 ; 180)

Estos intervalos son cerrados a izquierda y abiertos a derecha, lo que significa que, por ejemplo, en el primer intervalo está incluida la altura 140 cm pero no la altura 145 cm.

Para poder establecer la frecuencia absoluta de cada intervalo es necesario ordenar el listado de datos. Para ello, es útil realizar una tabla complementaria donde se indique cuantas veces aparecen los datos de los distintos intervalos.

Intervalos	[140;145)	[145;150)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)	[175;180)
Frecuencia	IIIIIIIIII	IIIIII	IIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIIIIIIIIIIIIIIII	IIIIIIII	IIIIIIIII	IIIII	IIIII
Total	10	6	16	21	8	9	5	5

El primer intervalo tiene una frecuencia de 10, esto significa que hay 10 personas cuyas alturas están entre 140 cm y 145 cm, aunque ya no se sabe cuáles fueron exactamente los valores observados. Al agrupar en intervalos se pierde información. Si se mira la tabla se observa que el primer intervalo tiene una frecuencia de 10, pero no se sabe a cuál de los valores corresponde.

Si el fabricante numera los talles de los pantalones consecutivamente es posible armar una tabla de frecuencias según los intervalos.

Talles	Intervalos	Frecuencia
1	[140;145)	10
2	[145;150)	6
3	[150;155)	16
4	[155;160)	21
5	[160;165)	8
6	[165;170)	9
7	[170;175)	5
8	[175;180)	5
	Total	80

Al considerar la muestra de los 80 chicos medidos, la mayor frecuencia está entre los que miden 155 cm y 160 cm.

En consecuencia, le conviene fabricar más pantalones del talle 4 porque teniendo en cuenta la altura de los chicos es más probable vender un pantalón de ese talle.

En el desarrollo del capítulo se han hecho gráficos de barras y circulares, en ambos casos para variables cualitativas o variables cuantitativas discretas.

En el caso de variables continuas, que deben medirse a partir de intervalos de clase, el gráfico apropiado es el *histograma*.

Histogramas

Este gráfico es muy similar a un gráfico de barras, pero tiene algunas diferencias importantes con él.

Como la variable toma valores continuos, no hay espacios entre los valores de la variable, luego no se separan las barras.

La altura queda determinada por una propiedad fundamental de los histogramas:

"el área de cada barra debe ser igual a la *frecuencia relativa* del intervalo de clase correspondiente".

Si se llama b y h a la base y altura de cada rectángulo, resulta que:

$$b \cdot h = f_R \Rightarrow h = \frac{f_R}{b}$$

Además, la base coincide con el ancho de cada intervalo, que se obtiene restando el extremo mayor menos el menor.

Para poder armar un histograma se pueden agregar columnas a la tabla de frecuencias:

Talles	Intervalos	Frecuencia	f_R	altura
1	[140 ; 145)	10	$\frac{10}{80} = 0{,}125$	$0{,}125 : 5 = 0{,}025$
2	[145 ; 150)	6	$\frac{6}{80} = 0{,}075$	$0{,}075 : 5 = 0{,}015$
3	[150 ; 155)	16	$\frac{16}{80} = 0{,}2$	$0{,}2 : 5 = 0{,}04$
4	[155 ; 160)	21	$\frac{21}{80} = 0{,}2625$	$0{,}2625 : 5 = 0{,}0525$
5	[160 ; 165)	8	$\frac{8}{80} = 0{,}1$	$0{,}1 : 5 = 0{,}02$
6	[165 ; 170)	9	$\frac{9}{80} = 0{,}1125$	$0{,}1125 : 5 = 0{,}0225$
7	[170 ; 175)	5	$\frac{5}{80} = 0{,}0625$	$0{,}0625 : 5 = 0{,}0125$
8	[175 ; 180)	5	$\frac{5}{80} = 0{,}0625$	$0{,}0625 : 5 = 0{,}0125$
	Total	80	1	

El gráfico que se usa para variables continuas es el ***histograma***. En él, el área de cada barra coincide con la frecuencia relativa de la clase.

Si se llama b y h a la base y altura de cada rectángulo, resulta que $h = \frac{f_R}{b}$. Además, la base coincide con el ancho de cada intervalo, que se obtiene restando el extremo mayor menos el menor. Si el intervalo de clase es $[x_1 ; x_2)$, la base se obtiene a partir de $x_2 - x_1$.

El gráfico queda entonces:

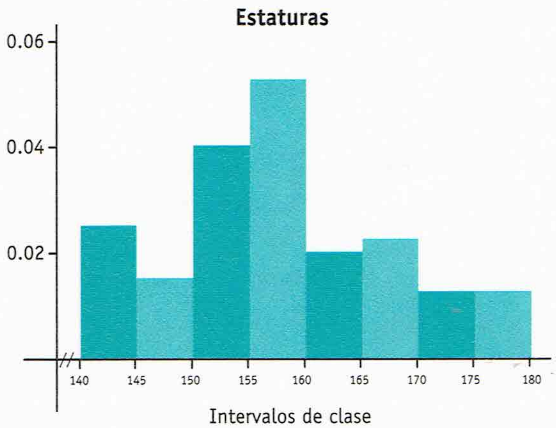


Gráfico de frecuencias acumuladas

También es posible hacer otro tipo de gráfico para variables cuantitativas continuas. Muchas veces es interesante saber cómo van aumentando las frecuencias en los distintos intervalos. Para eso, puede agregarse una columna a la tabla donde se acumulan las frecuencias:

Las dos rayitas que están sobre el eje x indican que en realidad el eje está cortado y solo se observa a partir de allí.

Talles	Intervalos	Frecuencia	Frecuencia acumulada
1	[140 ; 145)	10	10
2	[145 ; 150)	6	$10+6=16$
3	[150 ; 155)	16	$16+16=32$
4	[155 ; 160)	21	$32+21=53$
5	[160 ; 165)	8	$53+8=61$
6	[165 ; 170)	9	$61+9=70$
7	[170 ; 175)	5	$70+5=75$
8	[175 ; 180)	5	$75+5=80$

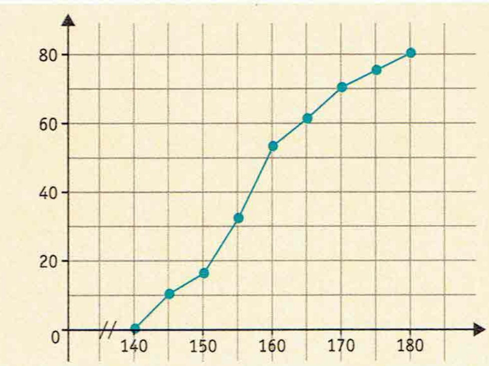
Para armar la tabla de frecuencias acumuladas hay que tener en cuenta cuál es la suma de las frecuencias al finalizar cada intervalo. Así, al finalizar el primer intervalo se ha acumulado una frecuencia de 10. Al finalizar el segundo intervalo se agrega una frecuencia de 6 a las 10 ya acumuladas, haciendo un total de 16, y así sucesivamente.

Claramente, al final del último intervalo se acumula el total de las frecuencias.

En el gráfico se representan los valores de la variable en el eje horizontal y las frecuencias acumuladas en el vertical.

La ***frecuencia acumulada*** de un intervalo es la suma de la frecuencia del intervalo más todas las frecuencias de los intervalos anteriores a él.

Como la variable es continua, no hay información acerca de para qué valores se acumulan las frecuencias, por lo que se supone que todas se acumulan al finalizar el intervalo. Como tampoco se sabe cómo fue el aumento, se graficará con un segmento. Esto equivale a suponer que el incremento fue constante.



© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Este tipo de gráfico muestra los incrementos de las frecuencias a través de las pendientes de los segmentos que lo conforman. Cuanto mayor es la pendiente de un segmento, mayor es el aumento de las frecuencias.

Como el menor crecimiento posible es cero, o sea que las frecuencias se mantengan iguales, puede suceder que el gráfico se mantenga constante (horizontal) de un intervalo a otro. Lo que nunca puede suceder es que el gráfico decrezca.

Entonces, en un gráfico de frecuencias acumuladas, los valores de las ordenadas oscilan entre 0 y el total de las frecuencias. Además, la función nunca decrece, aunque puede haber intervalos en lo que permanece constante.

Un gráfico de ***frecuencias acumuladas*** es aquel que a cada intervalo de clase le asigna las frecuencias acumuladas hasta él. Este tipo de gráficos nunca decrece.

Problema 6

Para hacer un estudio sobre las edades del público que sigue a una banda de música, y ante la imposibilidad de preguntar la edad a todos los concurrentes, se decidió tomar una muestra de 60 personas al azar durante su ingreso al mismo. Las edades registradas fueron:

19	22	17	32	29	16	19	25	20	27
24	23	35	27	23	19	31	25	22	17
22	23	13	23	19	37	16	29	21	24
33	22	17	29	31	20	18	26	26	32
24	23	22	15	24	19	26	18	29	19
15	28	23	32	22	16	28	25	24	20

¿Es posible representar los datos observados como intervalos?

Si bien la cantidad de datos no es demasiado grande como para convertirse en inmanejable, es posible expresarlos como intervalos.

La primera cuestión a decidir es la cantidad de intervalos que se quiere utilizar. La cantidad dependerá de qué se quiere analizar a partir de esta muestra.

Se denomina *rango* de los valores observados a la diferencia entre el mayor y menor de los datos.

Edad mayor = 37 Edad menor = 13 Rango = 37–13 = 24

El ***rango*** de una muestra es la diferencia que existe entre el mayor y el menor de los datos y se calcula restando el mayor y el menor de ellos.

Si se decide construir 6 intervalos, cada uno de ellos tiene que medir 24 : 6 = 4 y entonces los extremos son: 13-17; 17-21; 21-25; 25-29; 29-33 y 33-37. Pero así definidos no se sabe en cuál de ellos ubicar, por ejemplo, al número 21.

Para evitar tener inconvenientes con los extremos muchas veces se consideran valores con algún decimal más que los datos dados. De esa manera, al tener los extremos más decimales que los datos, seguro que no van a coincidir con ninguno de ellos.

Si en este caso se supone que el mínimo valor es 12,5 en lugar de 13 y el máximo 37,5 en lugar de 37, el rango es 37,5 – 12,5 = 25 y cada intervalo medirá 25:6 = 4,166666... Para evitar trabajar con números periódicos se puede tomar como amplitud a 4,17. Si se hubiera redondeado para abajo no se hubiera llegado en el último intervalo a cubrir el máximo dato.

Así, los extremos de los intervalos son:

Extremos	Intervalo
12,5 y 12,5 + 4,17 = 16,67	[12,5 ; 16,67)
16,67 y 16,67 + 4,17 = 20,84	[16,67 ; 20,84)
20,84 y 20,84 + 4,17 = 25,01	[20,84 ; 25,01)
25,01 y 25,01 + 4,17 = 29,18	[25,01 ; 29,18)
29,18 y 29,18 + 4,17 = 33,35	[29,01 ; 33,35)
33,35 y 33,35 + 4,17 = 37,52	[33,35 ; 37,52)

El último intervalo termina en 37,52 en lugar de 37,5 debido al redondeo de la amplitud de cada intervalo.

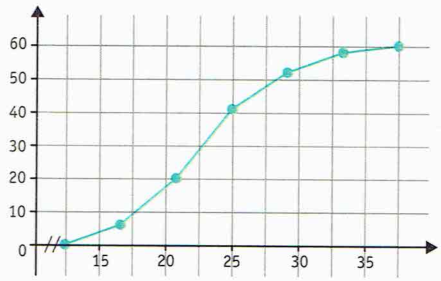
La tabla de frecuencias es entonces:

Intervalo	Frecuencia	Frecuencia acumulada
[12,5 ; 16,67)	6	6
[16,67 ; 20,84)	14	20
[20,84 ; 25,01)	21	41
[25,01 ; 29,18)	11	52
[29,01 ; 33,35)	6	58
[33,35 ; 37,52)	2	60

En este caso la variable en estudio, las edades de los asistentes, es una variable discreta y al expresarla en intervalos se la considera como continua, aunque en realidad no lo sea.

Al trabajar con la última tabla hay una pérdida de información dado que se sabe la frecuencia de todo el intervalo y no de cada valor puntualmente.

Un gráfico de frecuencias acumuladas de este problema pueden ser:



ACTIVIDADES

6. La siguiente tabla muestra el ancho de 20 envoltorios de papel usados para envolver en una fábrica:

Ancho (en cm)	Frecuencia
$0 \leq x < 20$	5
$20 \leq x < 25$	5
$25 \leq x < 30$	7
$30 \leq x < 40$	3

Grafiquen un histograma para representar la variable.

7. Los siguientes valores representan el peso, en gramos, de pequeñas bolsas de galletitas:

47	39	21	30	42	35	44	36	19	52
23	32	66	29	5	40	33	11	44	22
27	58	38	37	48	63	23	40	53	24
47	22	44	33	13	59	33	49	57	30
17	45	38	33	25	40	51	56	28	64

Agrupen los datos en 6 intervalos de clase iguales y muestren la información a través de una tabla de distribución de frecuencias.

