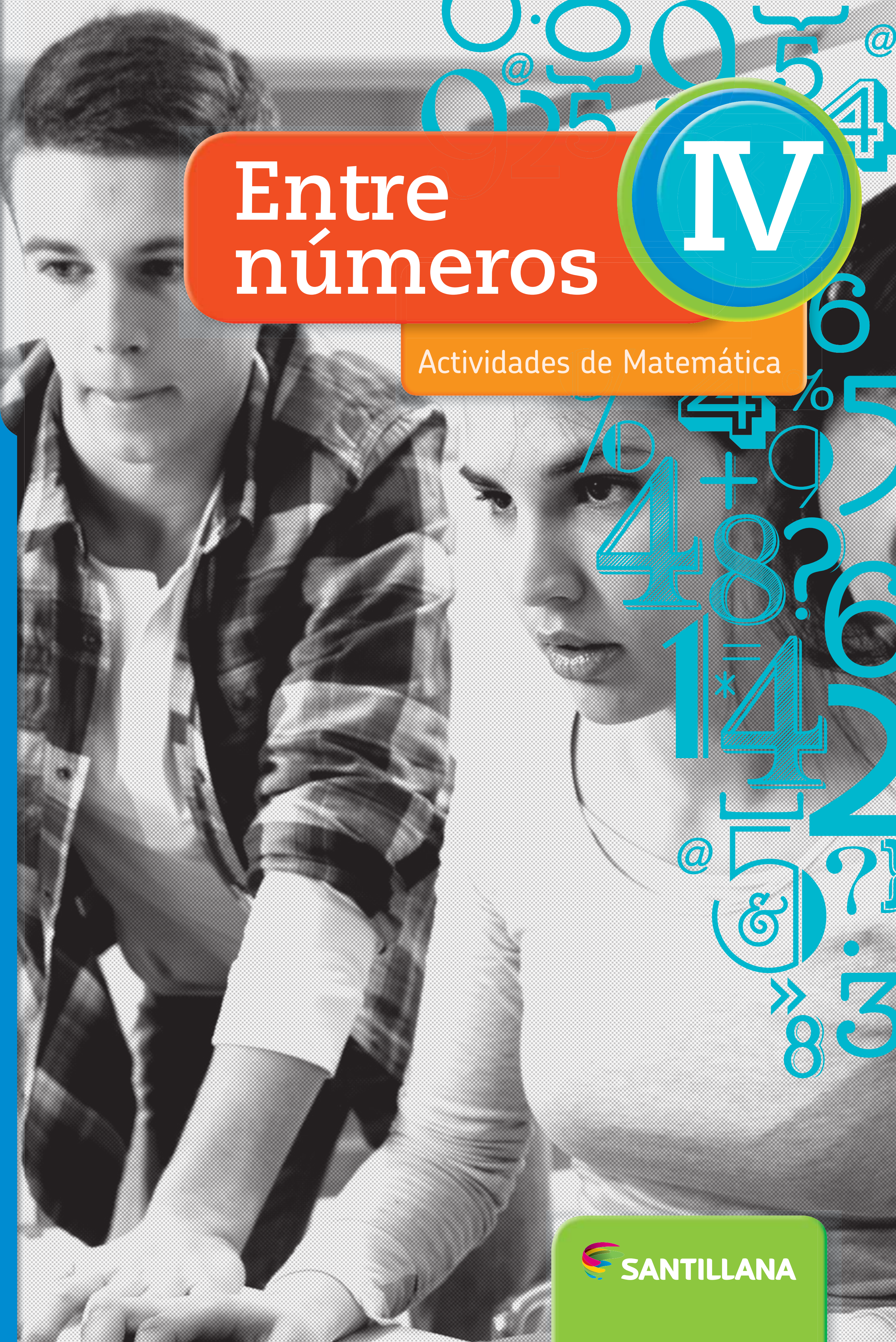
# Entre números IV

## Actividades de Matemática



SANTILLANA

Libro digital
Entre números IV / Juan Mendoza ... [et al.]. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Santillana, 2018.
Libro digital, HTML

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-46-5582-4

1. Matemática. 2. Educación Secundaria. 3. Libro de Texto. I. Mendoza, Juan
CDD 510.712

*El visor digital reproduce íntegramente a la obra papel, por lo que al pasar las paginas podría verse su ISBN.*

# Entre números IV

## Actividades de Matemática

**ENTRE NÚMEROS IV - Actividades de Matemática**
es una obra colectiva, creada, diseñada y realizada
en el Departamento Editorial de Ediciones Santillana,
bajo la dirección de Mónica Pavicich,
por el siguiente equipo:

Editor: Pablo J. Kaczor
Jefa de edición: María Laura Latorre
Jefa de arte: Silvina Gretel Espil
Gerencia de gestión editorial: Patricia S. Granieri

SANTILLANA

La realización artística y gráfica de este libro ha sido efectuada por el siguiente equipo:


| | |
|---|---|
| Diagramación: | Adrián C. Shirao. |
| Tapa: | Silvina Gretel Espil. |
| Corrección: | Héctor Daniel Álvarez. |
| Gráficos matemáticos: | Pablo J. Kaczor. |
| Documentación fotográfica: | Carolina S. Álvarez Páramo, Cynthia R. Maldonado y Nicolas Verdura. |
| Fotografía: | Archivo Santillana, Javier Jaime Sánchez, Luis Miguel Morales Agudelo, Pixabay, GettyImages, Shutterstock, HighRes Press Stock, Nancy Fabiola Ramírez Sarmiento. |
| Preimpresión: | Marcelo Fernández, Gustavo Ramírez y Maximiliano Rodríguez. |
| Gerencia de producción: | Gregorio Branca. |

Este libro fue realizado a partir del *Libro de actividades de Matemática 3*, Secundaria de la serie "Proyecto Crecemos juntos" por el siguiente equipo: Juan Mendoza, Rocío Valenzuela, Paola Palermo, Artemio Ríos, Luis Mendiola, Daniel Palacios, Norma Leyton, Patricia Montoya, Carlos Torres, Silvia Arce, Pedro Martínez (autores); Cecilia Mejía (dirección editorial); Carlos Valverde (responsable del área); Rafael Moy, Enzo Guerra, Josemaría Bravo, Daniel Jiménez (autores de artes gráficas).


Esta publicación fue elaborada teniendo en cuenta las observaciones del Instituto contra la Discriminación, la Xenofobia y el Racismo (Inadi), surgidas en encuentros organizados con editores de libros de texto.

Las páginas web han sido consultadas entre junio y diciembre de 2017.




Entre números IV / Juan Mendoza ... [et al.].- 1a ed .- Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Santillana, 2018.
160 p. ; 28 x 21 cm.

ISBN 978-950-46-5533-6

1. Matemática. 2. Escuela Secundaria. I. Mendoza, Juan
CDD 510.712

ISBN: 978-950-46-5533-6
Queda hecho el depósito que dispone la Ley 11.723.
Impreso en Argentina. *Printed in Argentina.*
Primera edición: enero de 2018.

Este libro se terminó de imprimir en el mes de enero de 2018 en Tinta Phi S.A., Av. San Martín 1275, (1704) Ramos Mejía, Buenos Aires, República Argentina.

## 1 – Números reales



## 2 – Funciones



## 3 – Función cuadrática





## 4 – Polinomios I. Expresiones algebraicas



## 5 – Polinomios II



## 6 – Ecuaciones e inecuaciones. Sistemas



## 7 – Trigonometría

# ÍNDICE



## Qué hay en cada capítulo

MATEMUNDO y Esto ya lo sabía... para entrar en tema.

Explicaciones con ejemplos para estudiar.

En las actividades encontrarás...

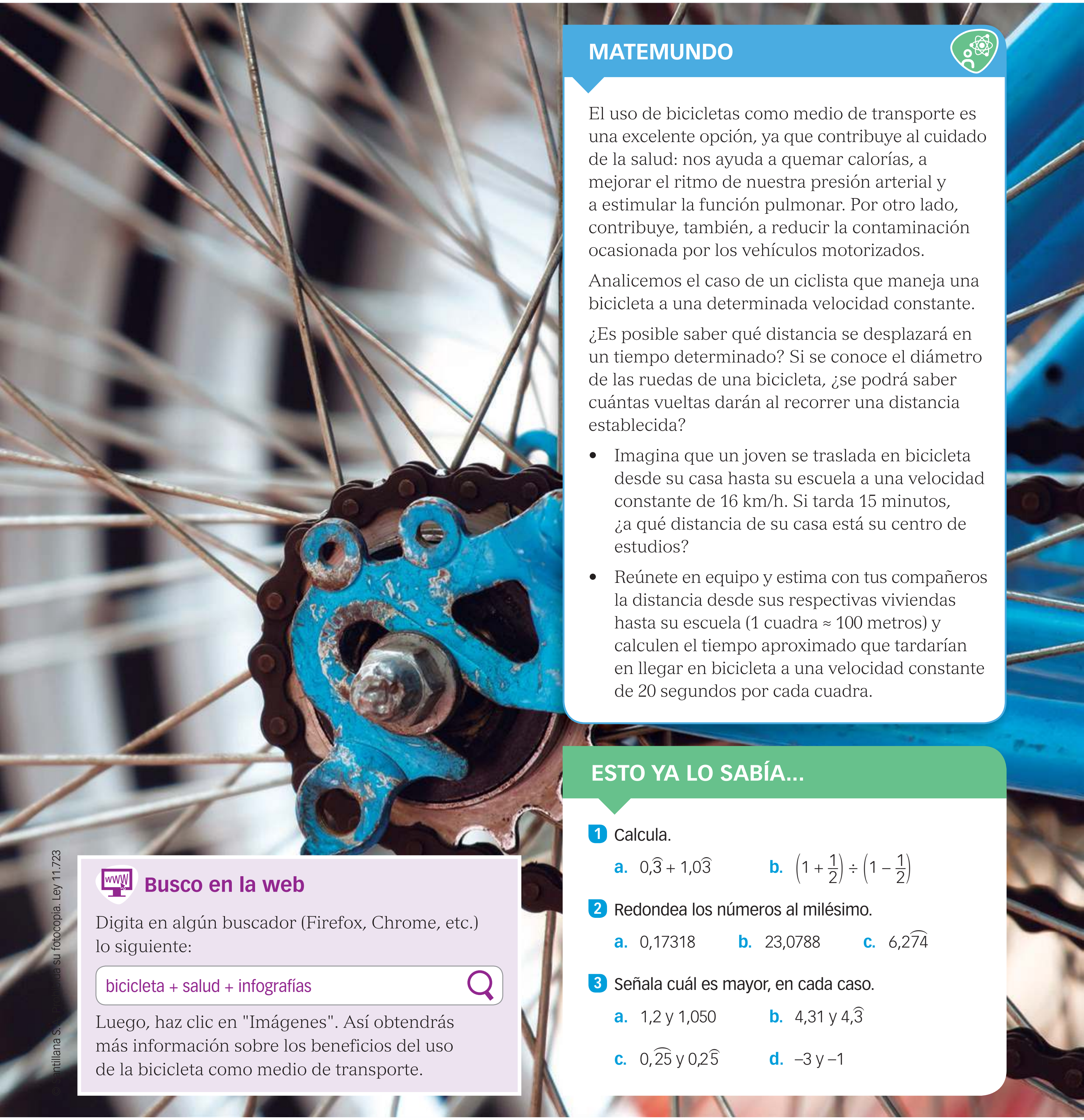
USO DE *SOFTWARE* MATEMÁTICO

ESTRATEGIA PARA RESOLVER PROBLEMAS

Además, puedes seguir practicando en Repaso todo y ACTIVIDADES MATEMUNDO.

Los capítulos finalizan con una AUTOEVALUACIÓN, para que te tomes una prueba. Las respuestas de estas actividades están en las páginas 157 y 158.

# 1 Números reales



## MATEMUNDO

El uso de bicicletas como medio de transporte es una excelente opción, ya que contribuye al cuidado de la salud: nos ayuda a quemar calorías, a mejorar el ritmo de nuestra presión arterial y a estimular la función pulmonar. Por otro lado, contribuye, también, a reducir la contaminación ocasionada por los vehículos motorizados.

Analicemos el caso de un ciclista que maneja una bicicleta a una determinada velocidad constante.

¿Es posible saber qué distancia se desplazará en un tiempo determinado? Si se conoce el diámetro de las ruedas de una bicicleta, ¿se podrá saber cuántas vueltas darán al recorrer una distancia establecida?

- Imagina que un joven se traslada en bicicleta desde su casa hasta su escuela a una velocidad constante de 16 km/h. Si tarda 15 minutos, ¿a qué distancia de su casa está su centro de estudios?
- Reúnete en equipo y estima con tus compañeros la distancia desde sus respectivas viviendas hasta su escuela (1 cuadra ≈ 100 metros) y calculen el tiempo aproximado que tardarían en llegar en bicicleta a una velocidad constante de 20 segundos por cada cuadra.

## ESTO YA LO SABÍA...

**1** Calcula.

**a.** $0,\widehat{3} + 1,0\widehat{3}$ **b.** $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \div \left(1 - \frac{1}{2}\right)$

**2** Redondea los números al milésimo.

**a.** 0,17318 **b.** 23,0788 **c.** $6,2\widehat{74}$

**3** Señala cuál es mayor, en cada caso.

**a.** 1,2 y 1,050 **b.** 4,31 y $4,\widehat{3}$

**c.** $0,\widehat{25}$ y $0,2\widehat{5}$ **d.** –3 y –1

### Busco en la web

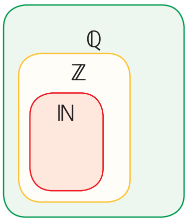
Digita en algún buscador (Firefox, Chrome, etc.) lo siguiente:

bicicleta + salud + infografías

Luego, haz clic en "Imágenes". Así obtendrás más información sobre los beneficios del uso de la bicicleta como medio de transporte.

El conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) está incluido ($\subset$) en el conjunto de los enteros ($\mathbb{Z}$) y este, en el conjunto de los racionales ($\mathbb{Q}$).

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$




**ORDEN AL OPERAR**

**1)** Potencias y raíces.
**2)** Multiplicaciones y divisiones.
**3)** Sumas y restas.

Si hay paréntesis, se resuelven primero.

# Números racionales

Un número racional es el que puede expresarse como $\frac{a}{b}$, donde $a$, $b$ pertenecen ($\in$) a $\mathbb{Z}$ y $b \neq 0$. Así, un entero o una expresión decimal finita o periódica es racional.