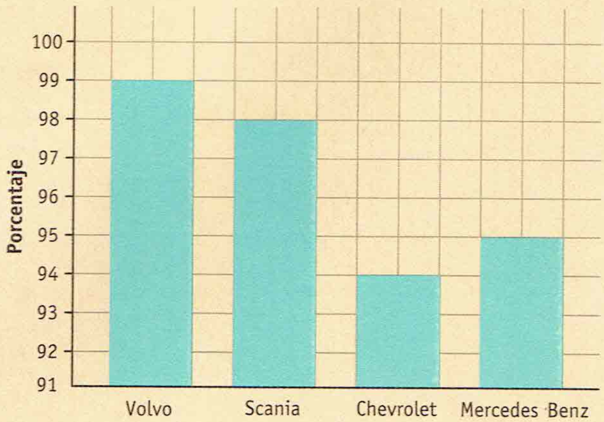
Gráficos que resultan engañosos

Problema 7

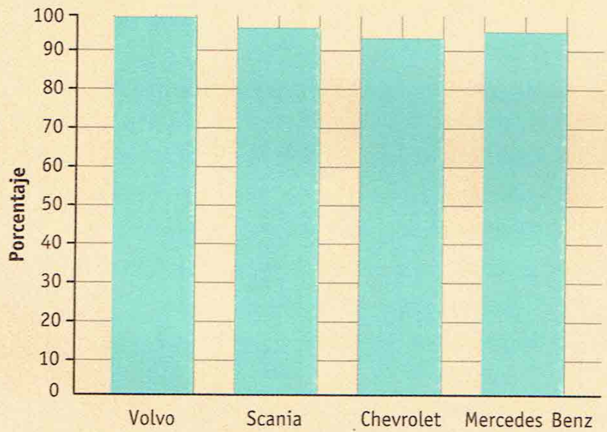
En el diario Campo del día sábado apareció una publicidad de camiones Volvo.

La publicidad asegura que del total de camiones vendidos en los últimos 10 años, Volvo es la marca con mayor porcentaje de camiones que todavía están en uso.

En la publicidad se mostraba el siguiente gráfico.



No se hizo esperar la respuesta de la competencia y en el diario Campo del domingo apareció una publicidad de camiones Scania mostrando, con otro gráfico, la misma información que presentó Volvo, pero desde otro punto de vista.



¿En qué se diferencian estos gráficos? ¿Es distinta la información de cada publicidad? ¿Miente alguna de las dos empresas?

A simple vista los gráficos son diferentes, pero si se presta atención, el eje donde se marcaron los porcentajes del primer gráfico no comienza desde cero.

Los porcentajes de rendimiento varían solamente entre el 94% y el 99%. Visualmente en el primer gráfico esta diferencia parece mucho mayor. En cambio el segundo gráfico muestra lo parejo del rendimiento de las cuatro marcas de camiones encuestadas.

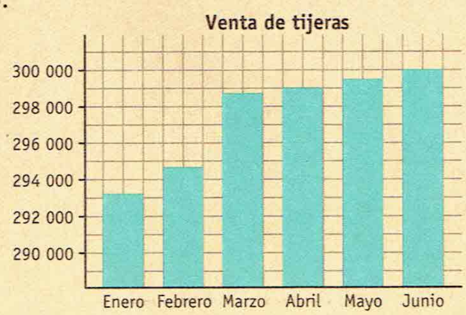
La información de ambos gráficos es la misma, pero presentada desde otro punto de partida. Solamente con cambiar la escala en uno de los ejes, el gráfico parece dar una información que no es realmente correcta. No se puede decir que alguna de las empresas miente, sino que presenta la información de manera tal que la favorezca.

Problema 8

El coordinador de ventas de una fábrica de tijeras, tomó durante el primer semestre del año una serie de medidas para aumentar las ventas; obteniendo los siguientes resultados:

Mes	Tijeras vendidas
Enero	293 254
Febrero	294 674
Marzo	298 747
Abril	299 014
Mayo	299 524
Junio	300 012

Como las ventas fueron en aumento, muy entusiasmado decidió hablar con el gerente de la fábrica para pedirle un aumento de sueldo. Para dicho encuentro confeccionó el siguiente gráfico:



Pero cuando se reunió con el gerente, éste le presento este otro gráfico:

Ante el pedido de aumento el gerente le dijo: –Acá no se ve que las ventas hayan aumentado tanto.

¿Quién de los dos les parece que tiene razón? ¿Por qué?

En principio, los dos tienen razón ya que no se cambiaron los datos. La diferencia está nuevamente en un problema de escala. En el gráfico del empleado cada división del eje vertical corresponde a 2000 tijeras, en cambio en el gráfico del gerente cada división corresponde a 5000 tijeras. Esta diferencia de escalas hace que en el primer gráfico el crecimiento parezca mucho mayor que en segundo.

Medidas de tendencia central

Las medidas de tendencia central son una manera de resumir los datos obtenidos, en un representante de los datos de los que se dispone.

Hay varias maneras de establecer dicho representante. En los siguientes problemas desarrollaremos algunas de ellas.

Problema 9

La siguiente tabla muestra los puntos obtenidos por los equipos de fútbol que arriesgan la permanencia en primera división en el torneo apertura 2005, pasadas 6 fechas:

Equipo	Olimpo (Bahía Blanca)	Instituto (Córdoba)	Gimnasia (Jujuy)	Tiro Federal (Rosario)
2003/04	39	------	------	------
2004/05	43	42	------	------
2005/06	4	4	4	0
Puntos	86	46	4	0
Partidos Jugados	81	44	5	6
Promedio	1,061	1,045	0,800	0,000

¿Cómo se calculó el promedio?

Para responder esta pregunta es conveniente aclarar algunas cuestiones que aparecen en la tabla. En primer lugar, Gimnasia y Tiro Federal no han participado en los torneos 2003/4 ni 2004/5. Es decir, estaban en el Nacional B y ascendieron a Primera A. Por eso no se le otorgan puntos. Del mismo modo Instituto en el torneo 2003/04.

En cada fila que figuran los años de los torneos, se anotaron los puntos obtenidos por cada equipo, a razón de 3 por partido ganado, 1 por partido empatado y 0 por partido perdido. Los puntos, indican el total de puntos sumados en los últimos tres torneos. El promedio se determina mediante el siguiente cálculo:

$$\frac{\text{cantidad de puntos}}{\text{cantidad de partidos jugados}}$$

Es así que,

Olimpo tiene $\frac{86}{81} = 1{,}061$ de promedio;

Instituto tiene un promedio de $\frac{46}{44} = 1{,}045$;

Gimnasia tiene un promedio de $\frac{4}{5} = 0{,}800$ y

Tiro Federal tiene un promedio de $\frac{0}{6} = 0{,}000$.

Los valores obtenidos indican la cantidad promedio de puntos que cada equipo ha tenido por partido.

La ***media***, también llamada ***media aritmética***, es el promedio de un conjunto de datos. Se obtiene sumando los valores y dividiendo por la cantidad total de números.
El símbolo que se utiliza para la media es: $\overline{x}$

De seguir con estos promedios, tanto Tiro Federal como Gimnasia de Jujuy descenderán directamente al Nacional B.

El promedio también se conoce con el nombre de *media* o *media aritmética*. Para calcular la media se suman todos los datos y se divide por el número de datos registrados.

Problema 10

En una empresa el registro de sueldos es:

500	500	500	525	525	530	530	535	600	600	610	610
620	620	800	800	820	900	1000	1300	2000	3000	5000	

Si la empresa toma un empleado nuevo, ¿cuál será el sueldo más factible que cobre?

Si se ordenan los datos en una tabla de frecuencias se obtiene:

Sueldo	500	525	530	535	600	610	620	800	820	900	1000	1300	2000	3000	5000
Cantidad de empleados	3	2	2	1	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1

Para calcular el promedio o media aritmética de los sueldos, se puede realizar el siguiente cálculo:

$$\overline{x} = \frac{500 \cdot 3 + 525 \cdot 2 + 530 \cdot 2 + 535 + 600 \cdot 2 + 610 \cdot 2 + 620 \cdot 2 + 800 \cdot 2 + 820 + 900 + 1000 + 1300 + 2000 + 3000 + 5000}{23}$$

$$\overline{x} = \frac{23\,425}{23}$$

$$\overline{x} = 1018{,}48$$

Cuando un valor se repite más de una vez, es decir si tiene frecuencia mayor que 1, al calcular la media no es necesario sumarlo tantas veces como aparezca. Es posible multiplicarlo por su frecuencia. Asimismo, la cantidad de elementos de la muestra es la suma de todas las frecuencias absolutas.
La fórmula para calcular la media en este caso es entonces:

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

La ***moda*** es el valor de mayor frecuencia entre el conjunto de datos.

En este caso la media no es representativa del total de los sueldos. La mayoría de los sueldos está muy por debajo de este promedio.

19 sueldos quedan por debajo de la media y solamente 4 quedan por arriba de ella. La desviación se produce porque es muy grande la diferencia entre muchos sueldos bajos y pocos sueldos muy altos.

Por eso hay que tener cuidado y leer atentamente cuando, a partir de alguna encuesta se llega a conclusiones apresuradas o tendenciosas.

Se debe buscar entonces, otra medida que resulte más representativa que la media.

A partir de los datos que se proponen, el sueldo que es cobrado por más cantidad de empleados, es decir el de mayor frecuencia, es $ 500. A este sueldo se lo denomina *moda* de la variable sueldo.

Nuevamente, hay demasiados sueldos muy por encima de la moda.

Para un nuevo empleado sería conveniente considerar otra medida más representativa que las dos anteriores.

Un valor posible es considerar un dato intermedio. En este caso, como hay 23 datos, el ubicado en la posición 12 los divide en dos grupos iguales y aparece señalado en rojo:

500, 500, 500, 525, 525, 530, 530, 535, 600, 600, 610, 610,
620, 620, 800, 800, 820, 900, 1000, 1300, 2000, 3000, 5000.

Este valor intermedio recibe el nombre de *mediana*.

Para este problema la mediana es el valor más representativo de los datos analizados. Por lo tanto, es posible suponer que un empleado nuevo tiene más probabilidades de cobrar alrededor de $ 610, que un sueldo más alto.

La ***mediana*** es el valor central cuando los datos están ordenados de menor a mayor. La mediana deja a lo sumo la mitad de los datos por encima como por debajo de ella.

Problema 11

Se encuestó a un grupo de 20 madres de Puerto Rico y se les preguntó cuantos hijos tenían. Las respuestas fueron:

2	5	3	1	4	5	3	2	4	2
2	6	4	1	3	2	4	2	1	1

¿Cuál es la moda y la mediana de esta muestra?

Para poder determinar la moda se realiza una tabla de frecuencias de cada dato:

Cantidad de hijos	Frecuencia
1	4
2	6
3	3
4	4
5	2
6	1

Al observar la tabla se ve que el dato de mayor frecuencia es: 2 hijos. La ***moda*** es, entonces: 2 hijos.

Para determinar la ***mediana*** se ordenan los datos obtenidos de menor a mayor:

1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 5 ; 5 ; 6

Como es un número par de datos no hay un dato que quede en el medio, la mediana es entonces el promedio de los dos datos que quedan en el centro de la muestra.

En este caso, que hay 20 datos, los del medio son los que se ubican en los lugares 10 y 11, porque dejan 9 datos de cada lado.

1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 5 ; 5 ; 6

La mediana es entonces 2,5 hijos.

Si bien no es un valor posible de la variable, divide a los valores observados en dos grupos, cada uno de los cuales tiene a lo sumo la mitad de los casos.

Una pregunta que podría plantearse es por qué la mediana no podría haber sido, por ejemplo, 2,3, que también divide a los valores observados en dos partes con a lo sumo el 50% de los casos.

En realidad, 2,3 sería una posibilidad, pero para no dejar la respuesta librada al criterio del que está haciendo los cálculos es que se acuerda tomar el valor intermedio.

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Problema 12

Las estaturas de 50 personas adultas se muestran en la siguiente tabla:

Estatura (cm)	Frecuencia
$169{,}5 \leq x < 174{,}5$	8
$174{,}5 \leq x < 179{,}5$	17
$179{,}5 \leq x < 184{,}5$	14
$184{,}5 \leq x < 194{,}5$	11

a. ¿Cuál es la estatura más frecuente?
b. ¿Cuál es la estatura media de esta muestra?
c. ¿Cuál es la mediana de la muestra?

En una variable cuantitativa continua se llama ***intervalo modal*** al intervalo de mayor frecuencia.

Como todos los intervalos tienen igual amplitud, la moda estará en el intervalo de mayor frecuencia. En este caso, es el intervalo de estatura entre 174,5 y 179,5 cm. La moda, no es un valor de la variable, sino un intervalo llamado, *intervalo modal*.

Se denomina ***marca de clase*** al punto medio entre los extremos de cada intervalo de clase.

Cuando la variable está expresada en intervalos, no se sabe a qué valor corresponden las frecuencias, con lo cual no es posible calcular la media aritmética y la mediana. En ese caso, se toma un representante del intervalo y se le asignan todas las frecuencias a él. Por supuesto, esta manera de calcular la media supone una pérdida de información, pero al haber muchos números no hay otra opción.

Es así que se elige como representante al punto medio de cada intervalo de clase, es decir al promedio entre el mínimo y máximo de cada intervalo. Ese número se llama *marca de clase*.

Para esta distribución de frecuencias, las marcas de clase de cada intervalo son:

Estatura (cm)	Marca de clase	Frecuencia
$169{,}5 \leq x < 174{,}5$	172	8
$174{,}5 \leq x < 179{,}5$	177	17
$179{,}5 \leq x < 184{,}5$	182	14
$184{,}5 \leq x < 194{,}5$	189,5	11

Esto permite ahora considerar la variable como si fuera discreta, tomando los valores 172; 177; 182; 189,5 con frecuencias 8; 17; 14 y 11, respectivamente.

Para hallar la media de esta variable se multiplica cada marca de clase por la frecuencia correspondiente y se lo divide por el tamaño de la muestra, o sea la suma de todas las frecuencias. Multiplicar por la frecuencia es lo mismo que sumar la marca de clase tantas veces como aparecen los datos correspondientes a cada intervalo.

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

La media es entonces,

$$\overline{x} = \frac{172 \cdot 8 + 177 \cdot 17 + 182 \cdot 14 + 189{,}5 \cdot 11}{8 + 17 + 14 + 11} = 180{,}35$$

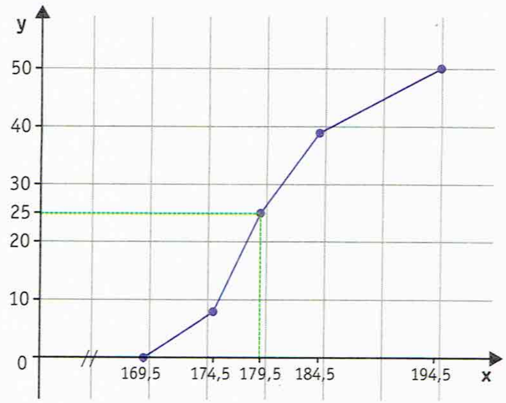
¿Cómo puede calcularse la mediana de esta distribución?

Como la variable es continua, no se pueden enumerar y ordenar sus valores para elegir el del medio. Una herramienta útil para esto es el gráfico de frecuencias acumuladas. La mediana es el valor que acumule la mitad de las frecuencias.

Si se agrega a la tabla de frecuencias la columna de frecuencias acumuladas se obtiene:

Estatura (cm)	Marca de clase	Frecuencia	Frecuenciaacumulada
$169{,}5 \leq x < 174{,}5$	172	8	8
$174{,}5 \leq x < 179{,}5$	177	17	25
$179{,}5 \leq x < 184{,}5$	182	14	39
$184{,}5 \leq x < 194{,}5$	189,5	11	50

El gráfico de frecuencias acumuladas es:



La mitad de las frecuencias es 50 : 2 = 25. Se busca, entonces el valor que acumula una frecuencia de 25. En este caso, es 179,5, quien representa la mediana de esta distribución.

8. Las siguientes tablas de distribución de frecuencias muestran las notas, expresadas como porcentajes, de los alumnos de un curso.

Nota (en %)	Frecuencia
$0 \leq x < 30$	5
$30 \leq x < 40$	5
$40 \leq x < 50$	7
$50 \leq x < 60$	6
$60 \leq x < 70$	5
$70 \leq x < 75$	7
$75 \leq x < 90$	4
$90 \leq x < 100$	3

¿Cuáles fueron las notas más frecuentes entre los alumnos de este curso? ¿Es posible responder esta pregunta apoyándose en un gráfico?

9. El entrenador del equipo de básquet del club de Villa María realizó la siguiente tabla para estudiar el rendimiento de un jugador a lo largo del campeonato provincial. En una fila colocó la cantidad de tantos y en la otra fila en cuántos partidos hizo esa cantidad:

Tantos	5	8	10	15	20	25
Partidos	4	6	5	3	2	1

a. ¿Cuántos partidos jugó en el equipo?
b. ¿En cuántos partidos hizo más de 10 tantos?
c. Calculen la moda y la mediana de los tantos convertidos.
d. ¿Cuál es el promedio de tantos de todos los partidos?

ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN

10. La tabla proporcionada por el INDEC muestra las cantidades de alumnos por niveles de todo el país y de las provincias del Litoral: Corrientes, Entre Ríos y Misiones.

	Total del país	Corrientes	Entre Ríos	Misiones
Total	9 964 095	295 631	325 811	299 758
Nivel inicial	1 258 420	33 317	35 939	30 039
EGB ciclos 1 y 2	4 817 088	161 278	157 028	174 942
EGB ciclo 3	1 744 294	48 497	64 347	53 977
Polimodal / medio	1 649 332	40 237	47 590	32 975
Superior no universitario	494 961	12 302	20 907	7 825

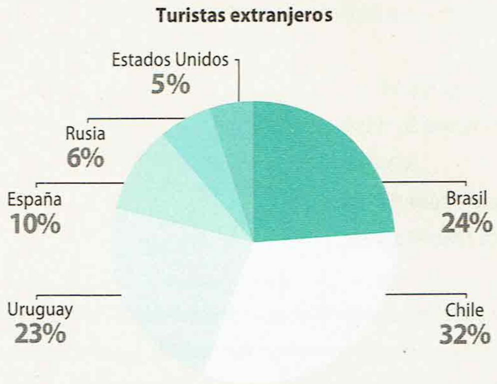
a. ¿Cuál de las provincias tiene mayor cantidad de alumnos en el nivel inicial?

b. ¿Cuál tiene menor cantidad de alumnos en EGB 1 y 2?

c. ¿Qué porcentaje de alumnos de cada provincia estudia en el nivel superior no universitario?

d. ¿Qué porcentaje de alumnos de todo el país estudia en el nivel superior no universitario?

11. El gráfico de torta muestra los porcentajes de extranjeros ingresados al país en el último fin de semana.



a. ¿Cuál es la población en estudio?

b. ¿Qué tipo de variable se está estudiando?

c. Indiquen en el gráfico que ángulo le corresponde a cada sector circular.

d. Si en total ingresaron 907 turistas, ¿cuántos turistas de cada nacionalidad ingresaron al país?

12. Una empresa quiere saber las edades promedio del público que consume la bebida que fabrica. Se consultó a 50 personas que toman la bebida cuál era su edad. Las respuestas fueron:

45	72	42	32	27	16	22	32	27	47
54	67	35	27	23	19	31	25	22	17
22	23	34	23	39	36	46	29	21	24
33	22	57	29	31	20	18	26	26	32
24	23	22	65	24	58	26	58	29	59

a. ¿Qué tipo de variable es la edad?

b. ¿Cuál es la mayor y la menor de las edades registradas?

c. Determinen intervalos de clase apropiados.

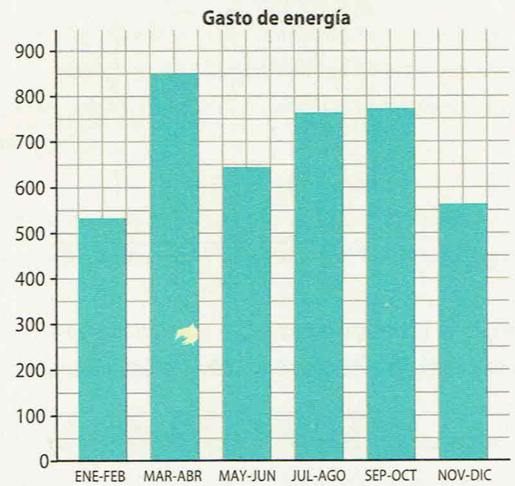
d. Realicen una tabla de frecuencias absolutas y acumuladas de los intervalos de clase determinados.

e. Realicen un histograma que represente las frecuencias absolutas de los intervalos.

f. Calculen las marcas de clase de cada intervalo.

g. Calculen la media, la mediana y la moda de esta distribución.

13. El gráfico representa el consumo de kilowats/hora de una familia durante un año completo, teniendo en cuenta que la medición se realiza por bimestre.



a. ¿Cuántos kwh consumió en cada trimestre?

b. ¿Cuál fue el trimestre de mayor consumo?

14. La cantidad de artículos vendidos en el primer semestre del año 2005 en un comercio se presenta en la siguiente tabla:

ENERO	FEBRERO	MARZO	ABRIL	MAYO	JUNIO
27	31	33	34	36	41

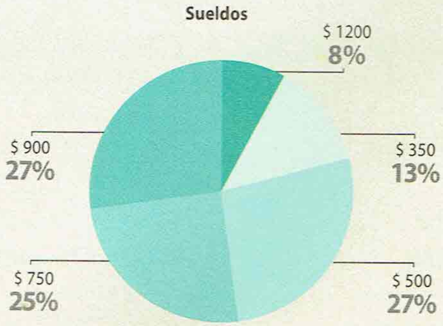
Si fueras el gerente del comercio y quisieras mostrarle al dueño, mediante un gráfico, cuánto han aumentado las ventas y que él

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

crea que ha sido una cantidad mayor que la real, pero sin falsear la información, ¿qué gráfico armarías?

15. El siguiente gráfico muestra los sueldos de los 60 trabajadores de una empresa.



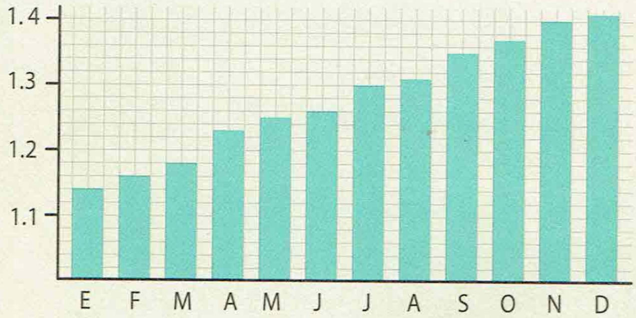
a. ¿Cuántos trabajadores cobran cada uno de los sueldos?
b. ¿Cuál es la mediana de la muestra?
c. ¿Cuál es la media de la muestra?
d. ¿Coinciden media y mediana? ¿Por qué?

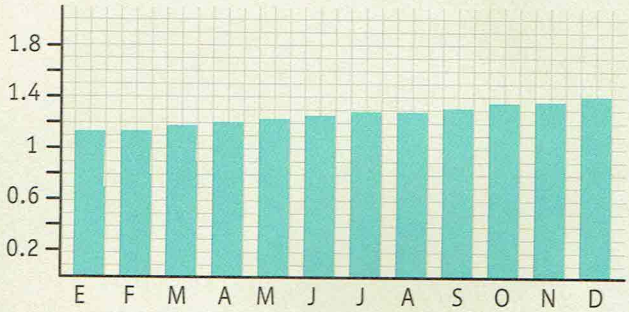
16. Se encuestaron a los 850 alumnos de una escuela para saber de qué deporte son simpatizantes, los resultados de la encuesta se volcaron a la siguiente tabla:

DEPORTE	CANTIDAD DE ALUMNOS
Fútbol	250
Rugby	150
Tenis	100
Voley	200
Handbol	60
Patín	50
Carrera	20
Salto	10
Gimnasia	10
TOTAL	850

a. ¿Qué tipo de variable es?
b. Realicen una tabla donde se visualice la frecuencia relativa y el porcentaje de cada deporte.
c. Realicen un gráfico de barras de la distribución.
d. ¿Cuál es la moda de los datos de esta población?

17. Los siguientes gráficos muestran la variación del precio de la leche en el último año:





¿Si fueran del gobierno, qué gráficos mirarían? ¿Y si fueran de la oposición?

18. La calificación de una prueba de inglés, que se mide de 0 a 100 puntos, realizada a 50 alumnos fue:

20	56	60	42	23	62	18	29	79	10
32	25	38	82	15	69	65	18	88	9
15	15	70	79	80	35	54	72	96	83
61	36	92	15	65	49	54	92	70	15
93	80	55	25	60	18	39	84	50	92

a. Dividan los datos en intervalos de clase.
b. Realicen la tabla de frecuencias y un gráfico de frecuencias acumuladas.
c. Realicen un histograma donde se visualice la tabla de frecuencias.
d. ¿Cuál es el intervalo modal?
e. ¿Cuál es la media aritmética y cuál es la mediana?