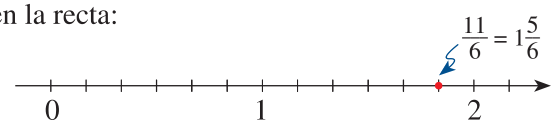
Recordemos cómo expresar esos números mediante fracciones:

$3 = \frac{3}{1}$ $\qquad 3{,}142 = \frac{3.142}{1.000}$ $\qquad 3{,}\overset{\frown}{142} = \frac{3.142 - 3}{999} = \frac{3.139}{999}$

$3{,}14\overset{\frown}{2} = \frac{3.142 - 314}{900} = \frac{2.828}{900} = \frac{707}{225}$

Así podremos ubicar una expresión decimal periódica en la recta numérica.

- Expresamos de la forma $\frac{a}{b}$: $1{,}8\overset{\frown}{3} = \frac{183 - 18}{90} = \frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}$
- Ubicamos $1\frac{5}{6}$ en la recta:




**4** Marca con ✓ según corresponda.

| | Expresión decimal | ℕ | ℤ | ℚ |
|---|---|---|---|---|
| 1.999 | | | | |
| $-\frac{18}{3}$ | | | | |
| $-1{,}4$ | | | | |
| 1,3555... | | | | |
| 1,585858... | | | | |

**5** Ubica 1,363636... en la recta numérica.

**6** Expresa cada número como fracción y resuelve.

$$\sqrt{1{,}5 \cdot 0{,}666... \cdot 1{,}25 \cdot 0{,}8}$$

**7** Calcula el valor de $\sqrt{0{,}\overset{\frown}{1} + 0{,}\overset{\frown}{2} + 0{,}\overset{\frown}{3} + ... + 0{,}\overset{\frown}{8}}$

**8** Simplifica $\dfrac{0{,}\overset{\frown}{2} + 0{,}\overset{\frown}{3} + ... + 0{,}\overset{\frown}{7}}{0{,}3\overset{\frown}{2} + 0{,}4\overset{\frown}{3} + ... + 0{,}8\overset{\frown}{7}}$

**9** Reduce $\dfrac{0{,}1\overset{\frown}{4} + 0{,}1\overset{\frown}{5} + 0{,}1\overset{\frown}{6}}{0{,}1\overset{\frown}{7} + 0{,}1\overset{\frown}{8} + 0{,}1\overset{\frown}{9}}$

**10** Se tienen dos fracciones equivalentes. Si la suma de sus numeradores es 27 y la de sus denominadores es 30, halla esas fracciones.

# Números irracionales

Un **número irracional** es aquel que tiene **infinitas cifras decimales no periódicas**.
Al no ser racional, no se lo puede expresar como una fracción.

Por ejemplo, $\pi = 3{,}14159\ldots$; $e = 2{,}7182\ldots$; $\varphi = 1{,}61803\ldots$; etc.

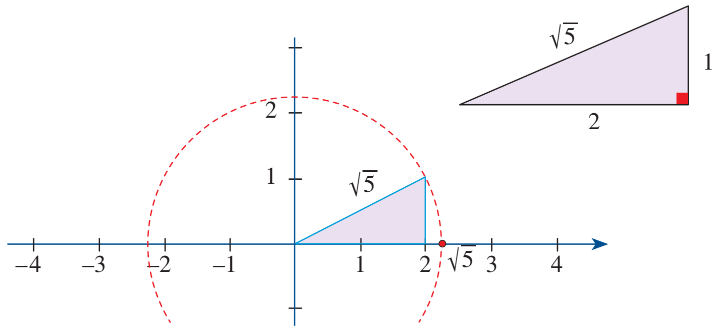
También es irracional cualquier raíz de un número entero que no sea entera:

$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$; $\sqrt[3]{7} = 1{,}91293\ldots$; $\sqrt[5]{50} = 2{,}18672\ldots$; etc.

Existen números irracionales cuya escritura decimal presenta cierta regla de formación, pero no período. Por ejemplo: 0,202200222000...; 0,12345678...

Podemos recurrir al teorema de Pitágoras para representar algunos números irracionales. Por ejemplo, representamos $\sqrt{5}$ utilizando un triángulo rectángulo de catetos 2 u y 1 u.

Luego, señalamos el punto $\sqrt{5}$ en la recta.




Al conjunto de los números irracionales se lo denomina $\mathbb{I}$. Algunos de sus elementos son nombrados con un símbolo especial:

$\pi = 3{,}14159265\ldots$

Hasta el año 2016, se conocían más de 22 billones de cifras decimales de $\pi$.

El conjunto de los números irracionales no tiene elementos en común con el conjunto de los racionales.

**11** Clasifica cada número como racional o irracional.

a. 3,14159 ☐ b. $\sqrt{3}$ ☐

c. 7,010010001... ☐ d. $\sqrt[3]{0{,}512}$ ☐

e. 1,242526... ☐ f. $\sqrt[5]{243}$ ☐

g. $\sqrt{27}$ ☐ h. $\sqrt[4]{0{,}0016}$ ☐

**12** Halla dos números irracionales para cada caso.

a. Que sumados den un racional negativo.

b. Que multiplicados den un racional no nulo.

c. Que sumados den un resultado nulo.

**13** Representa con exactitud los siguientes números irracionales en la recta numérica.

a. $\sqrt{17}$

b. $\sqrt{19}$

## **GeoGebra**, para representar números irracionales

**Paso 1** Accede a **http://web.geogebra.org/graphing**. Si no se ve la cuadrícula o los ejes cartesianos, puedes activarlos con el botón **Barra de Estilo**, ubicado arriba a la derecha.

**Paso 2** Vamos a ubicar el número irracional $\sqrt{5}$, que corresponde a la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 2 y 1.

– Activa la herramienta  y marca los puntos en A = (0; 0) y B = (2; 0).
Luego, con la herramienta , traza una perpendicular al eje ***x*** que pase por B (figura 1).

– Activa la herramienta  y marca un punto C sobre la perpendicular trazada.
Luego, con la herramienta , traza una perpendicular al eje ***y*** que pase por C (figura 2).

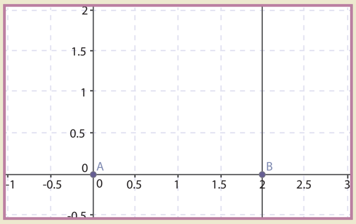



Figura 1

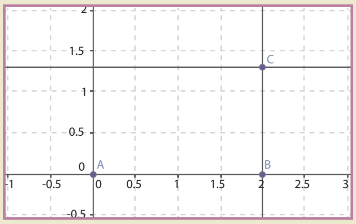
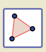



Figura 2

– Activa la herramienta  (figura 3) y forma el triángulo ABC. A continuación,
con la herramienta , reubica los puntos de modo que el segmento AB mida 2 y BC, 1.
Luego, con la herramienta , traza la circunferencia con centro en A y radio AC.
Finalmente, activa la herramienta  y marca el punto E de intersección entre la circunferencia y el eje **x** (figura 4).

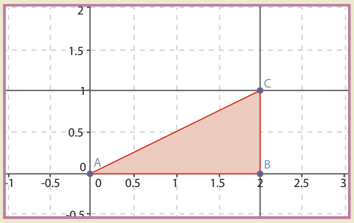



Figura 3

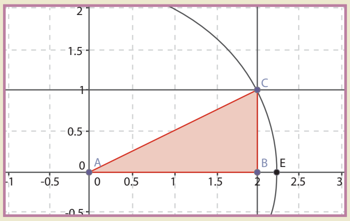



Figura 4

Puedes comprobar que la longitud aproximada de AE es 2,24, siendo el valor exacto igual a $\sqrt{5}$.

### EXPLORA E INTERACTÚA

Representa con GeoGebra los siguientes números irracionales (ambos catetos son enteros).

a. $\sqrt{29}$ b. $\sqrt{37}$ c. $\sqrt{40}$
d. $\sqrt{53}$ e. $\sqrt{61}$ f. $\sqrt{65}$

Representa con GeoGebra los siguientes números irracionales (uno de los catetos es irracional).

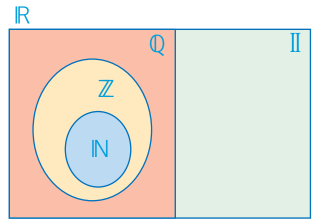
a. $\sqrt{11}$ b. $\sqrt{14}$ c. $\sqrt{18}$
d. $\sqrt{21}$ e. $\sqrt{27}$ f. $\sqrt{28}$

# Números reales

El conjunto de los **números reales** ($\mathbb{R}$) es la unión ($\cup$) entre el conjunto de los racionales y el de los irracionales.

Si $a$, $b$ y $c \in \mathbb{R}$, la adición y la multiplicación dan valores reales y tienen estas propiedades:

| Propiedad | Adición | Multiplicación |
|---|---|---|
| Conmutativa | $a + b = b + a$ | $a \cdot b = b \cdot a$ |
| Asociativa | $a + (b + c) = (a + b) + c$ | $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ |
| Distributiva | $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ | |
| Neutro | $a + 0 = a$ | $a \cdot 1 = a$ |
| Inverso | $a + (-a) = 0$ | $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ con $a \neq 0$ |



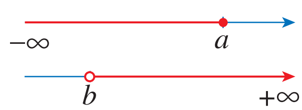
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

### Características de ℝ

- **Infinito**. No tiene ni primer ni último elemento.
- **Denso**. Siempre existe un número real entre dos reales cualesquiera.
- **Completo**. A cada punto de la recta le corresponde un número real y viceversa.
- **Ordenado**. Para todo par de reales distintos, $a < b$ o $a > b$.

# Intervalos

Un intervalo es un subconjunto de números reales, cuyos elementos están comprendidos entre dos límites que pueden o no pertenecer al intervalo. Se clasifican en cerrados, abiertos, semiabiertos o ilimitados.

| | Notación conjuntista | Notación gráfica |
|---|---|---|
| Intervalo cerrado<br>$I_1 = [a, b]$ | $I_1 = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$ |   |
| Intervalo abierto<br>$I_2 = (a, b)$ | $I_2 = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$ |   |
| Intervalos semiabiertos<br>$I_3 = [a, b)$<br>$I_4 = (a, b]$ | $I_3 = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$<br>$I_4 = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$ |   |
| Intervalos ilimitados<br>$I_5 = (-\infty, a]$<br>$I_6 = (b, +\infty)$ | $I_5 = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$<br>$I_6 = \{x \in \mathbb{R} / x > b\}$ |   |

### Notación

$/$ → "tal que".
$<$ → "menor que".
$>$ → "mayor que".
$\leq$ → "menor o igual que".
$\geq$ → "mayor o igual que".
$\vee$ → "o".
$\wedge$ → "y".

**EJEMPLO:**

Si $x \in [-1; 3]$, ¿a qué intervalo pertenece $(2x + 5)$?

- Como $-1 \leq x \leq 3$, duplicamos cada miembro: $-2 \leq 2x \leq 6$
- Sumamos 5 a cada miembro: $-2 + 5 \leq 2x + 5 \leq 6 + 5 \Rightarrow 3 \leq 2x + 5 \leq 11$

La expresión $(2x + 5)$ pertenece al intervalo $[3; 11]$.

Si $a < b \Rightarrow -a > -b$

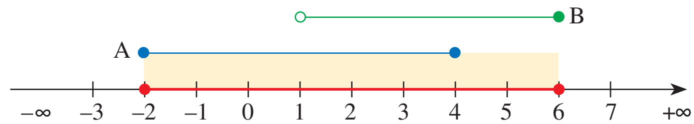
Se lee "entonces".

Si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$, entonces:

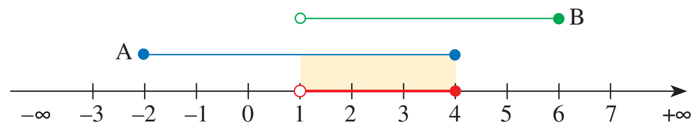
- Unión: son los $x$ que están en A o en B.
  $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} /$
  $x \in A \vee x \in B\}$
- Intersección: son los $x$ que están en A y en B a la vez.
  $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} /$
  $x \in A \wedge x \in B\}$

Considera los intervalos A = [–2; 4] y B = (1; 6].

1. A ∪ B = [–2; 4] ∪ (1; 6] = [–2; 6]. Son los números reales que están en la zona azul o en la verde.




2. A ∩ B = [–2; 4] ∩ (1; 6] = (1; 4]. Son los números reales ubicados donde coinciden las zonas azul y verde.




**14** Marca con ✓ los conjuntos a los que pertenezca cada número.

| | $\mathbb{N}$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{I}$ | $\mathbb{R}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{22}{7}$ | | | | | |
| $-\sqrt{121}$ | | | | | |
| 17,181920... | | | | | |
| $\frac{46}{23}$ | | | | | |
| 0,171717... | | | | | |
| $2 + \sqrt{3}$ | | | | | |

**15** Ordena de menor a mayor los números $3\sqrt{5}$; 7,04; $\frac{48}{7}$; $\sqrt{50}$ y $\frac{62}{9}$. Ayúdate con una calculadora.

**16** Determina un número real entre 7 y $5\sqrt{2}$.

**17** Responde a cada afirmación con **siempre**, **a veces** o **nunca**.

a. La suma de dos números irracionales resulta un número irracional.

b. El cociente de dos números racionales diferentes de cero es un número racional.

c. La diferencia de dos números enteros es un número racional.

d. El producto de dos números irracionales es un número entero negativo.

e. El cociente de dos números racionales positivos es cero.

f. El doble de un número irracional es irracional.

**18** Expresa de manera conjuntista y gráfica los siguientes intervalos:

a. (–4; 3]  b. (–∞; 6]  c. (3; +∞)

**19** Se sabe que x ∈ [–4; 7]. ¿A qué intervalo pertenece (4 – 3x)?

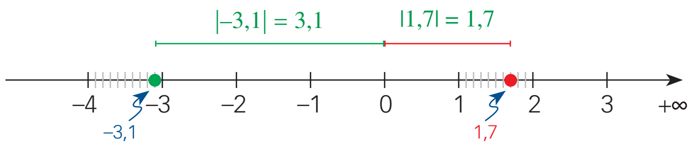
**20** Sean los conjuntos A = (–∞; 0) ∪ [5; 9); B = [–3; 1) ∪ [7; +∞) y C = (–∞; –4] ∪ (0; 7).

Resuelve las siguientes operaciones:

a. A ∪ B  b. A ∩ C

# Valor absoluto

El **valor absoluto** o **módulo** de un número real $x$, denotado por $|x|$, es la distancia que existe entre dicho número y el origen.




Según el caso, el módulo es el propio número o su opuesto: $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

**EJEMPLO:**

Resuelve la ecuación $|2x - 8| = 6x + 12$.

- Por definición: $6x + 12 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$
- Aplicamos la 7.ª propiedad: $2x - 8 = 6x + 12 \vee 2x - 8 = -(6x + 12)$

  Despejando cada ecuación: $x = -5 \vee x = -\frac{1}{2}$
- Pero solo $x = -\frac{1}{2}$ cumple la condición $x \geq -2$. Entonces: $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

**EJEMPLO:**

Resuelve las inecuaciones: **a)** $|3x - 2| \leq 7$ **b)** $|6x - 1| \geq 11$

**a)** Aplicamos la 8.ª propiedad: $-7 \leq 3x - 2 \leq 7$

Sumamos 2 a cada miembro: $-7 + 2 \leq 3x - 2 + 2 \leq 7 + 2$

Simplificamos: $-5 \leq 3x \leq 9$

Dividimos por 3 cada miembro: $-\frac{5}{3} \leq x \leq 3$. Entonces: $S = \left[-\frac{5}{3}; 3\right]$

**b)** Aplicamos la 9.ª propiedad: $6x - 1 \leq -11 \vee 6x - 1 \geq 11$

Es decir: $6x \leq -10 \vee 6x \geq 12$, de donde $x \leq -\frac{5}{3} \vee x \geq 2$.

Entonces: $S = (-\infty; -\frac{5}{3}] \cup [2; +\infty)$

**Propiedades**

1. $|a| \geq 0$
2. $|a| + |b| \geq |a + b|$
3. $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$
4. $\frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|; b \neq 0$
5. $|a|^2 = a^2$
6. $\sqrt{(a^2)} = |a|$
7. $|a| = b \wedge b > 0$
   $\Rightarrow a = b \vee a = -b$
8. $|a| \leq b \wedge b > 0$
   $\Rightarrow -b \leq a \leq b$
9. $|a| \geq b \wedge b > 0$
   $\Rightarrow a \leq -b \vee a \geq b$

**21** Resuelve estas ecuaciones:

**a.** $|3x - 5| = 7$ **b.** $|4 - 7x| = 2$

**22** Resuelve las siguientes ecuaciones:

**a.** $|x - 5| = |x - 3|$ **b.** $|3x - 1| = |3x + 7|$

**23** Resuelve las siguientes inecuaciones:

**a.** $|11x - 9| \geq 2$ **b.** $|4x + 3| \leq 15$

# Algunas operaciones con números reales

## Adición y sustracción

**EJEMPLO:**

Calcula el resultado exacto de $\pi + 7{,}1333... - \sqrt{2} + 2{,}16$.

- Reemplazamos con su fracción cada uno de los números racionales y mantenemos tal cual los números irracionales.

$$\pi + 7{,}1\widehat{3} - \sqrt{2} + 2{,}16 = \pi + \frac{713 - 71}{90} - \sqrt{2} + \frac{216}{100}$$

$$\pi + \frac{107}{15} - \sqrt{2} + \frac{54}{25} = \frac{75\pi + 535 - 75\sqrt{2} + 162}{75} = \frac{75(\pi - \sqrt{2}) + 697}{75}$$

Podemos tener una idea aproximada del resultado utilizando una calculadora.

Un número real tiene un valor exacto y puede tener diversos valores aproximados.

$$\frac{3+\sqrt{2}}{4} \approx 1{,}104$$

Valor exacto   Valor aproximado (a los milésimos)

## Multiplicación y división

**EJEMPLO:**

Calcula el valor exacto de $0{,}\widehat{81}\pi - \frac{e}{\sqrt{2}} + 2{,}2\widehat{6}\,\pi$

- Desarrollamos como en el ejemplo anterior:

$$\frac{81}{99} \cdot \pi - \frac{e}{\sqrt{2}} + \frac{226 - 22}{90} \cdot \pi = \frac{9\pi}{11} - \frac{e\sqrt{2}}{2} + \frac{34\pi}{15}$$

De nuevo, podemos aproximar el resultado con una calculadora.

**24** Calcula el valor exacto.

a. $3\sqrt{5} + \frac{7\pi}{5} - 2\,(\sqrt{5} - 3\pi)$

b. $\frac{\pi}{3} + 6\,\sqrt{3} - 6\pi \cdot 1{,}08333... - \sqrt{27}$

c. $6{,}5111... + \pi + 7{,}6 - \sqrt{2}$

d. $12{,}3555... + 1\frac{3}{7} - \sqrt{5} - 9$

**25** Redondea al milésimo cada término y aproxima el resultado al centésimo.

$5\sqrt{7} - \pi + \frac{2}{3} - 2{,}2\widehat{6}$

**26** Redondea cada término al centésimo y aproxima el resultado al décimo.

$3\sqrt{2} - 4\pi + \frac{7}{5} + 2{,}05\widehat{6}$

# Problemas con números reales

**EJEMPLO:**

La pantalla de un televisor mide 59,9 cm de altura y 106,2 cm de largo. Si la medida de la pantalla en pulgadas se determina por la longitud de su diagonal, ¿cuál será esa medida en pulgadas (enteras)? (1 pulgada = 2,54 centímetros)

- Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la diagonal:

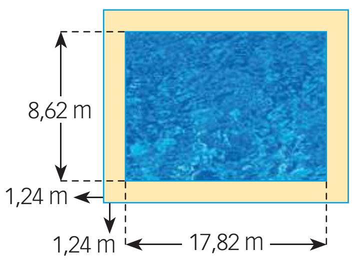
  $d = \sqrt{(59{,}9)^2 + (106{,}2)^2} \Rightarrow d \approx 121{,}93$ cm

- Convertimos la medida a pulgadas y redondeamos a los enteros:

  $121{,}93 \div 2{,}54 \approx 48$

La pantalla tiene una medida de 48 pulgadas.

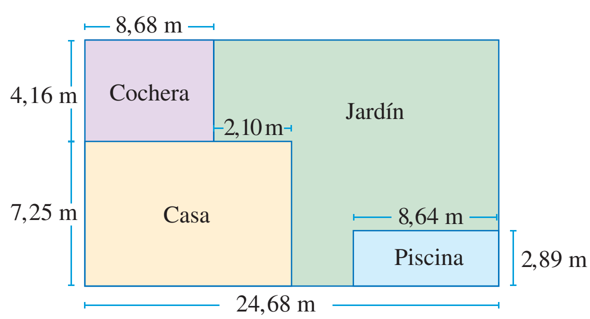
**27** La figura muestra una piscina vista desde arriba. Calcula el área de la capa de agua y el área de la vereda. Aproxima tus resultados al centésimo.



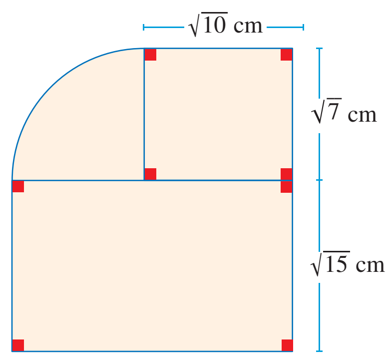

**28** El sueldo bruto de un ingeniero es de $32.860. Si el sueldo en mano es igual al sueldo bruto menos un descuento de 24,8%, ¿cuánto cobra por mes el ingeniero?

**29** Un fajo de 950 hojas tiene un espesor de 3,85 cm. ¿Cuántos milímetros de espesor tendrá una hoja de papel? Aproxima la respuesta al milésimo.

**30** Observa el plano. Luego, calcula el área del jardín y el área que ocupa toda la propiedad. Aproxima ambas respuestas al centésimo.




**31** Calcula y aproxima al centésimo el perímetro y el área de la figura.



# Potenciación de números reales

Dados $a \in \mathbb{R}$ y $n$ entero positivo, la potenciación en $\mathbb{R}$ se define como $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ veces}}$.

Además, si $a \neq 0$ y $n$ es un entero no negativo, entonces se definen: $a^0 = 1$ y $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Exponente
$a^n = P$
Base
Potencia

| Propiedades | Expresión simbólica | Ejemplos |
|---|---|---|
| Producto de potencias de igual base | $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ | $(-4)^3 \cdot (-4)^2 = (-4)^{3+2} = (-4)^5$ |
| Cociente de potencias de igual base | $a^n \div a^m = a^{n-m};\ a \neq 0$ | $(-3)^7 \div (-3)^3 = (-3)^{7-3} = (-3)^4$ |
| Potencia de una potencia | $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ | $[(-0{,}2)^3]^2 = (-0{,}2)^{3 \cdot 2} = (-0{,}2)^6$ |
| Potencia de un producto | $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ | $[(-5) \cdot 3]^3 = (-5)^3 \cdot 3^3 =$ $= -125 \cdot 27 = -3375$ |
| Potencia de un cociente | $(a \div b)^n = a^n \div b^n;\ b \neq 0$ | $(7 \div 10)^3 = 7^3 \div 10^3 =$ $= 343 \div 1000 = 0{,}343$ |

La única forma de que una potencia sea negativa es que lo sea la base y el exponente sea impar.

**EJEMPLO:**

Calcula el valor de $\dfrac{15^6 \cdot 12^4 \cdot 5^5 \cdot 6^5}{10^{11} \cdot 3^{13}}$.

- Factorizamos las bases y aplicamos la potencia a cada producto:

$$\frac{(3 \cdot 5)^6 \cdot (2^2 \cdot 3)^4 \cdot 5^5 \cdot (2 \cdot 3)^5}{(2 \cdot 5)^{11} \cdot 3^{13}} = \frac{3^6 \cdot 5^6 \cdot 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^5 \cdot 2^5 \cdot 3^5}{2^{11} \cdot 5^{11} \cdot 3^{13}}$$

- Aplicamos el producto y cociente de potencias de igual base:

$$\frac{2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{11}}{2^{11} \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}} = 2^2 \cdot 3^2 = 36$$

$-a^{-b} \neq (-a)^{-b}$

Solo $a$ está elevado a la $-b$.

$(-a)$ está elevado a la $-b$.

$-\boxed{3^{-2}} \neq (-3)^{-2}$

$-\dfrac{1}{3^2} \neq \dfrac{1}{(-3)^2}$

$-\dfrac{1}{9} \neq \dfrac{1}{9}$

**EJEMPLO:**

Calcula el valor de $x$ en la ecuación $27^{2x+1} = 3^{x+3}$.

- Expresamos la base 27 como potencia de 3:

$(3^3)^{2x+1} = 3^{x+3}$

- Aplicamos la potencia de una potencia:

$3^{3 \cdot (2x+1)} = 3^{x+3} \Rightarrow 3^{6x+3} = 3^{x+3}$

- Como ambos miembros tienen la misma base (3), igualamos exponentes:

$6x + 3 = x + 3 \Rightarrow x = 0$

**32** Completa.

a. $(x^{-a})^{-b} = \boxed{\phantom{xx}}$ b. $3^n \cdot 2^n = \boxed{\phantom{xx}}$

c. $\dfrac{20^{m+2}}{5^{m+2}} = \boxed{\phantom{xx}}$ d. $p^{q^0} = \boxed{\phantom{xx}}$

**33** Simplifica $\dfrac{50^3 \cdot 54^4 \cdot 80^5}{32 \cdot 10^{10} \cdot 6^{11}}$.

**34** Calcula $\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-(3)^{-1}} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-(2)^{-1}} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-(4)^{-2}}\right]^2$.

**35** Simplifica $\left[\dfrac{2 \cdot 7^{3n+1} \cdot 5^{2n+1} - 3 \cdot 7^{3n} \cdot 5^{2n}}{66 \cdot 7^{3n} + 7^{3n}}\right]^{n^{-1}}$.

**36** Halla el valor de $x$ en cada caso.

a. $5^{2x-7} = 3.125$ b. $(a^2)^{x+1} = (a^3)^{x-1}$

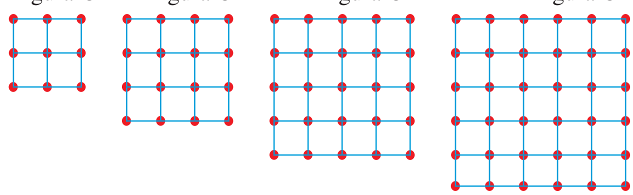
c. $81^{5x-2} = 27^{x+4}$ d. $0{,}125^{3-x} = 128$

**37** Calcula el valor de $x$.

$(26^{40} \cdot 121^{35} \cdot 25^{18}) \div (22^{40} \cdot 55^{30} \cdot 65^6) = 13^{7x-1}$

**38** Observa la secuencia de figuras.

Figura ① Figura ② Figura ③ Figura ④



¿Cuántos puntos rojos tendrá la figura 87?

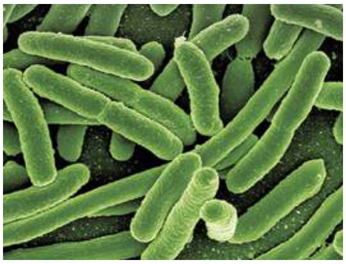
**EJEMPLO:**

Se observa que una bacteria se duplica cada hora.
Si a las 5:30 hay 3 bacterias, ¿a qué hora habrá 6.144 bacterias?

- Analizamos la reproducción de las bacterias mediante una tabla:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Horas transcurridas | 0 | 1 | 2 | 3 | ... | $n$ |
| N.º de bacterias | 3 | 6 | 12 | 24 | ... | 6.144 |
| Expresión potencial | $3 \cdot 2^0$ | $3 \cdot 2^1$ | $3 \cdot 2^2$ | $3 \cdot 2^3$ | ... | $3 \cdot 2^n$ |

- Planteamos la ecuación: $3 \cdot 2^n = 6.144 \Rightarrow 2^n = 2.048$
- Expresamos 2.048 como una potencia de dos : $2^n = 2^{11}$. Por lo tanto: $n = 11$
  A las 16:30 habrá 6.144 bacterias.



En este tipo de problemas, hay que lograr que las bases sean iguales para aplicar la siguiente propiedad:

Si $a^x = a^y$, entonces $x = y$.

# Radicación de números reales

Dados $P \in \mathbb{R}$ y $n$ entero positivo, llamamos raíz enésima de P ( $\sqrt[n]{P}$ ) a un número real $a$ definido así:

Si $n$ es par y $P \geq 0$, $\sqrt[n]{P} = a$ si y solo si $a^n = P$.

Si $n$ es impar, $\sqrt[n]{P} = a$ si y solo si $a^n = P$.

Índice

$\sqrt[n]{P} = a$

Radicando — Raíz

Las siguientes propiedades se cumplen siempre que existan $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$.

| Propiedades | Expresión simbólica | Ejemplos |
|---|---|---|
| Raíz de un producto | $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ | $\sqrt[3]{(-27) \cdot 125} = \sqrt[3]{(-27)} \cdot \sqrt[3]{125} =$ $= -3 \cdot 5 = -15$ |
| Raíz de un cociente | $\sqrt[n]{a \div b} = \sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b}$ | $\sqrt{16 \div 0{,}04} = \sqrt{16} \div \sqrt{0{,}04} =$ $= 4 \div 0{,}2 = 20$ |
| Raíz de una potencia | $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$ | $\sqrt[4]{5^{12}} = 5^{\frac{12}{4}} = 5^3 = 125$ |
| Raíz de una raíz | $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$ | $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{64}{729}}} = \sqrt[6]{\frac{64}{729}} = \frac{2}{3}$ |

**Potencia de exponente fraccionario**

Se define así:

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Ejemplo: $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$

No es posible encontrar un resultado real para las raíces de índice par de números negativos.