AUTOEVALUACIÓN

1. Se encuestaron a los 824 alumnos de una escuela para saber de qué club de fútbol son simpatizantes, los resultados de la encuesta se volcaron a la siguiente tabla:

EQUIPO	SIMPATIZANTES
BOCA	231
RIVER	206
QUILMES	109
INDEPENDIENTE	99
BANFIELD	61
RACING	52
LANÚS	38
SAN LORENZO	15
VÉLEZ	8
CHACARITA	5
TOTAL	824

A. Las frecuencias relativas de Boca, River y Quilmes son, respectivamente:

- **a** 0,05 ; 0,06 y 0,07
- **b** 0,18 ; 0,17 y 0,16
- **c** 2,31 ; 2,06 y 1,09
- **d** 0,28 ; 0,25 y 0,13

B. La moda en la tabla es:

- **a** 824
- **b** Boca
- **c** Chacarita
- **d** Ninguna de las anteriores

2. La calificación de una prueba de inteligencia, que se mide de 0 a 100 puntos, realizada a 65 alumnos fue:

76	45	98	74	23	56	87	33	43	50	51	62	60
45	73	67	78	53	48	91	78	49	43	32	46	36
76	88	93	45	78	53	89	59	56	57	39	42	49
99	87	56	35	39	42	76	55	22	87	41	77	43
42	64	85	83	99	52	98	53	85	29	37	64	53

A. Una tabla posible de frecuencias sería:

a

Puntaje	(0;10]	(10;20]	(20;30]	(30;40]	(40;50]	(50;60]	(60;70]	(70;80]	(80;90]	(90;100]
Alumnos	0	0	3	7	15	13	4	9	8	6

b

Puntaje	(0;10]	(10;20]	(20;30]	(30;40]	(40;50]	(50;60]	(60;70]	(70;80]	(80;90]	(90;100]
Alumnos	0	0	4	6	15	12	5	9	10	4

c

Puntaje	(0;15]	(15;30]	(30;40]	(40;50]	(50;65]	(65;70]	(60;70]	(70;80]	(80;90]	(90;100]
Alumnos	0	3	7	15	13	3	4	9	8	6

B. El intervalo modal es:

- **a** (0 ; 10]
- **b** (50 ; 60]
- **c** (40 ; 50]
- **d** Ninguno de los anteriores.

C. La media aritmética es:

- **a** 59,92
- **b** 55
- **c** 45
- **d** Ninguna de las anteriores.

3. El entrenador del equipo de handbol del club de Villa Adela, Santa Fe, realizó la siguiente tabla para estudiar el rendimiento del equipo a lo largo del campeonato interclubes de Santa Fe. En una fila colocó la cantidad de goles y en la otra fila en cuántos partidos hicieron esa cantidad de goles:

Goles	0	1	2	3	4	5
Partidos	4	6	5	3	2	1

A. Hicieron más de tres goles en:

- **a** 1 partido.
- **b** 3 partidos.
- **c** En ningún partido.

B. La mediana de los goles convertidos es

- **a** 2 goles.
- **b** 3 goles.
- **c** entre 2 y 3 goles.
- **d** Ninguna de las anteriores.

C. El promedio de goles de todos los partidos es aproximadamente:

- **a** 1 gol por partido.
- **b** 2 goles por partido.
- **c** ningún gol por partido.
- **d** 0,75 goles por partido.

© Tinta Fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

ANEXOS

CONTENIDOS

- Progresiones aritméticas
- Término general
- Suma de términos
- Las sucesiones como funciones en el conjunto de los números naturales

Una sucesión es una secuencia de números que comienza con un primer número, siguen con el segundo, uno a continuación del otro. Por ejemplo: 2 ; 5 ; 7 ; 3 ; 4 ; ... donde el primer término de la sucesión es 2, el segundo es 5, el tercero es 7 y así sucesivamente. En general los términos se llaman a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4 ; a_5 ;...; a_n ;... donde el subíndice informa el lugar que ocupa ese término en la sucesión. Así, el término a_1, es el primer término de la sucesión, el término a_5, ocupa el lugar 5 en la sucesión, el término a_n ocupa el lugar n en la sucesión. En el ejemplo anterior se tiene que $a_1 = 2$; $a_2 = 5$; $a_3 = 7$; $a_4 = 3$; $a_5 = 4$. En este anexo se estudiará un tipo particular de sucesiones que son las progresiones aritméticas.

SUCESIONES ARITMÉTICAS

Problema 1

Héctor se está entrenando para una competencia de maratón. Para conseguir un mejor rendimiento comienza corriendo 1500 metros y todos los días agrega 1000 metros más.

¿Es posible saber cuántos metros tendrá que recorrer al séptimo día? ¿Y al décimo día? ¿Qué día llegará a recorrer 13 500 metros?

Para poder comenzar a resolver el problema planteado será necesario hacer el siguiente análisis:

Cada día Héctor agrega 1000 metros más al recorrido realizado el día anterior. Si el primer día hizo 1500 metros, el segundo día hará 1500 + 1000 = 2500. Pero al tercer día recorrerá 1000 metros más que el segundo día, es decir, 2500 + 1000 = 3500 m.

Los números que corresponden a los metros recorridos forman la siguiente secuencia:

1500 - 2500 - 3500 - 4500...

Estos números forman una *sucesión*.

Una *sucesión* es una secuencia de números que comienza con un primer número, sigue con el segundo, etc., uno a continuación del otro.

En esta situación hay un comportamiento que se repite.

Los metros recorridos en cierto día serán igual a los metros recorridos el día anterior más 1000 metros.

Si se ordenan los metros recorridos en cada día, se obtiene la siguiente tabla:

Número de día	Metros recorridos	
1	1500	+1000
2	2500	+1000
3	3500	+1000
4	4500	

Como **siempre** es posible obtener un término de esta sucesión si se suma 1000 al término anterior. Si se suma una cantidad de miles de metros a los recorridos el primer día se llega a conocer los metros que corre Héctor cualquier día. Como el séptimo día pasaron seis desde el primero, habrá aumentado 6000 metros, por lo tanto el día 7 recorre 7500 m. Para saber cuánto recorre el décimo día se suman 9000 m a los 1500 m del primer día y se obtiene que recorre 10 500 m.

Además como 13 500 m es 12 000 m más que 1500 m, tendrán que pasar 12 días para que recorra 12 000 m más. Es decir que el día 13 recorre 13 500 m.

Es posible relacionar, entonces, cualquier término de la sucesión con el primero.

¿De qué manera se podrá hacer?

Esta pregunta es la que da origen al próximo problema, pero mientras tanto es posible decir que se llama *término general de una sucesión* a una fórmula que hace posible conocer el valor de un término cualquiera de la sucesión, en función del primer término.

Progresiones aritméticas

Problema 2

Beatriz decide ahorrar por mes \$ 350 de su sueldo. Si ya tenía guardados \$ 1200 y no los utiliza , ¿a cuánto ascenderán sus ahorros al término de seis meses? ¿Y al término de 15 meses? ¿Y si pasaron 40 meses?

¿Es posible hallar una fórmula que permita anticipar cuánto dinero tendrá ahorrado al término de una cantidad cualquiera de meses?

Una *progresión aritmética* es una sucesión en la cual cada término es la suma del término anterior y un número fijo llamado *razón*.

Si se llama d a la razón de una progresión aritmética y a_{n-1} al término anterior de a_n se verifica que:

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Al igual que en el problema 1, es posible modelizar esta situación a través de una sucesión donde cada término representa el ahorro en ese mes. Como cada término se obtiene *siempre* sumando una constante al término anterior es una *progresión aritmética*.

Para poder comenzar a responder las preguntas del problema, es posible realizar una tabla como en el problema 1:

Número de mes	Cantidad de dinero ahorrado
1	1200
2	1550
3	1900
4	2250
5	2600
6	2950

De este modo, se sabe que al sexto mes tendrá ahorrado \$ 2950, este número es igual a lo que tenía el primer mes más \$ 350 por cada mes que pasó.

Para saber el importe al término de 15 meses, el uso de la tabla se complica. Lo mismo sucede con el mes 40, pues hacer una tabla hasta el mes 40 es poco práctico.

Entonces, *¿habrá alguna forma de saber cuánto dinero tendrá ahorrado en el mes 15 y en el mes 40 sin necesidad de recurrir a una tabla?*

En principio se sabe que el ahorro de un mes es igual al ahorro del mes anterior más \$ 350, y que el ahorro del mes anterior es igual al mes anterior a ese mes más \$ 350.

En la tabla se puede analizar la forma en que se calculó cada importe:

Número de mes	Cantidad de dinero ahorrado
1	1200
2	1200 + 350
3	1200 + 350 + 350 = 1200 + 350.2
4	1200 + 350 + 350 + 350 = 1200 + 350.3
5	1200 + 350 + 350 + 350 + 350 = 1200 + 350.4
6	1200 + 350 + 350 + 350 + 350 + 350 = 1200 + 350.5

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

En el mes 15 tendrá \$ 1200 del mes inicial más \$ 350 por cada uno de los 14 meses que pasaron entre el mes 15 y el mes 1, es decir,

$$1200 + 350 \cdot 14 = 6100$$

Del mismo modo, en el mes 40 tendrá ahorrado

$$1200 + 350 \cdot 39 = 14\,850$$

Término general de una progresión aritmética

Es posible pensar a esta progresión del siguiente modo.
Si se llama:

a_1 al dinero ahorrado hasta el mes 1;
a_2 al dinero ahorrado hasta el mes 2;
a_3 al dinero ahorrado hasta el mes 3;
a_4 al dinero ahorrado hasta el mes 4.

En general:

a_n es el dinero ahorrado hasta el mes n.

En la sucesión del problema 2 resulta que:

$$a_1 = 1200\ ;\ a_2 = 1550\ ;\ a_3 = 1900\ ;\ a_4 = 2250$$
$$a_5 = 2600\ ;\ a_6 = 2950\ ;\ \ldots a_{15} = 6100\ ;\ \ldots a_{40} = 14\,850$$

a_n es igual a 1200 más 350 por cada mes que pasó desde el mes 1 hasta el mes n, es decir, $n-1$ meses. Por lo tanto:

$$a_n = 1200 + 350 \cdot (n - 1)$$

Con esta fórmula general, es posible calcular el ahorro que tendrá cualquier mes sin necesidad de recurrir a una tabla. Se obtiene de este modo el *término general de la sucesión*.

Si en una progresión aritmética d es la razón y a_1 el primer término, el término general será:
$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$

1. Determinen si las siguientes sucesiones finitas son o no progresiones aritméticas y expliquen por qué.

a. $\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{5}$

b. 3,5 ; 5,8 ; 8,1 ; 10,4 ; 12,7

c. 6,1 ; 8,2 ; 10,3 ; 12,5 ; 14,7 ; 17

d. 2 ; 5 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17

e. $\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{32}$

2. Calculen la razón y el término general para cada una de las siguientes progresiones aritméticas:

a. 9 ; 12 ; 15 ; 18 ; 21...

b. 7 ; 12 ; 17 ; 22 ; 27 ...

c. 4 ; 11 ; 18 ; 25 ; 32 ...

d. $\frac{1}{2};\ \frac{5}{2};\ \frac{9}{2};\ \frac{13}{2}$ ....

3. Juan tiene guardados 23 discos compactos. Decide que va a comprar 3 por mes.

a ¿Al cabo de cuántos meses logrará tener 50 discos compactos? ¿Y 80?

b. ¿Será cierto que nunca podrá tener justo 100 discos compactos?

4. El término general de una sucesión viene dado por la siguiente fórmula:

$$a_n = 135 + 25\,(n - 1)$$

a. ¿Es cierto que el término $a_{20} = 610$?

b. ¿Para qué valor de n la expresión vale 310?

c. ¿Será cierto que los términos de esta sucesión siempre terminan en 0 o en 5? ¿Por qué?

Cálculo de diferentes términos de una progresión aritmética

Problema 3

Marcia tiene una calculadora que no es científica. Anotó el número 23; luego le sumo 45 y presionó la tecla =. En el visor apareció el número 68. Continuó presionado la tecla = y en el visor aparecieron sucesivamente los siguientes números: 113; 158; 203; 248; 293; 338; 383; 428; 473; 518; 563; 608; 653; 698.

¿Esta sucesión es una progresión aritmética? ¿Es posible hallar una fórmula general para anticipar qué número aparecerá en el visor luego de apretar 236 veces el =?

En principio, hay que analizar si la sucesión es o no una progresión aritmética.

Para que resulte ser una progresión aritmética es necesario que cada término se obtenga sumando siempre la misma cantidad al término anterior. En este caso, al presionar siempre la tecla = lo que hace la calculadora es volver a sumar 45, por lo tanto resulta ser una progresión aritmética donde la razón es 45, es decir, $d = 45$.

Por otro lado, se sabe que una progresión aritmética tiene término general

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$$

Como Marcia parte del número 23, resulta $a_1 = 23$. Con esta información y con la que se obtuvo anteriormente de $d = 45$ se obtiene:

$$a_n = 23 + 45 \cdot (n - 1)$$

El lugar 237 de la sucesión, o sea luego de apretar 236 veces la tecla =, se obtiene:

$$a_{237} = 23 + 45 \cdot (237 - 1) = 23 + 45 \cdot 236 = 23 + 10\,620 = 10\,643$$

Problema 4

¿Cuál es la cantidad de términos de una progresión aritmética si se sabe que el primer término es 4, el último es 40 y su razón es 3?