Por ejemplo, $\sqrt{(-25)}$ no es un número real.

**EJEMPLO:**

Simplifica $\sqrt[9]{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^4 \cdot \sqrt[5]{a^4}}}$ aplicando la raíz de una potencia.

$$\sqrt[9]{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^4 \cdot a^{\frac{4}{5}}}} = \sqrt[9]{a^2 \cdot a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{\frac{4}{15}}} = a^{\frac{2}{9}} \cdot a^{\frac{4}{27}} \cdot a^{\frac{4}{135}} = a^{\frac{2}{5}}$$

**EJEMPLO:**

Calcula $\sqrt[3]{\frac{8^4}{27^5}} \cdot \sqrt[4]{81^5 \cdot 16^2}$.

- Factorizamos las bases: $\sqrt[3]{\frac{(2^3)^4}{(3^3)^5}} \cdot \sqrt[4]{(3^4)^5 \cdot (2^4)^2}$
- Aplicamos la potencia de una potencia: $\sqrt[3]{\frac{2^{12}}{3^{15}}} \cdot \sqrt[4]{3^{20} \cdot 2^8}$
- Aplicamos la raíz de una potencia: $\frac{2^4}{3^5} \cdot 3^5 \cdot 2^2 = 2^6 = 64$

**EJEMPLO:**

El volumen de un cubo mide $13\sqrt{345}$ cm$^3$. Si su arista aumenta $\sqrt{11}$ cm, ¿en cuánto variará el volumen? Redondea cada valor al centésimo.

- Calculamos la arista ($a$) del cubo original: $V = a^3$

  $13\sqrt{345} = a^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{13\sqrt{345}} \Rightarrow a = 6{,}2270... \Rightarrow a = 6{,}23$
- Calculamos la nueva arista ($a_1$): $a_1 = 6{,}23 + \sqrt{11} \Rightarrow a_1 = 6{,}23 + 3{,}32 = 9{,}55$
- Calculamos el nuevo volumen ($V_1$): $V_1 = (9{,}55)^3 = 870{,}983875 = 870{,}98$
- Calculamos la variación del volumen ($V_1 - V$):

  $V_1 - V = 870{,}98 - 13\sqrt{345} = 870{,}98 - 241{,}46 = 629{,}52$ cm$^3$

El volumen del cubo aumentará $629{,}52$ cm$^3$.

**39** Resuelve.

a. $\sqrt[5]{9\sqrt[3]{81\sqrt{3}}} \cdot \sqrt[10]{27}$   b. $\sqrt[4]{\dfrac{16^2}{81^3}} \cdot \sqrt[5]{32^2 \cdot 243^3}$

**40** Trabaja con exponentes fraccionarios y completa.

a. $\left(\sqrt[n]{x^m}\right)^p = \boxed{\phantom{xx}}$   b. $\sqrt[a]{x} \cdot \sqrt[ab]{x} = \boxed{\phantom{xx}}$

c. $\sqrt[a]{\sqrt[b]{\sqrt[c]{x^{abcd}}}} = \boxed{\phantom{xx}}$   d. $\sqrt[a]{x^b \cdot \sqrt[c]{x^d}} = \boxed{\phantom{xx}}$

**41** Calcula.

a. $\sqrt[5]{9^6 \cdot \sqrt[3]{27^2 \cdot \sqrt[4]{81^3}}}$

b. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}}$

**42** Calcula el valor de $x$ en esta igualdad:

$$\sqrt[3]{3\sqrt[4]{9\sqrt[5]{27}}} = \sqrt[4x]{81 \cdot 3^7}$$

**43** Utiliza exponentes fraccionarios para simplificar la siguiente expresión:

$$\frac{ab \cdot \sqrt[3]{a \cdot \sqrt[4]{b^3}}}{\sqrt[4]{a \cdot \sqrt[5]{b^2}} \cdot \sqrt[12]{a \cdot \sqrt[5]{b^9}}}$$

**44** El período de oscilación de un péndulo es el tiempo que tarda en ir y volver a uno de sus extremos. Ese tiempo $T$ puede obtenerse a partir de la fórmula:

$$T = 2\pi + \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Donde $l$ es la longitud del péndulo y $g$ es la aceleración de la gravedad terrestre (9,81 m/s$^2$).

a. Redondea el valor de π a los centésimos y calcula el período de un péndulo de medio metro de longitud.

b. Considera que la gravedad en la Luna es aproximadamente un sexto de la terrestre y calcula cuál es el período allí.

# Operaciones con radicales

## Simplificación y amplificación de radicales

Si se dividen o se multiplican el índice y el exponente de una raíz por un mismo entero positivo, la nueva raíz que se obtiene es equivalente a la original.

Por simplificación $\underbrace{\sqrt[12]{64} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12 \div 6]{2^{6 \div 6}} = \sqrt{2}}_{\text{Equivalentes}}$

Por amplificación $\underbrace{\sqrt[5]{7^3} = \sqrt[5 \cdot 4]{7^{3 \cdot 4}} = \sqrt[20]{7^{12}}}_{\text{Equivalentes}}$

## Conversión de radicales a índice común

**EJEMPLO:**

Expresa $\sqrt[6]{3}$ y $\sqrt[9]{5}$ con índice común.

- Calculamos el MCM de los índices: MCM (6; 9) = 18
- Expresamos cada radical con el nuevo índice. El nuevo exponente del radicando será el **cociente** entre el nuevo índice y el anterior:

$$\sqrt[6]{3} = \sqrt[18]{3^{18 \div 6}} = \sqrt[18]{3^3} \qquad \sqrt[9]{5} = \sqrt[18]{5^{18 \div 9}} = \sqrt[18]{5^2}$$

## Adición y sustracción

Dos radicales son **semejantes** cuando tienen el mismo índice del radical y el mismo radicando.

Ejemplo: $2\sqrt[5]{3a}$ y $-7\sqrt[5]{3a}$

Si los radicales son semejantes, se suman o se restan los coeficientes y se escribe el mismo radical. Si no son semejantes, se intenta extraer factores para que lo sean. Si esto no es posible, se dejan indicados esos radicales.

**EJEMPLO:**

**a)** $2\sqrt{5} - 7\sqrt{5} + 11\sqrt{5} - 9\sqrt{5} = (2 - 7 + 11 - 9)\sqrt{5} = -3\sqrt{5}$

**b)** $\sqrt{27} + \sqrt{75} = \sqrt{3^3} + \sqrt{5^2 3} = \sqrt{3^2}\sqrt{3} + \sqrt{5^2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

## Multiplicación y división

Dos radicales son **homogéneos** cuando tienen el mismo índice en el radical.

Ejemplo: $\sqrt[4]{3m}$ y $\sqrt[4]{2n}$

Para homogeneizar radicales se calcula el MCM de sus índices.

Si los radicales son de igual índice, se multiplican o se dividen los coeficientes y los radicandos por separado, y se mantiene el mismo índice. Si los radicales no son de igual índice, hay que homogeneizarlos.

**EJEMPLO:**

**a)** $\left(3\sqrt[3]{270}\right)\left(\frac{5}{3}\sqrt[3]{225}\right) = \left(3\sqrt[3]{3^3 \cdot 2 \cdot 5}\right)\left(\frac{5}{3}\sqrt[3]{3^2 \cdot 5^2}\right) = 5\sqrt[3]{3^3 \cdot 5^3 \cdot 2 \cdot 3^2} = 75\sqrt[3]{18}$

**b)** $\left(2\sqrt[5]{2}\right)\left(3\sqrt[3]{3}\right)\left(-\frac{1}{4}\sqrt[15]{5}\right)$

Homogeneizamos los radicales: MCM (3; 5; 15) = 15

$2\sqrt[5]{2} = 2\sqrt[15]{2^{15 \div 5}} = 2\sqrt[15]{2^3}$ $\qquad 3\sqrt[3]{3} = 3\sqrt[15]{3^{15 \div 3}} = 3\sqrt[15]{3^5}$

Multiplicamos: $\left(2\sqrt[15]{2^3}\right)\left(3\sqrt[15]{3^5}\right)\left(-\frac{1}{4}\sqrt[15]{5}\right) = -\frac{3}{2}\sqrt[15]{2^3 \cdot 3^5 \cdot 5} = -\frac{3}{2}\sqrt[15]{9.720}$

**45** Simplifica los siguientes radicales:

a. $\sqrt{72}$ b. $\sqrt[3]{56}$

c. $\sqrt[4]{405}$ d. $\sqrt[5]{96}$

e. $\sqrt[3]{m^{11}n^{17}}$ f. $\sqrt[5]{128m^{12}}$

**46** Amplifica estos radicales hasta índice 30:

a. $\sqrt[3]{7}$ b. $\sqrt[5]{2}$

c. $\sqrt[3]{2a^2}$ d. $\sqrt[5]{2p^2q^5}$

**47** Homogeneiza cada pareja de radicales.

a. $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{3}$ b. $\sqrt[5]{6}$ y $\sqrt[15]{77}$

c. $\sqrt[7]{m^4}$ y $\sqrt[3]{x^2}$ d. $\sqrt[12]{a^{15}}$ y $\sqrt[21]{n^{49}}$

**48** Simplifica y reduce.

a. $\sqrt{18} + \sqrt{75} - \sqrt{200} + \sqrt{128} - \sqrt{507}$

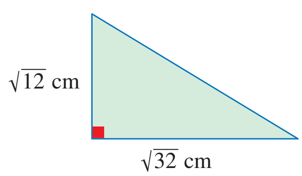
b. $\sqrt[3]{40} - \sqrt[4]{162} + \sqrt[3]{625} + 2\sqrt[4]{32} - \sqrt[3]{320}$

c. $2\sqrt{5}\,(3\sqrt{5} - 2) - 2\sqrt{3}\,(\sqrt{3} - 2\sqrt{5}) - \sqrt{80}(\sqrt{3} - 1)$

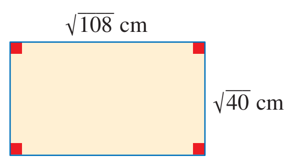
d. $\dfrac{\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{189}}{-5\sqrt[3]{7}}$

**49** Calcula el perímetro y el área de cada figura.

a.




b.



# Racionalización de denominadores

Racionalizar un denominador consiste en transformarlo en un número racional. Usualmente, eso se logra eliminando los radicales del denominador.

**EJEMPLO:**

Para racionalizar $\frac{6}{\sqrt[5]{8}}$ multiplicamos numerador y denominador por un factor que permita simplificar el índice del radical con el exponente del radicando.

$$\frac{6}{\sqrt[5]{2^3}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}}}_{\text{Factor}} = \frac{6\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{6\sqrt[5]{4}}{2} = 3\sqrt[5]{4}$$

**EJEMPLO:**

Para racionalizar $\frac{3}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}$ multiplicamos el numerador y el denominador por el factor $(\sqrt{11}-\sqrt{7})$, lo que genera un nuevo denominador que es racional.

$$\frac{3}{\sqrt{11}+\sqrt{7}} \cdot \underbrace{\frac{(\sqrt{11}-\sqrt{7})}{(\sqrt{11}-\sqrt{7})}}_{\text{Factor conjugado}} = \frac{3(\sqrt{11}-\sqrt{7})}{11-7} = \frac{3(\sqrt{11}-\sqrt{7})}{4}$$

**Factor conjugado**

Al multiplicar un binomio como $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ por su conjugado $\sqrt{x}-\sqrt{y}$, se eliminan las raíces cuadradas:

$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$
$= \sqrt{x}^2 - \sqrt{y}^2 = x - y$

**50** Racionaliza lo siguiente:

**a.** $\frac{12}{\sqrt{10}}$ **b.** $\frac{1}{\sqrt{12}}$ **c.** $\frac{7}{\sqrt[3]{2}}$

**d.** $\frac{18}{\sqrt[4]{27}}$ **e.** $\frac{15}{\sqrt[3]{16a^2}}$ **f.** $\frac{18}{\sqrt[4]{x^5y^7}}$

**51** Racionaliza utilizando el factor conjugado.

**a.** $\frac{13}{\sqrt{13}-\sqrt{5}}$ **b.** $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

**c.** $\frac{21}{3\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ **d.** $\frac{m}{\sqrt{3a}-\sqrt{a}}$

# Sucesiones

Una **sucesión** es un conjunto ordenado de números reales. Sus infinitos términos se generan al aplicar una regla determinada. Esos términos se simbolizan así: $a_1$; $a_2$; $a_3$; ... ; $a_n$, con $n$ entero y positivo.

Los subíndices señalan el lugar que ocupa cada término de la sucesión. El enésimo término es $a_n$ y se lo denomina término general de la sucesión. Por ejemplo, la sucesión definida por la regla $a_n = 3n$ corresponde a:

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3; & 6; & 9; & 12; & 15; \ldots; & 3n \end{array}$$

Una sucesión es creciente si cada término es mayor que el anterior. Por ejemplo, la sucesión {1; 3; 5; 7;...}. En esos casos decimos que $a_n \le a_{n+1}$ para todo $n$ entero positivo.

**EJEMPLO:**

Halla el término general de la sucesión $\frac{1}{2}; \frac{4}{5}; \frac{9}{10}; \frac{16}{17}; \ldots$

- Observamos que la sucesión es creciente y que sus términos se obtienen de la siguiente manera:

$$a_1 = \frac{1^2}{1^2+1} \qquad a_2 = \frac{2^2}{2^2+1} \qquad a_3 = \frac{3^2}{3^2+1} \qquad a_4 = \frac{4^2}{4^2+1} \qquad a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$$

El término general de la sucesión creciente es $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$.

Una sucesión es decreciente si cada término es menor que el anterior. Por ejemplo, la sucesión {1; 0,1; 0,01;...}. En esos casos decimos que $a_n \ge a_{n+1}$ para todo $n$ entero positivo.

**EJEMPLO:**

En la sucesión $2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \ldots$, ¿cuál es el término general $a_n$?

- Analizamos y obtenemos una regularidad:

$$a_1 = 2 = \frac{1+1}{1} \qquad a_2 = \frac{3}{2} = \frac{2+1}{2} \qquad a_3 = \frac{4}{3} = \frac{3+1}{3} \qquad a_4 = \frac{5}{4} = \frac{4+1}{4}$$

El término general de la sucesión es $a_n = \frac{n+1}{n}$, que además es decreciente.

Para demostrar que la sucesión del ejemplo es decreciente hay que operar con sus términos $a_n$ y $a_{n+1}$:

$$a_n \ge a_{n+1}$$
$$\frac{n+1}{n} \ge \frac{n+2}{n+1}$$
$$(n+1)\cdot(n+1) \ge (n+2)\cdot n$$
$$n^2+2n+1 \ge n^2+2n$$
$$1 \ge 0$$

Lo cual es cierto ya que 1 es mayor o igual que 0 para todo $n$ entero positivo.

Algunas sucesiones básicas:

- Constante: {2; 2; 2; 2; ...}

  $f(n) = 2$

  $f(1) = 2$; $f(2) = 2$;

  $f(3) = 2\ldots$

- Alternada: {1; –1; 1; –1; ...}

  $f(n) = (-1)^n$

  $f(1) = -1$; $f(2) = 1$;

  $f(3) = -1\ldots$

**52** Escribe el término general de las siguientes sucesiones:

a. $\frac{1}{4}; \frac{2}{5}; \frac{3}{6}; \frac{4}{7}; ...$  b. $\frac{1}{4}; \frac{4}{7}; \frac{9}{12}; \frac{16}{19}; ...$

c. $\frac{1}{2}; \frac{4}{3}; \frac{9}{4}; \frac{16}{5}; ...$  d. $\frac{1}{4}; \frac{3}{8}; \frac{5}{12}; \frac{7}{16}; ...$

**53** Determina el término general de la sucesión $\frac{2}{5}; \frac{4}{7}; \frac{6}{9}; \frac{8}{11}; ...$ y escribe el término 100.

**54** Determina el término general de la sucesión $\frac{1}{3}; \frac{4}{4}; \frac{9}{5}; \frac{16}{6}; ...$ y escribe el término 30.

**55** Determina el término general de la sucesión $-\frac{2}{7}; -\frac{5}{8}; -\frac{8}{9}; -\frac{11}{10}; ...$ y escribe el término 18.

**56** Demuestra que la sucesión $a_n = \frac{3n - 1}{4n + 5}$ es creciente.

**57** Demuestra que la sucesión $a_n = \frac{-2n + 1}{n + 5}$ es decreciente.

**58** Una empresa de viajes ofrece un micro en alquiler a $2.400.

Los posibles pasajeros deciden repartirse el costo del alquiler en forma equitativa. ¿Cuánto aportará cada uno si van 3; 4; 5 o 6 personas? ¿Y si fueran *n* personas? ¿Qué tipo de sucesión se formará?

**59** En una granja se aumenta cada semana la ración total de alimentos. La primera semana se inició con 1 kg de alimentos, la segunda aumentó a 1,5 kg, la tercera a 2 kg, y así sucesivamente ¿Cuántos kilogramos se distribuyó en la octava semana?

En algunas sucesiones cada término puede obtenerse sumando al anterior una constante $d$, por lo que estableciendo el valor del primer término ($a_1$) quedan determinados todos los demás.

**EJEMPLO:**

Calcula el quinto y sexto término de la sucesión 7; 11; 15; 19;...

- Observamos que cada término de la sucesión se obtiene sumando 4 al término anterior.

$$7 \xrightarrow{+4} 11 \xrightarrow{+4} 15 \xrightarrow{+4} 19 \xrightarrow{+4} 23 \xrightarrow{+4} 27...$$

$a_5 = 23$ $a_6 = 27$

◀ constante: $d = 4$

En las sucesiones que se obtienen a partir de sumas, el término general es de la forma $a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$.

En nuestro ejemplo:

$a_5 = 7 + 4 \cdot (5 - 1) = 23$

$a_6 = 7 + 4 \cdot (6 - 1) = 27$

Hay otras sucesiones donde cada término se obtiene multiplicando al anterior por una constante $r$. Aquí también, al establecer el valor del primer término ($a_1$), quedan determinados todos los demás.

**EJEMPLO:**

Calcula el quinto y sexto término de la sucesión 3; 6; 12; 24;...

- Observamos que cada término de la sucesión se obtiene multiplicando por 2 el término anterior.

$$3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{\times 2} 24 \xrightarrow{\times 2} 48 \xrightarrow{\times 2} 96...$$

$a_5 = 48$ $a_6 = 96$

◀ constante: $r = 2$

En las sucesiones que se obtienen a partir de multiplicaciones, el término general es de la forma $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$.

En nuestro ejemplo:

$a_5 = 3 \cdot 2^{(5-1)} = 48$

$a_6 = 3 \cdot 2^{(6-1)} = 96$

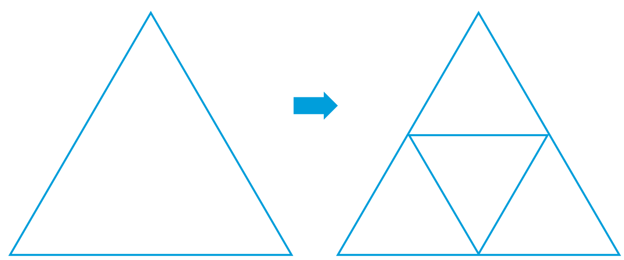
**60** El primer día de entrenamiento un atleta corre 4 km. Luego agrega 2 km diarios hasta completar los 42 km que demanda una maratón.

a. Escribe la sucesión de km que recorre la primera semana de entrenamiento.

b. Plantea una fórmula que permita calcular los kilómetros que recorre cada día.

c. Utiliza la fórmula anterior para averiguar qué día completa el recorrido de la maratón.

**61** Un triángulo equilátero puede subdividirse en 4 triángulos equiláteros más pequeños e iguales. A la vez, cada uno de esos puede subdividirse en otros 4 equiláteros, obteniéndose 16 en total. Y así sucesivamente.



a. Escribe la sucesión que muestra la cantidad de triángulos que hay en cada paso, del 1.º al 6.º.

b. Plantea una fórmula que permita calcular la cantidad de triángulos en cada paso.

c. Utiliza la fórmula anterior para averiguar cuántos triángulos hay en el 10.º paso.

**62** En cada caso determina si se trata de una sucesión de sumas o de multiplicaciones sucesivas y escribe la fórmula del término general.

a. –7; –2; 3; 8; 13;...

b. 1,5; 4,5; 13,5; 40,5; 121,5;....

c. 5; –10; 20; –40; 80;...

d. 7; 7 1/2; 8; 8 1/2; 9;...

**63** Sin hacer cuentas indica si el siguiente cálculo da racional o irracional. Luego, expresa el resultado de la forma más simple posible.

$$\frac{3^2 \cdot 16^5 \cdot 6^3 \cdot 248}{4^6 \cdot 9^2 \cdot 48 \cdot 2 \cdot 31}$$

**64** **a.** Representa los siguientes números en la recta numérica.

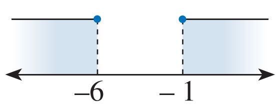
**I.** $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ **II.** $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

**III.** $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ **IV.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

**b.** Con ayuda de una calculadora redondea esos números al milésimo. Luego, ordénalos de menor a mayor. ¿Ese orden es acorde a sus ubicaciones en la recta numérica?

**c.** Encuentra un número entero, un racional (no entero) y un irracional entre los valores **I** y **II**.

**65** Completa la tabla.

| Intervalo | Representación gráfica |
|---|---|
| $(-\infty; -4) \cup [2; +\infty)$ | |
| |  |
| $(5; +\infty)$ | |
| |  |

**66** **a.** Resuelve las siguientes inecuaciones y representa cada solución en la recta numérica.

**I.** $-2x + 4 \geq x + 1$ **II.** $-5 < 2x + 1 < 3$

**III.** $|1 - 3x| \leq 4$ **IV.** $|5x + 2| > 8$

**b.** Halla y representa en la recta la unión y la intersección de las soluciones de los ítems **I** y **II**.

**67** Si $p = \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}}$ y $q = \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}}$, calcula el valor exacto de $p + q$.

**68** Con ayuda de una calculadora redondea cada raíz cuadrada a los centésimos y halla el resultado final.

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1}}$$

**69** El largo y alto de una pantalla de televisor son proporcionales a 16 y 9, respectivamente. Si una pantalla tiene 60 cm de largo, ¿de cuántas pulgadas es el televisor?
Y si un televisor es de 50 pulgadas, ¿qué dimensiones, en centímetros, tiene su pantalla?

**70** Completa.

**a.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{\_\_}{}\right)^{\_\_}$ **b.** $(x^{-a})^b = (x^b)^{\_\_}$

**c.** $a^{b^{-1}} = \sqrt[\_\_]{\_\_}$ **d.** $\dfrac{1}{a^{-n}} = \_\_^{\_\_}$

**71** Extrae factores de cada raíz y simplifica.

**a.** $\sqrt[7]{640}$ **b.** $\sqrt[8]{59.049}$ **c.** $\sqrt[3]{1.750}$

**d.** $\sqrt[3]{81a^7b^{10}}$ **e.** $\sqrt[5]{-486p^{23}}$ **f.** $\sqrt[4]{7^{13}m^{19}n^{43}}$

**72** Calcula el valor de $x$ en cada caso.

**a.** $2^{-2x+1} = 0{,}125$ **b.** $\sqrt[8]{\dfrac{7^{15} \cdot 7^x}{7^{2x-4} \cdot 7^3}} = 7$

**73** Simplifica.

$$\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) - 6\sqrt{3}(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{\sqrt{5}(\sqrt{5} + 6\sqrt{7}) - 3\sqrt{7}(2\sqrt{5} + \sqrt{7})}$$

**74** Reduce.

**a.** $4\sqrt{5} + 2\sqrt{125} - 2\sqrt{320} + \sqrt{245}$

**b.** $2\dfrac{\sqrt[3]{8}}{3} - 2\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3 \cdot 9^2}$

**75** Observa los primeros términos de esta sucesión.

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}};\ \ldots$$

**a.** Expresa el término general y halla $a_{10}$.

**b.** Racionaliza esos primeros tres términos y expresa ahora $a_n$.

**c.** Indica si la sucesión es creciente o decreciente.

## Consumo en internet

**76** Una empresa calculó que entre los años 1998 y 2012 el gasto promedio mensual $G$ por persona por el uso de internet se podía calcular con la fórmula $G = 1{,}5892t + 5{,}1732$, mientras que otra empresa propuso $G = 0{,}0148t^2 + 0{,}7795t + 13{,}0192$, donde $t$ es el número de años contados a partir de 1998. Si las tarifas promedio en 2012 y 2013 fueron \$29,40 y \$30,50, respectivamente, ¿cuál de las fórmulas da con más precisión el gasto? ¿Cuál podría ser el gasto promedio por persona en 2018? Utiliza la fórmula más precisa.

## Recuperar el capital

**77** Un comerciante compra "$n$" artículos a \$1 cada uno, vende $\frac{1}{4}$ de su mercadería perdiendo $\frac{1}{5}$ de lo que le costó. Luego, vende $\frac{1}{3}$ de lo que le quedaba perdiendo $\frac{1}{20}$ de su costo. ¿A cuánto debe vender cada artículo restante para recuperar su capital?

## Cálculo de resistencias

**78** La resistencia total R de un circuito serie-paralelo se calcula mediante la fórmula:

$$R = R_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)^{-1}$$

Halla R si se sabe que:

$R_1 = 6{,}5\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 6\Omega$ y $R_4 = 7{,}5\Omega$.

## Tecnología del desagüe

**79** En un orificio rectangular de profundidad $h_2 - h_1$, la velocidad de descarga promedio es:

$$v = \frac{2 \cdot C_v \left(h_2^{\frac{2}{3}} - h_1^{\frac{2}{3}}\right)\sqrt{2g}}{3(h_2 - h_1)}$$

Calcula $v$ (en metros por segundo) cuando $C_v$ (coeficiente de velocidad) es 0,96, $h_2 = 0{,}512$ m, $h_1 = 0{,}343$ m y g = 9,81 m/s$^2$.

Expresa el resultado final redondeando el valor a los centésimos.

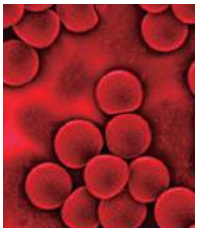
## Inversiones

**80** Si S pesos se invierten a una tasa de interés anual $r$ compuesta $n$ veces al año, entonces la cantidad total A acumulada después de $t$ años se define por esta fórmula:

$$A = S\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$$

Aproxima la cantidad de dinero acumulado que tendrá Cecilia luego de 5 años si invierte \$12.000 al 6,8 % ($r = 0{,}068$) de interés compuesto mensual ($n = 12$).

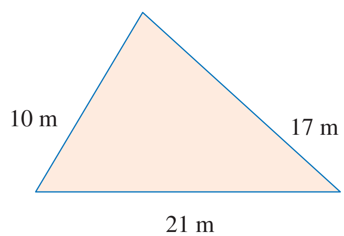
## Glóbulos rojos



**81** Un mililitro de sangre humana contiene, aproximadamente, $5 \cdot 10^6$ glóbulos rojos. Si un adulto tiene cerca de 5,5 litros de sangre, ¿cuántos glóbulos rojos tiene?

## Una siembra triangular

**82** Javier siembra una superficie triangular con semillas que cuestan \$75 el metro cuadrado. Para saber la medida de la superficie, emplea la siguiente fórmula del área de un triángulo:
$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, donde $p$ es el semiperímetro y $a$, $b$ y $c$ son las longitudes de sus lados.




Calcula el costo de la siembra.

# AUTOEVALUACIÓN

## Bicicletas de diversos tamaños

Mario, Rita y Saúl usan bicicletas de tamaños distintos. La siguiente tabla muestra las distancias en centímetros que recorren sus ruedas al dar una vuelta completa.

| | Distancia recorrida redondeada a los centímetros | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 vuelta | 2 vueltas | 3 vueltas | 4 vueltas | 5 vueltas |
| Mario | 168 | 336 | 504 | 672 | … |
| Rita | 196 | 392 | 588 | 784 | … |
| Saúl | 224 | 448 | 672 | 896 | … |

1. Cuando van juntos, por cada vuelta que da una rueda de la bicicleta de Mario, la de Rita da 0,857142... vueltas. Saúl dice que eso representa un número irracional de vueltas. ¿Tiene razón? ¿Por qué?

2. Recuerda que la longitud de una circunferencia es el producto entre su diámetro y el número $\pi$.
   a) Indica cuál de los siguientes valores se aproxima al radio de las ruedas de Saúl.
      i. $112 : \pi$ ii. $112 \cdot \pi$
      iii. $224 : \pi$ iv. $224 \cdot \pi$
   b) Rodea con color el o los conjuntos numéricos a los que pertenece el valor elegido en el ítem anterior.
      $\mathbb{N}$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{I}$ | $\mathbb{R}$

3. a) A partir de la tabla y para cada ciclista, escribe el término general de la sucesión que indica los centímetros recorridos aproximadamente con relación al número de vueltas.
   b) Calcula $a_{28}$ para Mario, $a_{24}$ para Rita y $a_{21}$ para Saúl. ¿Qué representa ese valor?