Como el primer término es 4, entonces $a_1 = 4$.

Por otro lado, el último término es 40, si se lo llama a_n, $a_n = 40$. Además $d = 3$. Lo que se está buscando es la cantidad de términos, esto equivale a conocer el lugar del último término, es decir, n.

Para esto es posible utilizar la fórmula del término general:

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1) = 4 + 3 \cdot (n - 1) = 40$$

si se despeja n se obtiene

$$4 + 3 \cdot (n - 1) = 40 \Leftrightarrow 3 \cdot (n - 1) = 36 \Leftrightarrow n - 1 = 12 \Leftrightarrow n = 13$$

Por lo tanto, esta progresión aritmética tiene 13 términos.

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Cantidad mínima de datos necesarios para hallar el término general

Problema 5

Si se sabe que una sucesión es una progresión aritmética, ¿cuántos datos se necesitan conocer para hallar su término general?

Ya se conoce que el término general de una progresión aritmética se calcula mediante la fórmula:

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$$

Si se quiere reconstruir la sucesión será necesario solamente conocer a_1 y d.

Como se estudió en el capítulo de sistemas de ecuaciones, cuando se tienen dos incógnitas resulta necesario plantear un sistema de ecuaciones lineales.

En principio, alcanza con plantear dos ecuaciones para hallar los valores de a_1 y de d, que son las incógnitas del sistema.

Por ejemplo, si se tiene el término $a_{15} = 272$ y el término $a_{27} = 500$ se obtiene:

$$a_{15} = a_1 + d \cdot (15 - 1) = 272$$
$$a_{27} = a_1 + d \cdot (27 - 1) = 500$$

Es posible plantear el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a_1 + d \cdot 14 = 272 \\ a_1 + d \cdot 26 = 500 \end{cases}$$

donde las incógnitas son a_1 y d.

Si se resuelve este sistema por alguno de los métodos analizados en el capítulo de sistemas de ecuaciones resulta:

$$a_1 = 6 \quad \text{y} \quad d = 19$$

Con dos términos de la progresión aritmética es posible hallar el término general.

Por lo tanto, el término general de esta sucesión es:

$$a_n = 6 + 19 \cdot (n - 1)$$

5.

1	2	3
***	***	***
**	***	***
	**	***
		**

Cada columna se completa siguiendo la regla de agregar 3 asteriscos más a la columna anterior.

a. ¿Cuántos asteriscos habrá en la décima columna?

b. Calculen cuántos asteriscos habrá en la columna n.

6. Se sabe de una progresión aritmética que su primer término es 120 y su razón es 15. ¿Cuál es el valor del término a_{17}?

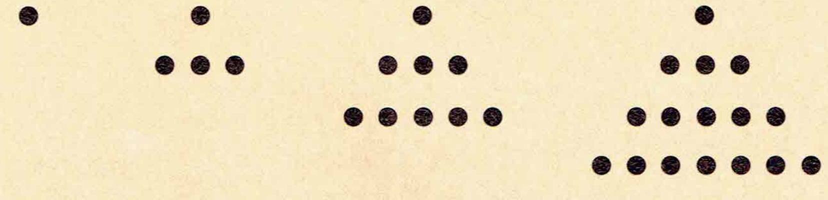
7. ¿Cuántos múltiplos de 5 hay entre los números 100 y 300, incluidos el 100 y el 300?

8. ¿Cuántos números hay entre 9 y 716 que, al dividirlos por 7, el resto sea 2, contando el 9 y el 716?

Suma de términos de una progresión aritmética

Problema 6

Se disponen bolitas en filas armando triángulos de la siguiente manera.



Se quiere conocer la cantidad de bolitas que se necesitarán para completar un triángulo con 6 filas.

En principio es posible pensar a cada fila como un término de una progresión aritmética donde la fila 1 es el término a_1 que es igual a 1 pues tiene 1 bolita. En la fila 2, es decir, a_2 hay 2 bolitas más que en la fila 1, por lo tanto a_2 es igual a 3. Así se obtiene una progresión aritmética de razón 2 y término general

$$a_n = 1 + 2 \cdot (n - 1)$$

En un triángulo de 6 filas se obtiene por cada fila

$$a_1 = 1 \;;\; a_2 = 3 \;;\; a_3 = 5 \;;\; a_4 = 7 \;;\; a_5 = 9 \;;\; a_6 = 11$$

Se llama S_n a la suma de los n términos de una sucesión.

Para conocer cuántas bolitas habrá en el triángulo será necesario sumar

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$

En este caso es sencillo pues 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36.

En este caso resulta $S_6 = 1+3+5+7+9+11 = 36$

Si se analizan algunas relaciones que no son del todo evidentes,

a_1	1
a_2	3
a_3	5
a_4	7
a_5	9
a_6	11

$a_2 + a_5 = 12$ $\quad$ $a_3 + a_4 = 12$ $\quad$ $a_1 + a_6 = 12$

se puede observar que para pasar de a_1 a a_6 fue necesario sumar 5 veces la razón $d = 2$.

De a_1 a a_2 se suma una vez d, es decir, $a_2 = a_1 + d$; pero de a_6 a a_5 se resta una vez d, por lo tanto $a_5 = a_6 - d$.

Entonces, $a_2 + a_5 = (a_1 + d) + (a_6 - d) = a_1 + a_6$.

Lo mismo sucede con a_3 y a_4. Como a_3 es a_1 más 2 veces d y a_4 es a_6 menos 2 veces d, se obtiene $a_3 + a_4 = (a_1 + 2 \cdot d) + (a_6 - 2 \cdot d) = a_1 + a_6$

© Tinta fresca ediciones s. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

En general, cuando se tiene una cantidad finita de términos de una progresión aritmética, como en el problema, es posible considerar términos extremos: el primer término y el último término dado. En este caso a_1 y a_6. A partir de esos términos se tienen otros términos que se encuentran a la misma distancia de los términos extremos. Por ejemplo:

a_2 y a_5 se encuentran a igual distancia d de a_1 y a_6 respectivamente.

a_3 y a_4 se encuentran a igual distancia $2d$ de a_1 y a_6 respectivamente.

Los términos que se encuentran a la misma distancia de los términos extremos, suman lo mismo que los términos extremos.

En una progresión aritmética donde se dan una cantidad finita de términos $a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; ...; a_n$. Se verifica: $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2}$ y así sucesivamente.

Pero el objetivo es encontrar una forma de hallar

$$S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$

Para ello es posible sumar dos veces S_6 pero invirtiendo los términos del siguiente modo

$$\begin{array}{rl} & S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \\ + & \\ & S_6 = a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 \\ \hline & 2 \cdot S_6 = (a_1 + a_6) + (a_2 + a_5) + (a_3 + a_4) + (a_4 + a_3) + (a_5 + a_2) + (a_6 + a_1) \end{array}$$

pero como $a_2 + a_5 = a_1 + a_6$; $a_3 + a_4 = a_1 + a_6$

se obtiene

$$2 \cdot S_6 = 6 \cdot (a_1 + a_6)$$

de donde

$$S_6 = \frac{6 \cdot (a_1 + a_6)}{2} = \frac{6 \cdot 12}{2} = 36$$

Si la suma de los subíndices de dos términos de una progresión aritmética es $n + 1$, la suma de dichos términos es igual a $a_1 + a_n$

Para generalizar este resultado:
¿Cuál es el valor de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética?

Lo que se quiere calcular es

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Si se procede de la misma manera que en el problema anterior, es decir sumando 2 veces S_n es posible obtener

$$\begin{array}{rl} & S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ + & \\ & S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 \\ \hline & 2\,S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \end{array}$$

Son n paréntesis y sabiendo que $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2}$ resulta que el valor de cada paréntesis es $(a_1 + a_n)$.

Por lo tanto $2\,S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) = (a_1 + a_n) \cdot n$

donde es posible concluir

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética es

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Tinta fresca ediciones S.A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Problema 7

Se toma una cantidad de números impares consecutivos empezando en 1 y se calcula su suma que es 11 025. ¿Cuántos números impares se tomaron? ¿Cuál fue el último número impar?

Los números impares se encuentran en progresión aritmética porque de un impar al impar siguiente siempre hay 2 de diferencia. Por lo tanto, la razón de esta progresión es $d = 2$ y el primer término es $a_1 = 1$.

El término general es entonces:

$$a_n = 1 + 2 \cdot (n - 1) = 1 + 2 \cdot \mathrm{n} - 2 = 2 \cdot n - 1$$

En este problema no se conoce cuántos números impares se tomaron. Es posible suponer que son una cantidad n. La suma de esos n números impares es igual a 11 025. Y sumar n términos de una progresión aritmética es igual a

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Por lo tanto, si se conoce

$$S_n = 11\,025 \qquad a_1 = 1 \qquad a_n = 2 \cdot n - 1$$

se obtiene la siguiente igualdad

$$11025 = \frac{\cancel{1} + 2 \cdot n - \cancel{1}}{2} \cdot n = \frac{2 \,.\, n}{2} \cdot n = n \cdot n = n^2$$

Entonces

$$n = \sqrt{11\,025} = 105$$

Lo que significa que se tomaron 105 números impares.

¿Y cuál fue el último?

El último término es el $a_{105} = 2 \cdot 105 - 1 = 209$

Problema 8

¿Cuál es el resultado de sumar los cien primeros múltiplos de 4?

Para resolver el problema hay varias posibilidades. Una de ellas es calcular esta suma de la siguiente manera:

$$4 + 8 + 12 + 16 + \ldots\ldots + 400 = 4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + 100)$$

Por lo tanto, la suma de los 100 primeros múltiplos de 4 será el resultado de multiplicar por 4 a la suma de los 100 primeros número naturales.

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Los 100 primeros números naturales, son una progresión aritmética con $a_1 = 1$; $a_{100} = 100$ y $d = 1$, entonces su suma es:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + 100}{2} \cdot 100 = 5050$$

Por lo tanto la suma de los primeros 100 múltiplos de 4 es:

$$4 \cdot 5050 = 20\,200$$

Otra manera de resolver el problema es la siguiente:

Como los números que forman la sucesión son los siguientes: 4 ; 8 ; 12 ; 16 ; 20 ; ...... ; 400; es posible recurrir a la fórmula de la suma de los términos:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{4 + 400}{2} \cdot 100 = 202 \cdot 100 = 20\,200$$

En ambos casos se obtiene el mismo resultado.

¿Cómo se podrá hacer para obtener el resultado de sumar los múltiplos de 4 que se encuentran entre 0 y 100?

Una primera cuestión es determinar cuántos números son. Para ello es posible imaginar que hasta 40 hay 10, hasta 80 serán 20 y quedan 84, 88, 92 y 96. Es decir, son 24.

Por lo tanto, usando la fórmula es posible saber que

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{4 + 96}{2} \cdot 24 = 50 \cdot 24 = 1200$$

Es decir, la suma será de 1200.

Problema 9

¿Cuál es la suma de los múltiplos de 5 comprendidos entre 1243 y 4728?

Los múltiplos de 5 van de 5 en 5.

Los múltiplos de 5 resultan estar en una progresión aritmética pues cada término se obtiene agregando 5 al término anterior.

El primer múltiplo de 5 entre 1243 y 4728 es el 1245 y el último es 4725.

Lo que no resulta inmediato es saber cuántos múltiplos de 5 hay entre 1245 y 4725, incluyendo a estos números.

Desde 1245 a 4725 hay 3480 números, sin contar el 1245 y contando el 4725, y los múltiplos de 5 van de 5 en 5, entonces si se hace 3480 : 5 se obtiene la cantidad de múltiplos de 5 que hay entre 1245 y 4725, esto es 3485 : 5 = 696.

Por lo tanto, esta progresión aritmética tiene 697 términos y

$$a_1 = 1245 \qquad a_{697} = 4725$$

Además la razón, d, es 5; luego:

$$a_n = 1245 + 5 \cdot (n - 1)$$

Para hallar la suma es necesario calcular la suma de los 697 términos, esto es

$$S_{697} = \frac{1245 + 4725}{2} \cdot 697 = \frac{5970}{2} \cdot 697 = 2\,080\,545$$

Las sucesiones como funciones en el conjunto de los números naturales

Se mencionó al comienzo que una sucesión es una secuencia de números ordenados, uno a continuación del otro.

También es posible ver a las sucesiones como funciones de números naturales a números reales, es decir,

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ donde $f(1)= a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, y así sucesivamente.

Si se piensa a las sucesiones como funciones en el conjunto de los números naturales, resulta que las progresiones aritméticas también se pueden pensar como funciones

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \,/\, f(n) = f(1) + d \cdot (n-1)$$

Problema 10

El término general de una progresión aritmética es el siguiente:

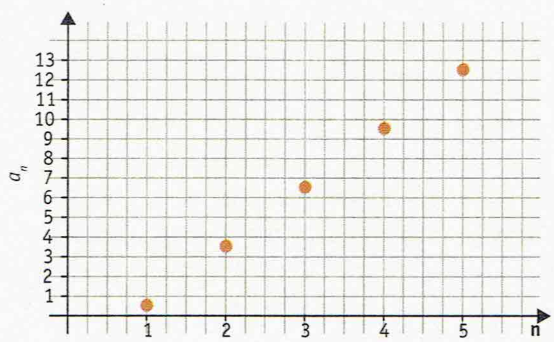
$$a_n = \frac{1}{2} + 3 \cdot (n-1)$$

a. ¿Cómo es la función $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \,/\, f(n) = a_n$?

b. ¿Cómo es su gráfico?