4. Para la bicicleta de Rita asume que el radio de cada rueda mide $98 : \pi$ cm.
   Considera que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es una buena aproximación del valor de $\pi$ y utilízala para expresar el valor del radio, racionalizando el denominador.

# 2 Funciones


## MATEMUNDO

Al estudiar la naturaleza percibimos que algunos fenómenos varían con el paso del tiempo. Por ejemplo, si observamos día a día, veremos que el amanecer se adelanta al aproximarse el verano, y se atrasa al aproximarse el invierno. En otras palabras, la hora del amanecer está en **función** de la fecha en que se lo observe.

Otro fenómeno –de variación más inmediata– se da en el **crecimiento** y el **decrecimiento** del nivel costero del mar, debido a la marea. En este caso, los efectos gravitatorios de la Luna y el Sol hacen que el nivel del mar suba y baje periódicamente, en un mismo día. Al **máximo** nivel se lo llama pleamar y al **mínimo**, bajamar, y el **intervalo** entre uno y otro es de aproximadamente 6 horas.

Hay sitios en los que la diferencia de alturas entre pleamar y bajamar es de varios metros, como sucede en la costa de Río Gallegos, donde el nivel del mar puede variar –en promedio– unos 9 m entre ambos extremos.

- Imagina la costa de Río Gallegos. Si se estableciera como 0 metros el punto medio entre bajamar y pleamar, ¿cuáles serían los valores mínimo y máximo del nivel del mar?
- Considera que hubo una pleamar a las 00:00 y realiza un gráfico aproximado del nivel del mar en función de la hora para un día completo en esa ciudad austral.

## Busco en la web

Digita en algún buscador (Firefox, Chrome, etc.) lo siguiente:

marea en Río Gallegos

Analiza los gráficos que encuentres acerca del comportamiento de la marea en ese lugar, y compáralo con el que realizaste.

## ESTO YA LO SABÍA...

**1** Considera la función $f(x) = 5x - 1$ y calcula.

**a.** $f(-2)$ **b.** $f(6)$ **c.** $f(-7)$ **d.** $f(m)$

**2** Representa gráficamente estas funciones.

**a.** $f(x) = x + 6$ **b.** $f(x) = -2x + 1$

# Dominio de una función

El **dominio** de una función $f(x)$ es el conjunto de los valores de $x$ para los cuales la función está definida. Es decir, los $x$ que hacen que cada $f(x)$ sea un único número real.

Usualmente se busca el mayor dominio posible de la función. Pero podría suceder que se requiera un dominio más acotado: por ejemplo, aquel que haga que los resultados sean mayores (o menores) que un cierto valor.

**EJEMPLOS:**

- En $f(x) = \dfrac{4}{x-5}$, el denominador $x - 5$ debe ser diferente de cero, ya que no existe la división por 0. Es decir: $x - 5 \neq 0 \rightarrow x \neq 5$

  Entonces, Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{5\}$.

- En $g(x) = \sqrt{x+1}$, el radicando $x + 1$ debe ser mayor o igual que cero, ya que en $\mathbb{R}$ no existe la raíz cuadrada de un número negativo.
  Es decir: $x + 1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$

  Entonces, Dom $g(x) = [-1; +\infty)$.

- En $h(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{2x+1}}$, el denominador no puede ser nulo y el radicando debe ser igual o mayor que cero. Se dan dos casos:

  **Caso 1**

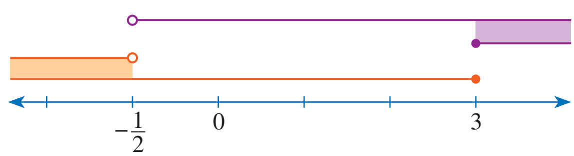
  $x - 3 \geq 0 \wedge 2x + 1 > 0$

  $x \geq 3 \wedge x > -\dfrac{1}{2}$

  **Caso 2**

  $x - 3 \leq 0 \wedge 2x + 1 < 0$

  $x \leq 3 \wedge x < -\dfrac{1}{2}$




Entonces, Dom $f(x) = (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup [3; +\infty)$.

### USO DE SOFTWARE MATEMÁTICO

Accede a https://www.mathway.com/es/Algebra y digita $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$.

Luego haz clic en el símbolo ➤ y, elige la opción "Encontrar el dominio". Analiza la respuesta y la gráfica que aparecen. Haz un procedimiento similar para evaluar el dominio de otras funciones.

**3** Halla el dominio de cada función.

a. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$

b. $h(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$

c. $g(x) = \sqrt{9-x}$

d. $i(x) = \sqrt{2x-7}$

e. $j(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$

f. $k(x) = \sqrt{\dfrac{5-x}{x+8}}$

**4** Determina el dominio de estas funciones, recordando que puedes resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a. $f(x) = \dfrac{9x-5}{x^2+7x+12}$

b. $h(x) = \dfrac{x+1}{x^2-9x+8}$

# Imagen de una función

La **imagen** o el **rango** de una función $f(x)$ es el conjunto de los resultados que se obtienen al aplicar $f(x)$ a todos los valores $x$ del dominio.

**EJEMPLOS:**

- Para $f(x) = \dfrac{4}{x-5}$ , la expresamos como $y = \dfrac{4}{x-5}$ y despejamos $x$:

  $y = \dfrac{4}{x-5} \rightarrow x - 5 = \dfrac{4}{y} \rightarrow x = \dfrac{4}{y} + 5$ ◀ $y$ no puede ser cero.

  Por lo tanto, $\text{Im}\, f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$.

- Para $g(x) = \sqrt{x+4}$, sabemos que el radicando $x + 4$ es un valor mayor o igual a 0.

  Entonces, su raíz cuadrada también será mayor o igual a 0.

Por lo tanto, $\text{Im}\, g(x) = [0; +\infty)$.

- Para $h(x) = \sqrt{\dfrac{2x+5}{x-13}}$, elevamos ambos miembros al cuadrado. Luego, despejamos $x$:

  $y = \sqrt{\dfrac{2x+5}{x-13}} \rightarrow y^2 = \dfrac{2x+5}{x-13} \rightarrow xy^2 - 13y^2 = 2x + 5$

  $xy^2 - 2x = 13y^2 + 5 \rightarrow x(y^2 - 2) = 13y^2 + 5 \rightarrow x = \dfrac{13y^2 + 5}{y^2 - 2}$

  Como $y = h(x)$ es una raíz cuadrada, necesariamente debe ser mayor o igual que 0. Además, en el denominador, $y^2 - 2 \neq 0$. Es decir, $y \neq \sqrt{2}$.

Por lo tanto, $\text{Im}\, h(x) = [0; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

En los problemas de Física o de aplicaciones prácticas es necesario evaluar si los resultados tienen sentido en la realidad.

**5** Halla la imagen de cada función.

a. $f(x) = \dfrac{7}{x-2}$

b. $h(x) = \dfrac{x}{8-x}$

c. $g(x) = \sqrt{2x+3}$

d. $i(x) = \sqrt{7-2x} - 3$

**6** Calcula la imagen de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{5+x}}$

b. $g(x) = \sqrt{\dfrac{8-x}{2x+1}}$

c. $g(x) = 4 - x^2$

d. $f(x) = \dfrac{x^2 - 7}{x^2}$

# Positividad y negatividad

Las $x$ del dominio pueden clasificarse según $f(x)$ dé resultados positivos, negativos o nulos.

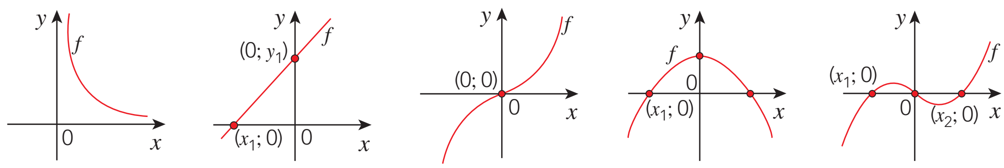
El conjunto de **positividad** ($C^+$) está formado por todos los $x$ tales que $f(x) > 0$.
El conjunto de **negatividad** ($C^-$) está formado por todos los $x$ tales que $f(x) < 0$.
El conjunto de **ceros** ($C^0$) está formado por todos los $x$ tales que $f(x) = 0$.

En cada gráfico, los pares ordenados de los puntos de corte con los ejes son:

- Con el eje $y$, $(0; y_1)$
- Con el eje $x$, $(x_1; 0)$

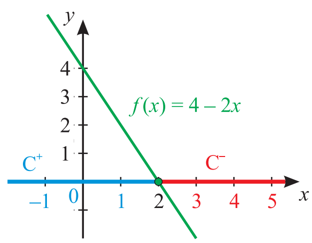
Es decir, cuando se intersecta un eje, la otra variable es nula.

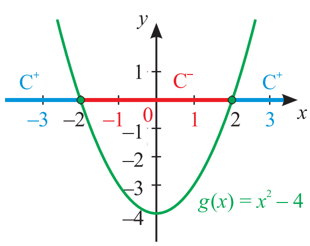
En los gráficos que se muestran, la primera función no corta el eje $x$, mientras que las demás lo hacen en uno o más puntos. Esas $x$ constituyen el $C^0$ de cada $f(x)$. El resto de las $x$ constituirán el $C^+$ (si la curva está por encima del eje $x$) o el $C^-$.




## Intersección de la función con los ejes

Para hallar la intersección de $f$ con el eje $y$, se calcula $f(0)$.
Para hallar la intersección de $f$ con el eje $x$, se plantea $f(x) = 0$.




**EJEMPLOS:**

Encuentra los puntos de corte con los ejes y expresa $C^0$, $C^+$ y $C^-$.

**a)** $f(x) = 4 - 2x$ Con el eje $y$: $f(0) = 4 - 2(0) = 4$ ◀ Punto de corte: (0; 4)

Con el eje $x$: $0 = 4 - 2x \rightarrow x = 2$ ◀ Punto de corte: (2; 0)

$C^0 = \{2\}$ $C^- = (2; +\infty)$ $C^+ = (-\infty; 2)$

**b)** $g(x) = x^2 - 4$ Con el eje $y$: $g(0) = 0^2 - 4 = -4$ ◀ Punto de corte: (0; –4)

Con el eje $x$: $0 = x^2 - 4 \rightarrow x = \pm 2$ ◀ Puntos de corte: (2; 0) y (–2; 0)

$C^0 = \{-2; 2\}$ $C^+ = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ $C^- = (-2; 2)$

**EJEMPLO:**

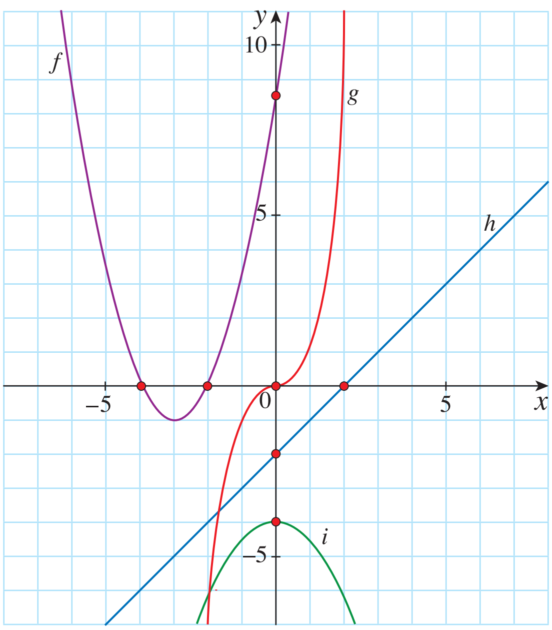
Un clavadista se deja caer desde un trampolín ubicado a 9,8 m de altura por sobre el agua. Entonces describe una trayectoria cuya altura ($y$) se aproxima mediante la expresión $y = 9{,}8 - 5\,t^2$, donde $t$ es el tiempo transcurrido (desde los 0 segundos). ¿Cuánto tarda el clavadista en tocar el agua?

Observemos que tocar el agua equivale a plantear que la altura es 0. Entonces debemos determinar el valor de $t$ cuando $y = 0$.

$$y = 9{,}8 - 5\,t^2 \rightarrow 0 = 9{,}8 - 5\,t^2 \rightarrow t = 1{,}4 \wedge t = -1{,}4$$

El resultado negativo no tiene sentido en este caso. Así que el clavadista tarda 1,4 segundos en tocar el agua.

**7** Nombra las coordenadas de los cortes de cada gráfico con los ejes y expresa $C^0$, $C^+$ y $C^-$.




**8** Determina los puntos de intersección con los ejes en cada función y expresa $C^0$, $C^+$ y $C^-$.

**a.** $f(x) = x$

**b.** $f(x) = 3 - 4x$

**c.** $f(x) = -x^2 + 4$

**d.** $f(x) = x^3 + 8$

**e.** $f(x) = x^2 - 5x$

**f.** $f(x) = -2x^2 - 1$

**9** ¿Cuántos puntos de intersección con los ejes tiene una función de la forma $f(\mathrm{x}) = mx + b$, con $\mathrm{m} \neq 0$?

**10** Una función constante es de la forma $f(x) = c$, con $c \in \mathbb{R}$. ¿Cuántos puntos de intersección tendrá el gráfico de esa función constante si $c \neq 0$? ¿Cómo serían las coordenadas de dichos puntos?

**11** ¿Cuántos puntos de intersección con los ejes $x$ e $y$ tendrá como máximo el gráfico de una función que sea una parábola?

**12** Elías adquiere una línea telefónica con un plan de pago. Se sabe que pagará un monto mensual fijo de $350 por el equipo y $2,10 por cada minuto de consumo.

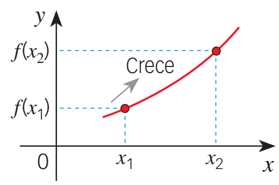
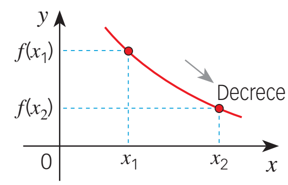
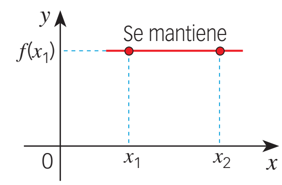
**a.** Determina la expresión que indica el monto que pagará Elías por mes.

**b.** Representa dicha expresión a través del gráfico de una función.

**c.** Indica el dominio de la función y analiza si tiene sentido considerar su intersección con los ejes.

# Crecimiento y decrecimiento

Una función puede cambiar su comportamiento según qué parte de su dominio estemos evaluando. Para saber si una función crece o decrece, recorremos su gráfico de izquierda a derecha viendo si el valor de $y$ aumenta o disminuye. Observa cómo analizamos las siguientes funciones en el intervalo $[x_1; x_2]$.

| Creciente | decreciente | Constante |
|---|---|---|
|   |   |   |
| Al aumentar el valor de $x$, aumenta también al valor de $y$. | Al aumentar el valor de $x$, disminuye el valor de $y$. | Al aumentar el valor de $x$, el valor de $y$ no varía. |

Máximos y mínimos relativos

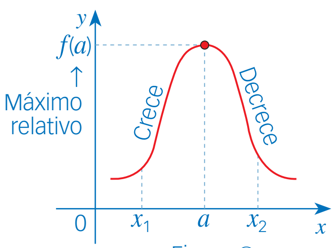


Figura ①

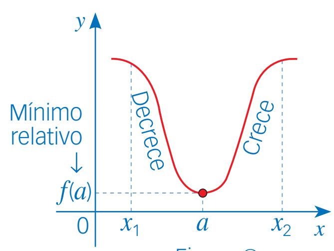


Figura ②

## Máximos y mínimos (extremos)

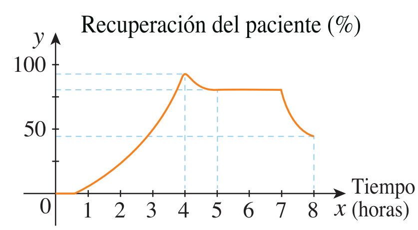
Una función puede tener valores **máximos** y **mínimos relativos** en el intervalo $[x_1; x_2]$.

- Cuando la función pasa de ser creciente en $[x_1; a)$ a ser decreciente en $(a; x_2]$, se dice que la función alcanza un **máximo relativo** en $a$ (figura ①).
- Cuando la función pasa de ser decreciente en $[x_1; a)$ a ser creciente en $(a; x_2]$, se dice que la función alcanza un **mínimo relativo** en $a$ (figura ②).

Al mayor y al menor valor de toda la función se los llama **absolutos**.

**EJEMPLO:**

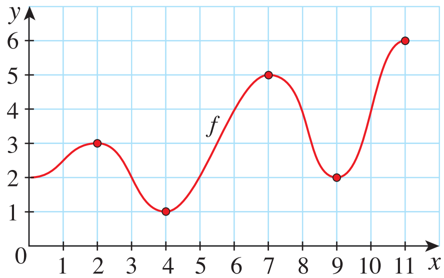
El efecto de cierto medicamento en el cuerpo de un paciente, después de haber ingerido la primera dosis, se representa en el siguiente gráfico, que relaciona la recuperación del paciente con el tiempo de acción. Analiza el comportamiento de esta función.




- Desde que se ingiere el medicamento hasta la primera media hora, se puede inferir que el efecto en el cuerpo es nulo, pues la función es constante.
- Entre la primera media hora y las cuatro horas, el medicamento inicia su efecto en forma creciente. Luego, la recuperación decrece entre la cuarta y quinta hora hasta que permanece constante entre la quinta y la séptima hora después de haber sido ingerido el medicamento, momento en el cual empieza a disminuir la recuperación del paciente.
- Podemos describir el comportamiento de la función en intervalos de tiempo.
  Es constante en los intervalos $[0; 0{,}5]$ y $[4{,}5; 7]$.
  Es creciente en el intervalo $(0{,}5; 4)$.
  Es decreciente en los intervalos $(4; 4{,}5)$ y $(7; 8]$.
  Tiene un máximo absoluto y relativo en $x = 4$.
  Su dominio es $[0; 8]$.

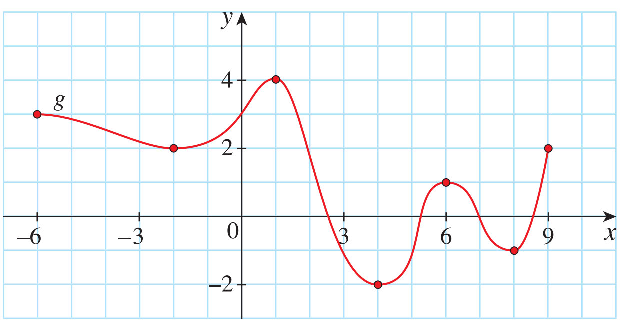
**EJEMPLO:**

Interpreta el gráfico de *f* si su dominio es [0; 11]. Encuentra sus valores máximos y mínimos.

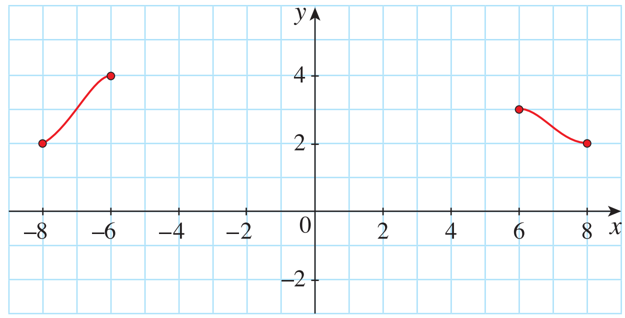



- La función *f* es creciente en los intervalos [0; 2) ∪ (4; 7) ∪ (9; 11).
- La función *f* es decreciente en los intervalos (2; 4) ∪ (7; 9).
- *f* tiene valores mínimos relativos en $x = 9$ y $x = 4$. Este último también es mínimo absoluto.
- *f* tiene valores máximos relativos en $x = 2$ y $x = 7$ y un valor máximo absoluto en $x = 11$.
- La imagen de *f* es [1; 6].

**13** Estudia el crecimiento de la función g y halla sus valores máximos y mínimos. Luego, determina su imagen.




**14** Completa con un posible gráfico, de modo que haya un mínimo absoluto en x = 4 y un máximo absoluto en x = –3.



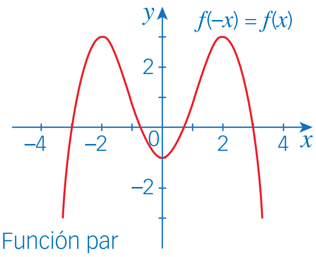

**15** Elabora un posible gráfico de una función que reúna las siguientes características:

**a.** – Dom $f(x) = [–6; 8]$.
– *f* es decreciente en (–6; –2) ∪ (1; 2) ∪ (3; 5).
– *f* es creciente en (–2; 1) ∪ (2; 3) ∪ (5; 8).
– Valores mínimos relativos en $x = –2$ y en $x = 2$; mínimo absoluto en $x = 5$; además, valores máximos relativos en $x = 1$ y $x = 3$.

**b.** – Dom $g(x) = [–9; 7]$.
– *g* es creciente en (–9; –5) ∪ (1; 3) ∪ (5; 7).
– *g* es decreciente en (–5; 1) ∪ (3; 5).
– Valor mínimo relativo en $x = 1$ y mínimo absoluto en $x = 5$; además, valor máximo relativo en $x = 3$ y máximo absoluto en $x = –5$.

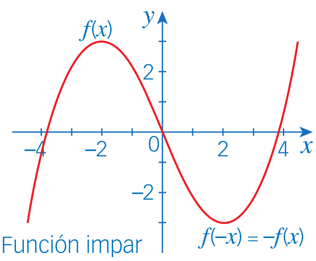
# Paridad

Una función $f$ es **par** si $f(-x) = f(x)$, para todo $x$ en su dominio.
Una función $f$ es **impar** si $f(-x) = -f(x)$, para todo $x$ en su dominio.



Función par

Figura ①



Función impar

Figura ②

Gráficamente, una función $f$ es par si es simétrica respecto al eje $y$ (figura ①), y es impar si es simétrica respecto al origen (figura ②).

**EJEMPLOS:**

Determina analíticamente si la función es par, impar o ninguna de las dos.

**a)** $f(x) = x^2 + 4$

Reemplazamos $x$ por $-x$ en la función y resolvemos:
$f(-x) = (-x)^2 + 4 \rightarrow f(-x) = x^2 + 4$
Como $f(-x) = f(x)$, entonces la función es par.

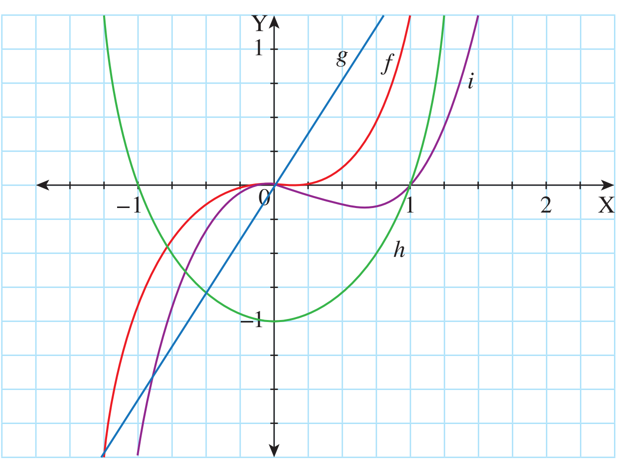
**b)** $g(x) = x^3 - 5x$

Reemplazamos $x$ por $-x$ en la función y resolvemos:
$g(-x) = (-x)^3 - 5(-x) \rightarrow g(-x) = -x^3 + 5x$
Hallamos el opuesto de $g(x)$: $-g(x) = -x^3 + 5x$
Como $g(-x) = -g(x)$, entonces la función es impar.

**c)** $h(x) = 3x - 2$

Reemplazamos $x$ por $-x$ en la función y resolvemos:
$h(-x) = 3(-x) - 2 \rightarrow h(-x) = -3x - 2$
Hallamos el opuesto de $h(x)$: $-h(x) = -3x + 2$
Como $h(-x) \neq h(x)$, la función no es par. Además, como $h(-x) \neq -h(x)$, la función no es impar. Por lo tanto, la función $h(x) = 3x - 2$ no es par ni impar.

**16** Para cada función indica si es par, impar o ninguna de las dos.




**17** Grafica en tu carpeta.

**a.** Una función par $f$ de máximo absoluto $y = 3$.

**b.** Una función impar $g$ que pase por el punto (4; 2).

**18** Determina la paridad de estas funciones en forma analítica.

**a.** $f(x) = -x^2 - 2$

**b.** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 5$

**c.** $f(x) = 4x + 5$

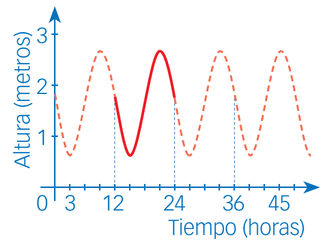
**d.** $f(x) = 3x^3$

**e.** $f(x) = x^4 + 5$

**f.** $f(x) = \sqrt[3]{x}$

# Periodicidad

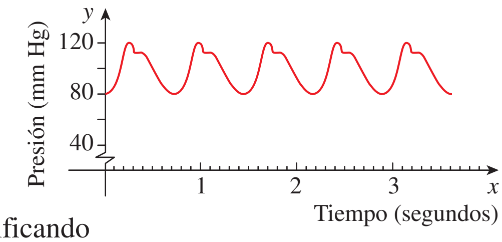
En una **función periódica**, parte de su gráfica se repite cada cierto intervalo denominado período. Es decir, $f(x) = f(x + \mathrm{T}n)$, donde T es el valor del período y $n$ es un número entero.



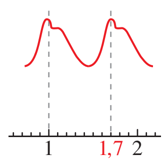

En este esquema el período es 12, porque el gráfico se repite cada 12 hs.

**EJEMPLO:**

Al latir, el corazón de una persona bombea sangre hacia las arterias generando una presión sanguínea. A partir del gráfico, calcula el ciclo cardíaco de esa persona.



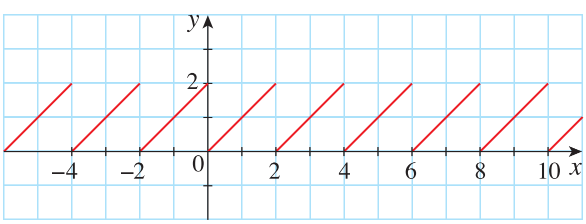

- Calculamos el ritmo cardíaco identificando el período en el gráfico. Tomamos dos puntos y hallamos la diferencia para sus valores en $x$: 1,7 s – 1 s = 0,7 s.



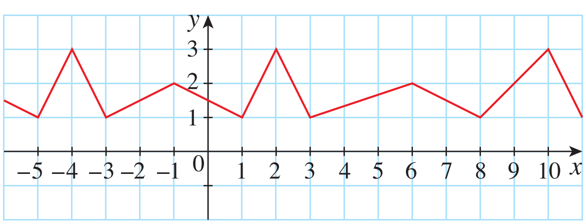

Entre un latido y el siguiente transcurren 0,7 segundos.

**19** Determina si cada gráfico corresponde a una función periódica. Si es así, indica su período.

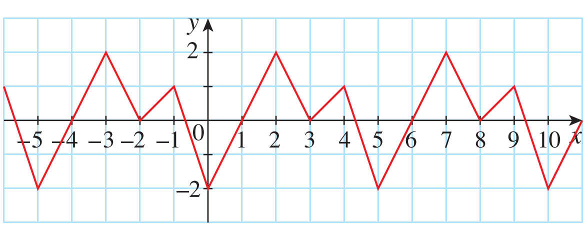
**a.**



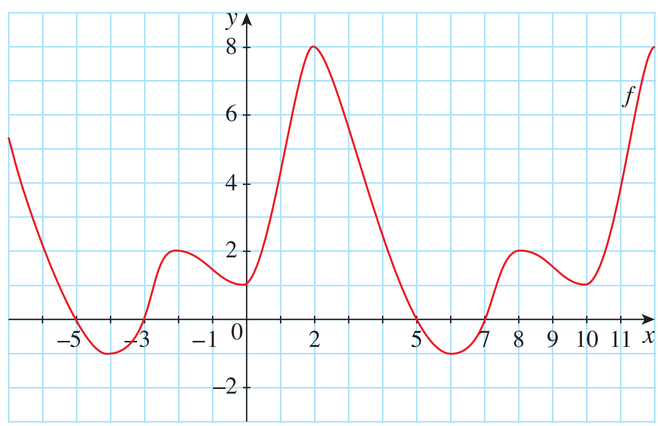
**b.**



**c.**



**20** Interpreta el siguiente gráfico:



**a.** Indica el período.

**b.** Señala los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

**c.** Nombra los valores máximos y mínimos.

**d.** Determina la imagen de la función.

# Función valor absoluto

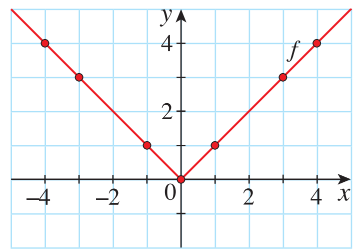
Observemos que la raíz cuadrada de $x^2$ coincide con la definición de valor absoluto: $f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$.