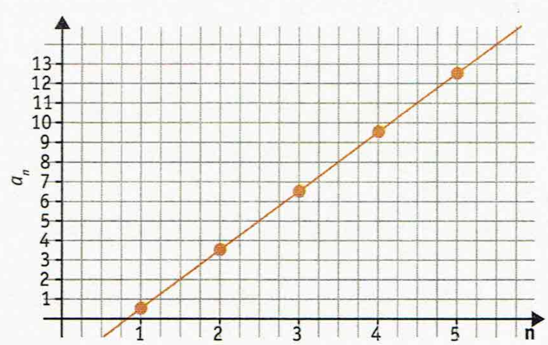
Si $f(n) = a_n$ entonces resulta $f(n) = \frac{1}{2} + 3 \cdot (n-1)$.

Por otro lado, el gráfico es



El cual no resulta continuo sino que es una sucesión de puntos.

Pero estos puntos parecen estar alineados.



© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Si se analiza la fórmula del término general se tiene

$$f(n) = \frac{1}{2} + 3 \cdot (n - 1) = \frac{1}{2} + 3 \cdot n - 3 = 3 \cdot n - \frac{5}{2}$$

Si n no es un número natural, lo que se obtiene es la fórmula de una función lineal de pendiente 3 y ordenada al origen $-\frac{5}{2}$.

La pendiente es la razón de la progresión aritmética ya que cada vez que hay una variación en 1 unidad en el eje horizontal se obtiene una variación de 3 unidades en el eje vertical.

Si se lo estudia como una progresión aritmética, cada vez que se pasa al término siguiente se debe agregar 3 al término anterior.

Esto lleva a pensar que también es posible obtener progresiones aritméticas con razón negativa.

Por ejemplo la progresión aritmética de término general

$$a_n = -2 - 2 \cdot (n - 1)$$

da como resultado la sucesión decreciente de números pares negativos comenzando de –2.

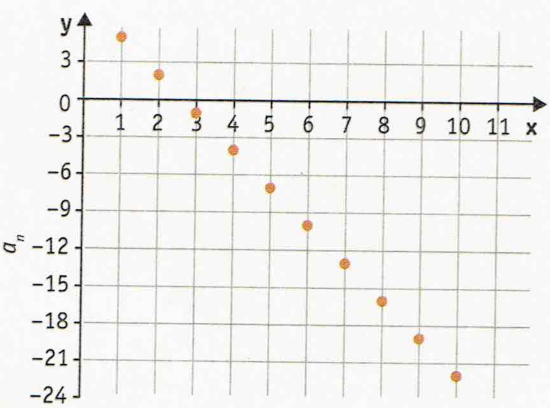
$$-2 ; -4 ; -6 ; -8 ; -10 ; -12 ; -14 ; -16 ; \dots$$

Problema 11

Si $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \;/\; f(n) = 5 - 3\,(n - 1)$, ¿cuál es su gráfico?

No resultará complicado pensar en su gráfico. Es una colección de puntos alineados, que va decreciendo. Es decir:

$$a_1 = 5 \;;\; a_2 = 2 \;;\; a_3 = -4 \;; \text{etc.}$$



9. Determinen si las siguientes funciones corresponden o no a una progresión aritmética. En el caso que correspondan, determinen la razón, la gráfica y la suma de los primeros 15 términos.

a. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} / f(n) = \frac{3}{4} - 2\,(n-1)$

b. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} / f(n) = \frac{3}{4} + 2\,(n^2-1)$

c. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} / f(n) = 3\,n - \frac{1}{2}$

ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

10. Una escalera tiene sus escalones cada 20 cm. Si el primer escalón está a 40 cm del suelo, ¿a qué altura se encuentra el quinto escalón?

11. Se sabe que el último término de una progresión aritmética es 199, que el número de términos es 100, y la suma de sus términos es 10 000. ¿Es posible calcular el primer término?

12. De una progresión aritmética se sabe que tiene razón 4, el primer término vale 7 y tiene solo 12 términos. Calculen el último término de la progresión y la suma de sus términos.

13. Calculen la suma de todos los números pares entre 57 y 891.

14. Un cuidador de parques tiene que arrojar cierto fertilizante a los 30 árboles del predio que se encuentran sobre el camino principal. El primer árbol se encuentra a 10 metros del lugar donde está el fertilizante y los árboles distan entre sí 6 metros. Al finalizar el camino, ¿cuántos metros habrá recorrido el cuidador?

15. Calculen la suma de todos los números múltiplos de 6 entre 234 y 648.

16. Para realizar un pozo, una empresa constructora paga $ 76 por el primer metro y por cada metro extra paga $ 15 más que por el metro anterior. Si en total pagó a la excavadora $ 4366. ¿Cuál fue la profundidad del pozo?

17. Calculen la suma de los primeros cien números naturales que son múltiplos de 7.

18. Para el acto de fin de año, los alumnos de una escuela harán una presentación coral. En total son 165 alumnos y se van a ubicar del siguiente modo. En la primera fila se ubican 10, en la segunda fila se agregan 1 alumno a cada lado, es decir, que van a formar 12, en la siguiente fila también se agrega un alumno de cada lado, y así sucesivamente. ¿Cuántas filas podrán formar? ¿Quedarán chicos sin ubicar? ¿Cuántas personas habría que agregar para completar la última fila?

19. Calculen la suma de todos los números naturales de tres cifras que son múltiplos de 4.

20. Un reloj da campanadas solamente cuando son las horas en punto y da tantas campanadas como la hora que es. ¿Cuántas campanadas da diariamente el reloj?

21. Encuentren la suma de todos los múltiplos de 4 que se encuentra entre 118 y 1420.

22. Calculen la suma de los primeros 50 números naturales que son múltiplos de 5.

23. La suma de cierta cantidad de múltiplos de 6 es igual a 2736. Si se comenzó a sumar a partir del 126. ¿Cuántos múltiplos de 6 se sumaron? ¿Cuál fue el último?

24. Se armó una pila triangular sacando 2 bolas a la fila anterior. Si la base inferior de la pila contiene 35 bolas y la parte superior contiene 11 bolas. ¿Cuál es la cantidad total de bolas que se utilizaron para armar la pila?

25. ¿Cuál es la cantidad de términos de una progresión aritmética donde el primer término es 4, la razón es 3 y el último término es 40? ¿Cuál es su suma?

26. Una progresión aritmética comienza con los términos 15; 19 y 23. Calculen la cantidad de términos que será necesario agregar para que la suma total supere el número 540.

27. ¿Los números pares forman una progresión aritmética? ¿Y los números múltiplos de 3? ¿Y los números naturales? ¿Cuál sería en cada caso el término general?

28. ¿Cuál es el resultado de sumar los primeros cien múltiplos de 3?

29. ¿Es cierto que la suma de los 132 primeros números naturales es 8778?

30. ¿Es posible que la suma de los 200 primeros múltiplos de 4 sea 80 399?

31. Se sabe que el primer término de una sucesión es 3. Su razón es 5 y la suma de sus términos es 1010. ¿Cuántos términos tiene dicha sucesión?

32. Calculen la suma de las siguientes progresiones aritméticas:

a. $a_1 = 25 ; n = 15 ; d = 2$

b. $a_1 = -18 ; n = 22 ; d = 0,5$

c. $a_1 = 925 ; n = 12 ; d = -3$

AUTOEVALUACIÓN

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

1. Los cuatro ángulos interiores de un cuadrilátero forman una progresión aritmética de razón igual a 25°. Las medidas de sus ángulos interiores son:

a 20°; 45°; 70°; 95°

b 25° ; 50° ; 75°; 100°

c 7° 45'; 32° 45'; 57° 45' ; 82° 45'

d 52° 30'; 77° 30'; 102° 30'; 127° 30'

2. De una progresión aritmética se conocen los siguientes términos $a_7 = 29{,}4$ y $a_{10} = 44{,}4$. Con esta información el término general es:

a $a_n = 29{,}4 + 15\,(n-1)$

b $a_n = \frac{3}{5} - 5\,(n-1)$

c $a_n = -\frac{3}{5} + 5\,(n-1)$

d la información no alcanza para conocer el término general.

3. La suma de los primeros 47 términos de la progresión aritmética $a_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \cdot (n-1)$ es igual a:

a $S_{47} = 822{,}5$

b $S_{47} = \frac{139}{4}$

c $S_{47} = 1645$

d $S_{47} = 1633{,}25$

4. Determinen cuál o cuales de las siguientes sucesiones es una progresión aritmética:

a 2 ; 5; 8 ; 11; 14; 17; 20; ....

b 57; 50; 47; 40; 37; 30; 27; 20; ....

c –34 ; - 24 ; - 34 ; - 24 ; - 34 ;..................

d 50 ; 52 ; 51 ; 53 ; 52 ; 54; 53; 55............

e Ninguna de las anteriores.

5. Juan tenía \$10 y ahorró durante 30 días siempre la misma cantidad de dinero, llegando a juntar \$ 250. ¿Cuál de los siguientes números representa el ahorro de cada día?

a \$ 8,30

b \$ 8

c \$ 8,60

d Ninguna de las anteriores.

6. Indiquen cuál o cuáles de las siguientes fórmulas permiten calcular la suma de 10 números consecutivos cualesquiera, comenzando en a_1:

a $\frac{a_1 + a_{10}}{2} . 10$

b $10 \cdot a_1 + 45$

c $a_1 . 10 + 10$

d Ninguna de las anteriores.

7. Indiquen cuál será el resultado de sumar los 50 primeros múltiplos de 5:

a 250

b 2500

c 6375

d 6753

8. Se sumaron 8 múltiplos de 3 consecutivos y se obtuvo como resultado 372. ¿Cuál de estos números será el primero de los que se sumaron?

a 12

b 21

c 36

d 18

CONTENIDOS

- Cálculo de la velocidad instantánea
- Variación instantánea
- Cálculo de la derivada de una función constante, proporcional y cuadrática
- Derivada y recta tangente

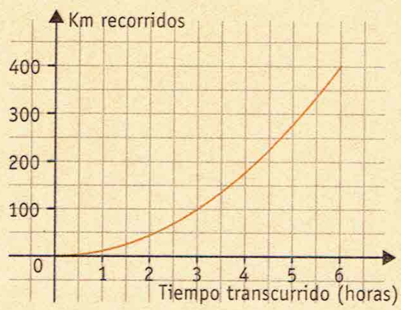
En muchas ocasiones es interesante estudiar la rapidez con que un proceso se desarrolla. Por ejemplo, con qué rapidez varía una población cuando varía el tiempo. O cómo varía el área de un cuadrado cuando varía la longitud del lado.

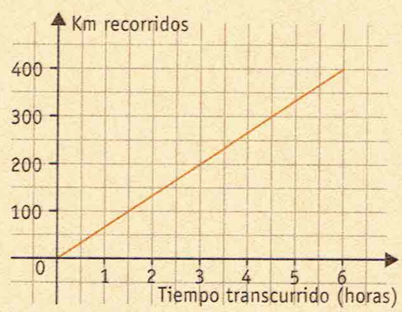
En este anexo se tratará de estudiar la velocidad de la variación de unas cantidades con respecto de otras.

INTRODUCCIÓN A LA IDEA DE DERIVADA Y LÍMITE PARA LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Problema 1

Dos automovilistas partieron de Buenos Aires y llegaron a Mar del Plata al mismo tiempo. Estos gráficos representan la distancia recorrida en cada instante.





¿Por qué los dos gráficos son diferentes si tardaron lo mismo en llegar a Mar del Plata?

Si se analiza el problema, se puede observar que, si bien ambos automovilistas recorrieron 400 km en 6 horas no lo hicieron de la "misma forma".

¿Cómo es posible darse cuenta de esto?

En el primer gráfico, el automovilista recorrió en 3 horas 100 km, mientras que el segundo automovilista, en las mismas 3 horas realizó la mitad el trayecto ya que recorrió 200 km.

Esto significa que, en ese trayecto, el segundo automovilista fue a mayor velocidad que el primero.

Velocidad media $= \dfrac{\text{variación de la posición}}{\text{Variación del tiempo}}$

Sin embargo, como en las 3 horas siguientes ambos automóviles llegaron al mismo lugar, el primer automovilista tuvo que ir más rápido pues en 3 horas recorrió los 300 km que le faltaban mientras que el segundo automóvil recorrió en 3 horas también 200 km, al igual que en las primeras 3 horas.

¿Cómo se puede saber la velocidad media a la que iban ambos automovilistas en las 3 primeras horas y en las horas siguientes?

En el caso del primer automovilista, siguiendo el gráfico, se tiene que en 3 horas recorrió 100 km, por lo tanto se desplazó a una velocidad media de $\frac{100}{3}$ km en 1 hora, lo que es lo mismo que decir que su velocidad media fue de $\frac{100}{3}$ km/h (que se lee kilómetros por hora).

En cambio el segundo automovilista tuvo una velocidad media de $\frac{200}{3}$ km/h.

Pero en las 3 horas siguientes el primer automóvil se desplazó a un velocidad media de $\frac{300}{3}$ = 100 km/h mientras que el segundo automóvil siguió mantenido la misma velocidad media ya que en igual tiempo recorrió igual distancia, es decir, $\frac{200}{3}$ km/h.

Si bien en ambos gráficos, a las 6 horas, los automóviles se encontraban a 400 km de distancia, no fue igual la variación de la distancia recorrida cuando variaba el tiempo.

Por ejemplo, analizando el intervalo de tiempo [0 ; 3], es decir, de 0 hora a 3 horas, fue mayor la variación de la distancia recorrida por el segundo automóvil.

Pero si se analiza el intervalo de tiempo [3 ; 6] también de 3 horas al igual que el primer intervalo, fue mayor la variación de la distancia recorrida por el primer automóvil.

Se suele designar a la variación de una variable con la letra griega delta Δ.
De este modo, si *x* es el tiempo e *y* es la posición se tiene que:
Δy = variación de la posición
Δx = variación del tiempo
con lo cual queda la siguiente fórmula:
velocidad media $= \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Para el segundo automóvil a igual tiempo transcurrido, se obtiene igual distancia recorrida, mientras que en el primer automóvil a igual tiempo transcurrido, la variación de la distancia recorrida cambia.
Más adelante se estudiará qué clase de funciones mantienen esta variación de manera constante.

Pero, si se intenta comparar la velocidad a la que iban a las tres horas de comenzado el viaje, *¿cómo se puede hacer?*

Velocidad instantánea

Problema 2

Un automovilista que salió a las 14 hs de Buenos Aires rumbo a Mar del Plata, tomó los siguientes datos de su trayecto y confeccionó la tabla:

Con esta información, ¿es posible saber en qué instante el automóvil tuvo mayor velocidad? ¿Y en qué instante tuvo menor velocidad? ¿Se puede saber qué velocidad marcaba el velocímetro a las 15:00 hs?

Hora	Distancia a Bs. As. en km
14:30	70
14:45	100
15:00	137,5
15:15	165
15:20	187,5
15:30	210
16:00	300
17:00	400

Para comenzar a contestar estas preguntas, será necesario realizar un análisis de la variación de la distancia recorrida cuando varía el tiempo, porque una mayor distancia recorrida en igual tiempo, está indicando una mayor velocidad.

		Hora	Kilómetros recorridos		
		14:00	0		
		14:30	70		
½ hora		14:45	100		67,5 km
	¼ hora			37,5 km	
		15:00	137,5		
	¼ h			27,5 km	
½ hora	1/3 h	15:15	165	50 km	72,5 km
		15:20	187,5		
		15:30	210		

A medida que se fue modificando la variación del tiempo, también se fue modificando la variación de la distancia recorrida.

Si se calcula un intervalo de $\frac{1}{2}$ hora antes de las 15:00 se obtiene una velocidad media de 135 km/h, pero si se calcula un intervalo de $\frac{1}{2}$ hora después de las 15:00 se tiene una velocidad media de 145 km/h.

Es decir que en el intervalo de tiempo [15:00 ; 15:30] tuvo una mayor velocidad media que en el intervalo [14:30 ; 15:00].

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Si se considera la variación de la distancia recorrida en solo $\frac{1}{4}$ de hora pasando las 15:00, se obtiene una velocidad media de 110 km/h. Y si se toma $\frac{1}{4}$ de hora antes de las 15:00 se obtiene una velocidad media de 150 km por hora. Ahora en el intervalo [14:45; 15:00] el automóvil tuvo una mayor velocidad que en el intervalo [15:00 ; 15:15].

Para calcular la velocidad que tenía el automóvil a las 15:00 se cuenta con la siguiente información:

Entre las 15:00 y las 15:30 la velocidad media era de 145 km por hora.

Entre las 15:00 y 15:20 se obtiene una velocidad media de 150 km/h. Y si se calcula entre las 15:00 y 15:15 se obtiene 110 km/h de velocidad media. Pero con esta información no alcanzaría para saber la velocidad que marcaba el velocímetro del auto a las 15:00.

Entonces, *¿cómo se podría hacer para saber de forma más exacta qué velocidad tenía a las 15:00 horas? ¿Qué información adicional le pedirían al automovilista para poder determinarla?*

Lo que seguramente se necesitaría es una información más precisa, es decir, posiblemente se necesitaría saber cuántos kilómetros llevaba recorrido a las 15:10, o mejor aún, a las 15:05.

Y si se tuviera la información de en qué kilómetro se encontraba a las 15:01 seguramente sería más preciso aún.

Pero, *¿alcanzaría para decir cuál era la velocidad en el instante de 15:00?*

Seguramente lo que más convendría sería saber la velocidad en un instante **muy pequeño** de tiempo, casi menos de un segundo.

Pero para este problema solo se cuenta con la información suministrada.

¿Cómo calcular la velocidad instantánea?

Problema 3

Un auto de carrera inicia su recorrido en una pista. A medida que transcurre el tiempo, va aumentando su velocidad. Durante los cinco primeros segundos de carrera, la fórmula que indica la cantidad de metros que recorre en cada instante t (en segundos) es $f(t) = 5t^2$.

a. ¿Cuántos metros recorrió a los 3 segundos de iniciada la marcha?

b. ¿Qué velocidad media tenía en los intervalos [2 ; 3] ; [3 ; 4] ; [3 ; 3,5] y [3 ; 3,2]?

c. ¿Cuál era la velocidad en el instante $t = 3$?

La función f mide la distancia recorrida y t mide el tiempo transcurrido, en segundos, desde que comenzó la carrera.

Como la función $f(t)$ indica los metros recorridos en el instante t, para hallar los metros recorridos a los 3 segundos de iniciada la marcha es necesario calcular $f(3)$.

$$f(3) = 5 \cdot 3^2 = 45$$

Entonces a los 3 segundos de marcha recorrió 45 m.

Para hallar la velocidad media en el intervalo [2 ; 3] es necesario calcular cuántos metros recorrió en ese período. Como a los 2 segundos se encuentra a $f(2) = 20$ m y a los 3 segundos se encuentra a $f(3) = 45$ m; entre los 2 y los 3 segundos, recorrió 25 metros, su velocidad media fue de 25 metros por segundo.

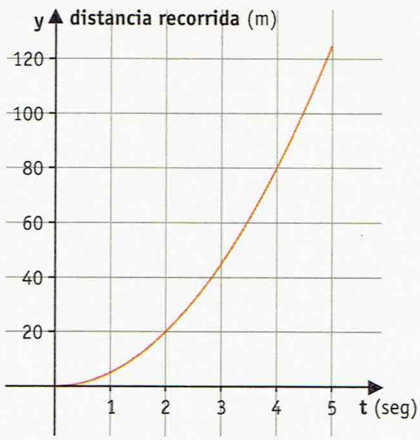
En cambio en el intervalo [3 ; 4] se obtiene una velocidad media de 35 m/s.
En ambos casos se varío 1 segundo respecto al tiempo 3 segundos.

Pero si se "achica" esa variación, por ejemplo en $\frac{1}{2}$ segundo se obtiene una velocidad media en el intervalo [3 ; 3,5] de 32,5m/s. Y si se achica aún más, por ejemplo en el intervalo [3 ; 3,2], se obtiene 31 m/s de velocidad media.

¿Cómo se puede hacer entonces para calcular al velocidad en el instante $t = 3$ segundos?
Se necesita tomar una variación menor a 0,2, por ejemplo 0,1, pero aun así no se obtiene la velocidad en el instante $t = 3$. Se necesita achicar aún más la variación.

¿Cómo se puede hacer que la variación del tiempo, es decir, de la variable t sea tan chiquita como se necesite?

El siguiente grafico modeliza la situación del auto:



Si $f(t) = 5t^2$ entonces $f(3) = 5 \cdot 3^2$ y $f(3+h) = 5 \cdot (3+h)^2$

Cuadrado de un binomio: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Si se toma una variación h en el tiempo, se tiene que el espacio recorrido en el instante $t = 3 + h$ menos el recorrido en el instante $t = 3$, es:

$$f(3+h) - f(3) = 5 \cdot (3+h)^2 - 5 \cdot 3^2$$

Si se resuelve el cuadrado del binomio se obtiene

$$f(3+h) - f(3) = 5 \cdot (3+h)^2 - 5 \cdot 3^2 = 5 \cdot (3^2 + 2 \cdot 3 \cdot h + h^2) - 45 = 5 \cdot 3^2 + 30h + 5h^2 - 45$$
$$f(3+h) - f(3) = 30h + 5h^2$$

y si se toma factor común h se obtiene

$$f(3+h) - f(3) = h \cdot (30 + 5h)$$

Para calcular la velocidad media en el intervalo [3 ; 3+h] se debe calcular

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{3+h-3} = \frac{h\cdot(30+5\ h)}{h} = 30\ +h$$

Lo que interesa es que el intervalo sea cada vez más pequeño, y como la longitud del intervalo es igual a h, se está buscando que h sea un número cada vez **más chico**.

En matemática se dice que **"*h* tienda a 0"** o **"*h* se acerque a 0"**. Pero si h es un número tan cerca de 0 como se necesite, la velocidad media se "transformaría" en la velocidad en el instante $t = 3$ que es lo que se estaba buscando, es decir

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{3+h-3} = 30+h$$

y h es un número muy chiquito, no altera la suma, por lo tanto

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{3+h-3} = 30$$

De este modo, la velocidad instantánea en $t = 3$ es de 30 m/s.

La **velocidad media** en el intervalo [a ; $a+h$]es igual al cociente

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Si h tiende a 0 se puede escribir **"$h \to 0$"**
También es equivalente a decir que se calcula **el límite de un función *f* evaluada en la variable *h*, cuando esa variable *h* tiende a 0** y se escribe:

$$\lim_{h\to 0} f(h)$$

La velocidad instantánea en un punto a es el valor de

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

cuando $h \to 0$ o lo que es lo mismo

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Variación instantánea de una función

Hasta ahora se analizó la variación de funciones que modelizan la distancia recorrida en un determinado intervalo de tiempo. En esos casos, la **variación instantánea** resulta ser la **velocidad instantánea.**

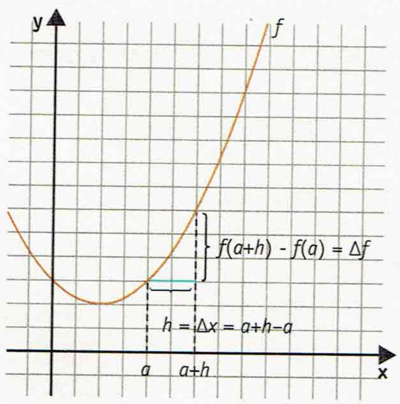
Pero el objetivo en este anexo es estudiar la variación de una variable cuando varía la otra.

Es decir, interesa calcular la variación media cuando la variación de la variable independiente es "muy chiquita".

Esta noción de una variación tan pequeña de la variable independiente como sea necesario se designa de la siguiente manera.

Si se considera la función f que depende de la variable x, y se quiere medir la variación de f cuando $x = a$ varía, se debe tomar una variación h, por ejemplo hacia la derecha y analizar el intervalo [a ; $a+h$]

Gráficamente:



Si Δf = variación de f y
Δx = variación de x

Variación media = $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

Variación media de f en el punto a =

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Este valor se llama **cociente incremental** y a ***h*** se lo llama **incremento de la variable** ***x***.

La variación instantánea en el punto a es el valor de

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

cuando $h \to 0$,
o lo que es lo mismo

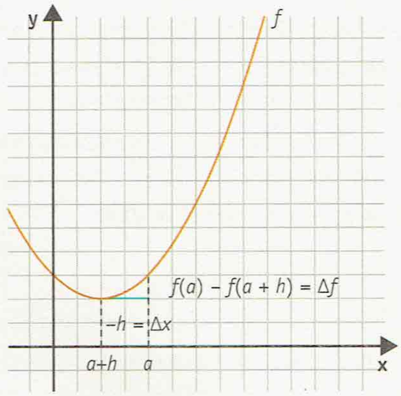
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

si este valor existe, se lo llama **derivada de** ***f*** **en el punto** a y se escribe:

$$f'(a)$$

La derivada $f'(x)$ es el valor al que tienden las variaciones medias cuando h tiende a 0 en un punto x.
Si $f(x)$ representa la distancia recorrida por un móvil en función del tiempo, entonces la velocidad del móvil en cada instante cambia según $f'(x)$.

También se puede tomar un intervalo hacia la izquierda de a, en este caso, es conveniente suponer que h es un valor negativo, por lo tanto $a + h$ es menor que a, de este modo se tiene el intervalo $[a + h\ ;\ a]$



En ambos casos la variación media es

$$\text{Variación media} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Para calcular la variación instantánea en $x = a$ se necesita que h sea un valor muy chiquito, es decir, que h se aproxime a 0, o tienda a 0.

De este modo, para calcular la variación instantánea se necesita tomar la variación media en un intervalo de longitud h y hacer que h tienda a 0.

$$\text{Variación instantánea en } a = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Si se toma cualquier x y se quiere calcular el valor de la variación instantánea en ese x se tiene:

$$\text{Variación instantánea} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

De esta manera, para cada función f y para cada valor de la variable x se tiene una nueva función: **variación instantánea de** ***f*** **en cada** ***x*** que se llama **función derivada** y se denota $f'(x)$.

$f'(x)$ es en cada punto un número que depende de f y de x.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ACTIVIDADES

1. En el problema 3,

a. ¿Cuál es la velocidad instantánea en $t = 4$? Expliquen como se dieron cuenta.

b. ¿Va el auto en algún momento a una velocidad instantánea de 45 metros por segundo? ¿Por qué?

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Cálculo de derivadas

Cálculo de la derivada de una función cuadrática

¿Por qué interesa calcular la derivada de una función cuadrática?

Existen muchos procesos que se modelizan mediante una función cuadrática y para calcular la velocidad en un instante x es necesario calcular la derivada de la función en ese instante x.

Problema 4

La función que modeliza el recorrido de un móvil es la función cuadrática $f(x) = x^2$. ¿Cuál será la velocidad en el instante $x = 3$?

Si $x = 3$ entonces $f(x) = 9$, es decir que en 3 unidades de tiempo recorrió 9 unidades de distancia. Para averiguar cuál será la velocidad en el instante $x = 3$ es necesario calcular

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

Es posible comenzar calculando el cociente incremental, es decir, la variación media

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \frac{9 + 2\cdot 3\cdot h + h^2 - 9}{h} = \frac{2\cdot 3\cdot h + h^2}{h}$$

y sacando h como factor común se tiene

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{\cancel{h}(2 . 3 + h)}{\cancel{h}} = 2\cdot 3 + h$$

Por lo tanto, resulta la siguiente igualdad

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} 2\cdot 3 + h$$

Como h es muy pequeño la suma se aproxima a 6 y resulta

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 6$$

Problema 5

Si la función es $f(x) = -5x^2$. ¿Cuál es la velocidad instantánea para cualquier valor de x?

Del mismo modo que en el problema 4, se calcula la variación media y luego se hace tender h a 0 y se obtiene

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-5\,(x+h)^2 - (-5x^2)}{h} = \frac{-5\,(x^2 + 2x\,h + h^2) + 5x^2}{h}$$

Caída libre

Si un cuerpo se deja caer libremente, la posición del cuerpo en función del tiempo transcurrido se modeliza por la función

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$$

donde y_0 es la altura desde donde se deja caer y g es la aceleración de la gravedad que es de aproximadamente 9,8 m/s^2

Tiro vertical

También cuando se arroja un objeto, el trayecto que sigue se modeliza por una función cuadrática.

$$y(t) = y_0 + v_0\,t - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$$

donde y_0 es posición inicial y v_0 es la velocidad inicial.

El procedimiento para $x = 3$ se puede realizar para cualquier valor de x y por lo tanto se obtiene que si $f(x) = x^2$ entonces

$$f'(x) = 2x$$

si se aplica la propiedad distributiva y se resuelve, se obtiene

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{-\cancel{5x^2}-5\cdot 2xh-5h^2+\cancel{5x^2}}{h}=\frac{-5\cdot 2xh-5h^2}{h}=$$

si se saca factor común h

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\cancel{h}(-5\cdot 2x-5h)}{\cancel{h}}=-10\,x-5\,h$$

Si $f(x)=a\cdot x^2$
se tiene
$f'(x)=2ax$

por lo tanto

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-10\,x$$

En este caso la velocidad da $-10\,x$. Si x es positivo, este resultado es negativo y significa que el auto está volviendo.

Derivada de una función proporcional

Si se supone que un móvil sigue un trayecto que se modeliza a través de la función lineal $f(x)=3x$ y se sabe además que:

$$m=\frac{a}{b}\;\frac{\rightarrow \text{variación de las ordenadas}}{\rightarrow \text{variación de las abscisas}}$$ es la pendiente de la recta,

siempre que se quiera calcular el cociente incremental se tiene que

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=3$$

y no importa qué tan chiquito sea el valor que se toma de incremento. Esto quiere decir que siempre se desplaza a la misma velocidad, lo que significa que a igual tiempo recorre la misma distancia, por lo tanto $f'(x)=3$.

En general, si se tiene una función proporcional del tipo

$$f(x)=m\,x \qquad \text{se tiene} \qquad f'(x)=m$$

Derivada de una función constante

Si la función es constante entonces no hay variación de la función cuando varía la variable x.

Por lo tanto si $f(x)=k$, con k un número cualquiera, entonces $f'(x)=0$

ACTIVIDADES

2. Un camión parte de Buenos Aires rumbo a Dolores por la ruta 2. La fórmula $g(x)=7x^2+100$ indica los kilómetros recorridos por el camión a través del tiempo (en horas).

a. ¿En cuánto tiempo recorrió 352 km?

b. ¿Cuántos kilómetros recorrió en 2 hs?

c. ¿Cuál fue la velocidad media del camión entre las 3 y 4 horas de viaje?

d. ¿Cuál fue la velocidad del camión a las 3 horas de viaje?

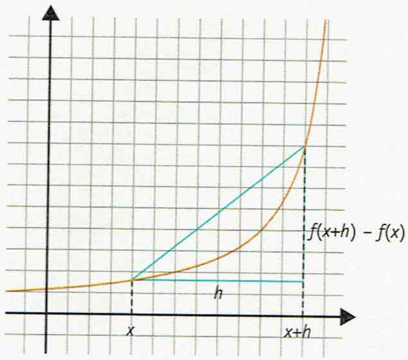
e. ¿Fue el camión a 70 km/h en algún momento? Expliquen cómo se dieron cuenta.

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Derivada y recta tangente

¿Qué representa gráficamente el cociente incremental?

El siguiente gráfico representa una función f y la variación media en un punto x para un incremento h.



En el capítulo de función lineal se establece que la pendiente de una recta se interpreta como:

$m = \frac{a}{b}$ $\frac{\to \text{variación de las ordenadas}}{\to \text{variación de las abscisas}}$ de dos cualesquiera de sus puntos.

En este caso, si se toman los puntos $(x\,;f(x))$ y $(x{+}h\,;f(x{+}h))$, resulta

$$a = f(x+h) - f(x)$$
$$b = x + h - x = h$$

por lo tanto

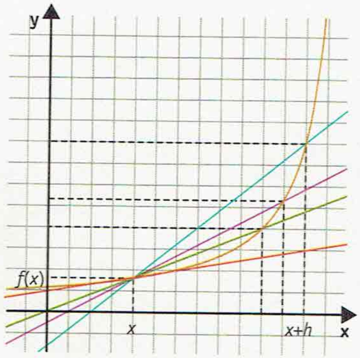
$$\text{Variación media} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

es la pendiente de la recta secante que une los puntos $(x\,;f(x))$ y $(x+h\,;f(x+h))$.

Pero si h es cada vez más chico, las variaciones medias tienden a $f\,'(x)$, es decir, que las pendientes de esas rectas secantes tienden a la derivada de f en el punto x.

¿Cómo se interpreta geométricamente?

Esas rectas secantes, cuando el incremento h es muy pequeño, se irán transformando en la recta tangente al gráfico de f.



La recta tangente es la recta que mejor aproxima a una función "cerca" de un punto.

AUTOEVALUACIÓN

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

1. El siguiente cuadro muestra las temperaturas tomadas en un mismo día en la ciudad de San Pedro por el Servicio Meteorológico.

Hora	Temperatura registrada
0	7° C
2	6° C
4	6° C
6	7° C
8	8° C
10	11° C
12	15° C
14	16° C
16	16° C
18	13° C
20	10° C
22	8° C
24	7° C

Señalen en cada caso la o las opciones correctas.

A. La mayor variación de temperatura se produjo entre:

a. 16 hs y 18 hs
b. 18 hs y 20 hs
c. 10 hs y 12 hs
d. 12 hs y 14 hs
e. No es posible saberlo con la información que se cuenta.

B. La temperatura no varió entre:

a. 2hs y 4 hs
b. 14 hs y 16 hs
c. 24 hs y 0 hs
d. 4hs y 6 hs

2. Se deja caer una piedra desde una altura de 87 metros. Tomando la gravedad como 9,8 m/s^2, la piedra llegó al suelo con una velocidad aproximada de:

a. 41,29 m/s
b. 0 m/s
c. – 41,29 m/s
d. – 173,95 m/s
e. 4,21 m/s

3. La ecuación de la recta tangente al gráfico de la función $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 5$ en el punto $(-1\ ;\ f(-1))$ es

a. $y = -x + \frac{15}{4}$
b. $y = x + 2$
c. $y = x + \frac{19}{4}$
d. $y = \frac{15}{4}x + \frac{15}{2}$

4. Dos móviles se desplazan siguiendo las fórmulas

Móvil 1: $y_1(t) = \frac{1}{3}t^2 + 5t - 6$ Móvil 2: $y_2(t) = \frac{2}{5}t^2 - \frac{1}{3}t + 7$

A. La función velocidad en cada instante para el móvil 1 es:

a. $v(t) = \frac{2}{3}t^2 - 5$
b. $v(t) = \frac{2}{3}t$
c. $v(t) = \frac{2}{3}t + 5$
d. $v(t) = \frac{1}{3}t + 5$

B. La función velocidad en cada instante para el móvil 2 es:

a. $v(t) = \frac{4}{5}t - \frac{1}{3} + 7$
b. $v(t) = \frac{2}{5}t - \frac{1}{3}$
c. $v(t) = \frac{4}{5}t + 1$
d. $v(t) = \frac{4}{5}t - \frac{1}{3}$

C. Los dos móviles tienen igual velocidad cuando:

a. Están a la misma distancia.
b. Sus derivadas son iguales.
c. Las funciones y_1 (t) e y_2 (t) son iguales.
d. Uno de los móviles pasa al otro.
e. No es posible que tengan igual velocidad.

5. Decidan cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas.

a. Siempre hay un punto de una parábola en el cual, la recta tangente es perpendicular al eje de las x.
b. Siempre hay un punto en una parábola en el cual, la recta tangente, es paralela al eje x.
c. Salvo en un punto, las rectas tangentes a una parábola son siempre oblicuas.
d. Ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta.

RESPUESTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1
(página 27)

1. b. c. d. e.
2. a. c. f.
3. b. c.
4. A. b.
   B. b.
   C. b.
5. A. b. d.
   B. a. d.
6. b.
7. a. d.

3
(página 59)

1. c.
2. d.
3. d.
4. c.
5. a.
6. b.
7. b. d.
8. a. c.

5
(página 101)

1. b.
2. c.
3. c.
4. b.
5. d.
6. a.
7. b.
8. b.
9. a. c. f.

7
(página 139)

1. a.
2. a.
3. c.
4. c.
5. d.
6. c.
7. a.
8. d.
9. a. c.
10. b.
11. d.

2
(página 39)

1. b. c.
2. a. b. c.
3. a.
4. c.
5. c. d.
6. b. c. d.

4
(página 81)

1. b.
2. b. d.
3. d.
4. a. c.
5. a.
6. d.
7. a.
8. d.
9. a.
10. c.
11. a.
12. d.
13. b.

6
(página 121)

1. A. a.
   B. b.
2. b.
3. A. c.
   B. a.
4. c.
5. A. b.
   B. a

8
(página 162)

1. A. d.
   B. b.
2. A. a.
   B. c.
   C. a.
3. A. b.
   B. a.
   C. b.

A1
(página 177)

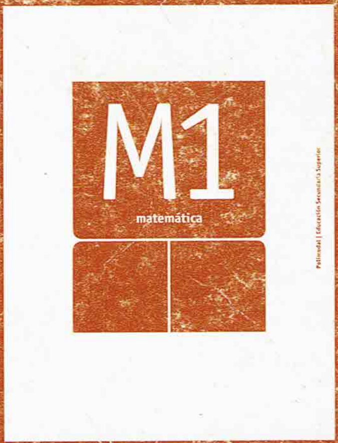
1. d
2. c.
3. d
4. a.
5. b.
6. a. b.
7. c
8. c

A2
(página 189)

1. A. c.
   B. a.b.c.
2. c.
3. c.
4. A. c.
   B. d.
   C. b.
5. b. c.

Esta obra se terminó de imprimir en el mes
de diciembre de 2005 en Indugraf S.A.,
Buenos Aires, Argentina.

ISBN 987-576-079-X
9 789875 760790
MAMTP106



tintafresca
Clarín