La función **valor absoluto** es la que asigna a cada $x$ su distancia al origen. Por eso, su fórmula coincide con la de $|x|$: $f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

**EJEMPLO:**

Grafica y analiza la función $f(x) = |x|$.

| $x$ | $\|x\|$ |
|---|---|
| $-4$ | 4 |
| $-3$ | 3 |
| $-1$ | 1 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 3 | 3 |
| 4 | 4 |

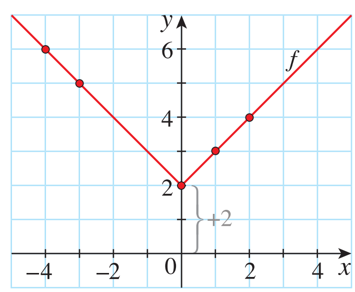



- Construimos una tabla de valores (ver margen izquierdo), ubicamos esos puntos en el plano y trazamos el gráfico.
- El dominio de $f$ es el conjunto de los números reales: Dom $f(x) = \mathbb{R}$.
- La imagen de $f$ es el conjunto de los números reales no negativos: Im $f(x) = [0; +\infty)$.
- Es una función par, ya que $f(-x) = f(x)$. Además, es decreciente en el intervalo $(-\infty; 0)$ y creciente en $(0; +\infty)$. Su vértice está en el punto $(0; 0)$ y representa el mínimo de la función.

Si el gráfico de una función tiene eje de simetría, a la intersección entre ambos se la llama **vértice**.

**EJEMPLO:**

Traza el gráfico de la función $f(x) = |x| + 2$ y escribe su definición.




- Observamos que tiene la misma forma que el gráfico de $|x|$, pero trasladada 2 unidades hacia arriba, pues a cada $|x|$ se le suma 2.
- Por lo dicho en el ítem anterior:

$$f(x) = |x| + 2 = \begin{cases} x + 2 \text{ si } x \geq 0 \\ -x + 2 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

**EJEMPLOS:**

Identifica las coordenadas del vértice de las siguientes funciones:

**a)** $f(x) = |x + 2| + 1$

- Sabemos que $|x + 2| \geq 0$. La función es mínima cuando $|x + 2| = 0$, es decir, cuando $x = -2$.
- Calculamos: $f(-2) = |-2 + 2| + 1 = 1$

Por lo tanto, el vértice de $f$ se ubica en $(-2; 1)$.

**b)** $f(x) = |x - 1| + 2$

- La función es mínima cuando $|x - 1| = 0$, es decir, cuando $x = 1$.
- Calculamos: $f(1) = |1 - 1| + 2 = 2$

El vértice de $f(x)$ es $(1; 2)$.

**21** Grafica y analiza las siguientes funciones. Luego, indica su dominio, imagen, paridad e intervalos de crecimiento, positividad y negatividad.

**a.** $f(x) = |x + 4|$

**b.** $f(x) = |x| - 7$

**c.** $f(x) = -|x + 2|$

**d.** $f(x) = -|3 - x|$

**22** Identifica las coordenadas del vértice de cada $f(x)$.

**a.** $f(x) = |x| - 7$ **b.** $f(x) = |x - 4| + 1$

**EJEMPLO:**

Grafica la función $f(x) = |2x + 4| - 3$. Luego, determina su dominio e imagen.

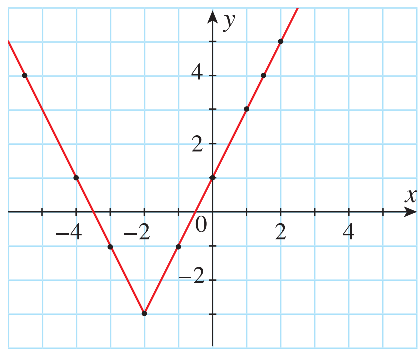
- Evaluamos $|2x + 4|$ aplicando la definición:

$$|2x+4| = \begin{cases} (2x+4) \text{ si } (2x+4) \geq 0 \rightarrow x \geq -2 \\ -(2x+4) \text{ si } (2x+4) < 0 \rightarrow x < -2 \end{cases}$$

- Desarrollamos:

$$|2x+4| - 3 = \begin{cases} (2x+4) - 3 = 2x + 1 \text{ si } x \geq -2 \\ -(2x+4) - 3 = -2x - 7 \text{ si } x < -2 \end{cases}$$

- Graficamos la recta $-2x - 7$ para $x < -2$ y la recta $2x + 1$ para $x \geq -2$.




- Determinamos el dominio y la imagen:

Dom $f(x) = \mathbb{R}$ Im $f(x) = [-3; +\infty)$

**23** Grafica las siguientes funciones y determina su dominio e imagen.

**a.** $f(x) = |2x|$ **b.** $f(x) = |-5x|$

**c.** $f(x) = |3x + 1|$ **d.** $f(x) = |-2x - 6|$

**e.** $f(x) = |-3x| - 2$ **f.** $f(x) = |5x| + 5$

**24** Halla las coordenadas del vértice de cada $f(x)$.

**a.** $f(x) = |4x + 1|$ **b.** $f(x) = |-3x - 9|$

**c.** $f(x) = |-6x| - 6$ **d.** $f(x) = |4x| + 12$

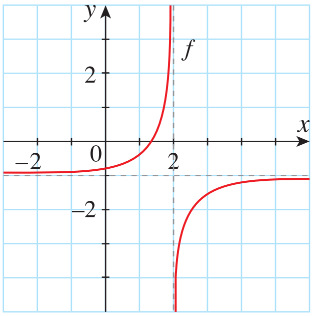
**e.** $f(x) = |5x - 1| + \frac{1}{5}$ **f.** $f(x) = |-3x - 1| + \frac{1}{3}$

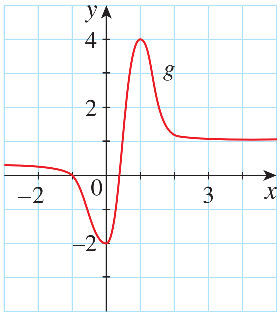
**25** En cada caso indica el dominio.

**a.** $h(x) = -2x + 5$ **b.** $i(x) = |x| + 11$

**c.** $f(x) = \dfrac{6}{11 - x}$ **d.** $g(x) = \sqrt{3x + 6}$

**26** Interpreta el gráfico de cada función y determina el dominio y la imagen.



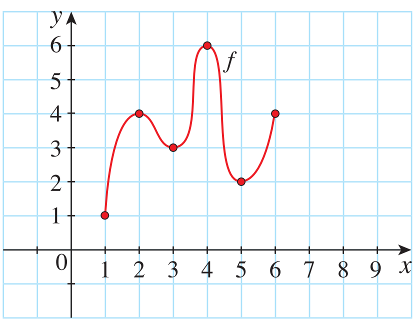


**27** Dada la función $f(x) = 3x^2$, realiza lo siguiente:

**a.** Halla dominio e imagen de $f$ y grafícala.

**b.** Expresa la función $h$ cuyo gráfico sea simétrico al de $f$ con respecto al eje $x$. Luego indica su dominio e imagen.

**28** Observa el gráfico de la función $f$ e indica sus intervalos de crecimiento, así como sus valores máximos y mínimos relativos y absolutos.

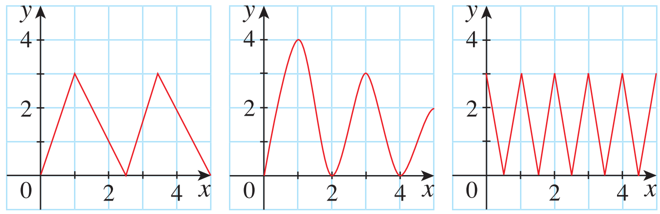


**29** Investiga la paridad de las siguientes funciones realizando el gráfico de cada una con ayuda del programa GeoGebra. Luego, justifica tus respuestas con un procedimiento algebraico.

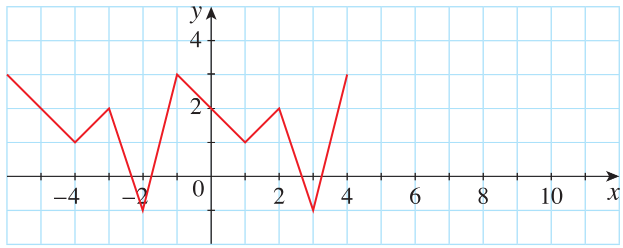
**a.** $f(x) = -x^3 + 4x$ **b.** $g(x) = -3x^2 + 4$

**c.** $f(x) = 5x^2 + 7x$ **d.** $g(x) = -5x^3 + 2x$

**30** Identifica aquellos gráficos que corresponden a funciones periódicas y escribe su período.



**31** Halla el período desde el gráfico. Luego, complétalo hasta $x = 11$ y determina $f(6)$; $f(8)$ y $f(10)$.

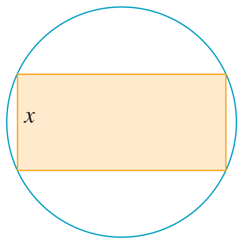


**32** Grafica y analiza las siguientes funciones. Luego, indica su dominio, imagen, paridad e intervalos de crecimiento, positividad y negatividad.

**a.** $f(x) = 2x + 1$ **b.** $f(x) = |x - 7| + 2$

**c.** $g(x) = |2x + 10|$ **d.** $g(x) = \sqrt{2x - 10}$

**33** En una circunferencia de 5 cm de radio se inscribe un rectángulo de altura $x$.



**a.** Expresa el área $A$ del rectángulo en función de $x$.

**b.** Halla el dominio de la función $A(x)$, considerando que las áreas solo pueden adoptar valores no negativos.

**c.** Se sabe que $A(x)$ tiene un valor extremo en $x = \sqrt{50}$. Indica si se trata de un máximo o de un mínimo y calcula su valor.

**d.** En la página web *www.mathway.com/es/Algebra* grafica y halla el dominio de la función $A(x)$. Compáralo con el dominio que averiguaste. ¿Por qué son distintos?

**34** Dadas las funciones $g(x) = |x - 2|$ y $h(x) = -|1 + x|$, halla el vértice de cada una e indica si su ordenada es un máximo o un mínimo.

## Contaminación del suelo

**35** En un campo se evalúa la contaminación del suelo considerando la cantidad de focos activos de pesticida presentes. Estos se van degradando con el tiempo y dejan de operar, y el número $f$ de los que quedan activos puede estimarse en función de los $x$ años transcurridos, según la fórmula:

$$f(x) = \frac{150}{1 + x^2} - 15$$

**a.** ¿Cuántos focos activos hubo al principio?
**b.** ¿Cuántos quedarán al cabo de 1 o 2 años?
**c.** ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que no quede ningún foco activo?
**d.** ¿Qué relación hay entre las intersecciones con los ejes y los ítems anteriores?
**e.** ¿Cuál es el dominio de esta función?

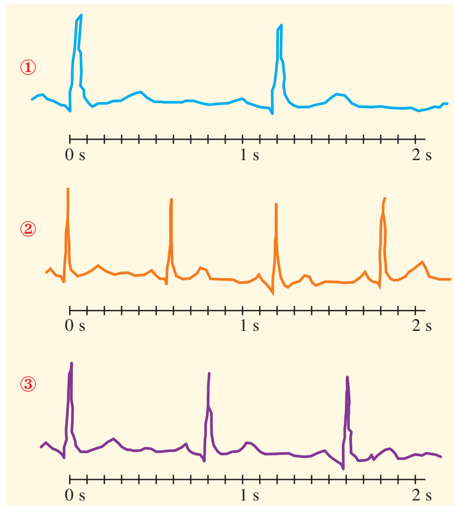
## Población de bacterias

**36** Se tiene en observación un cultivo de bacterias. Al efectuar un conteo de ellas cada hora, se ha determinado que la función $N(t) = 50t + 300$ estima el número de bacterias después de $t$ horas.

**a.** Encuentra la población de bacterias al principio, a las 4 horas y un día después del comienzo.
**b.** Grafica la función e indica si es creciente o decreciente.
**c.** ¿Por qué no tiene sentido evaluar el conjunto de ceros de $N(t)$?

## Ritmo cardíaco

**37** Estos registros parciales de electrocardiogramas corresponden, aunque no en ese orden, a una persona normal, a un paciente con taquicardia (“corazón rápido”) y a otro con bradicardia (“corazón lento”).




**a.** Calcula un valor estimado del período de la función representada en cada gráfico.
**b.** Indica a quién corresponde cada curva.

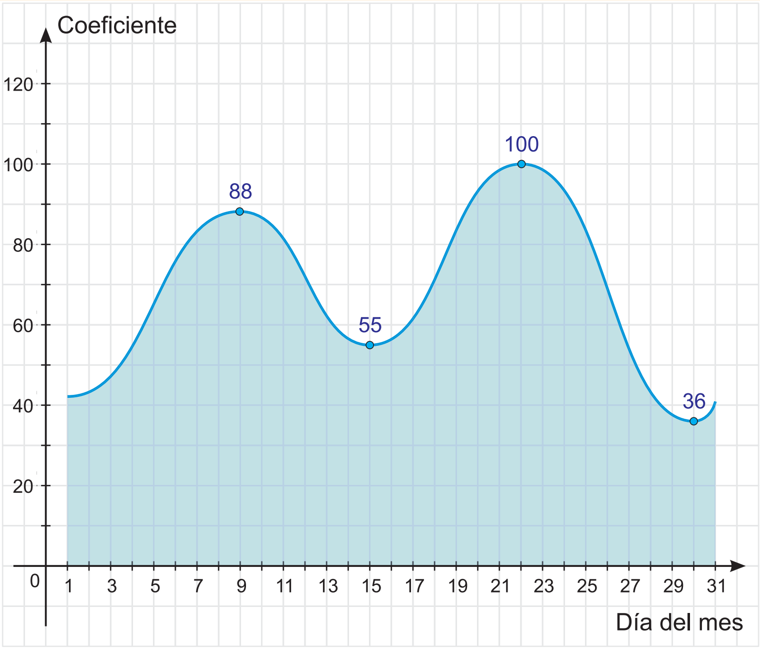
## Evolución de la temperatura

**38** La temperatura del agua medida en un experimento está dada por la función $T(t) = -0{,}1t^3 + 2t + 2{,}5$ donde $T$ es la temperatura en °C en el tiempo $t$, medido en minutos.

**a.** ¿Qué ocurrió con el agua a los 5 minutos?
**b.** Sabiendo que el experimento duró 8 minutos, arma una tabla de valores y haz un gráfico aproximado.
**c.** ¿Cuáles son los intervalos $C^+$ y $C^-$ de esta función?

## El poder del mar

Río Gallegos es una de las ciudades más australes de la Argentina, con un puerto utilizado para exportar productos y que es base de la industria pesquera local. Al respecto, es importante conocer el comportamiento del mar para garantizar la seguridad de los marinos y sacar el máximo provecho de la pesca.
Por eso, saber cómo evolucionan las mareas es sumamente útil en ese lugar.
Por ejemplo, el siguiente gráfico muestra la variación del coeficiente de mareas en el puerto de Río Gallegos durante agosto de 2017. A mayor valor del coeficiente, mayores pleamares y bajamares.




**1.** Indica el dominio y la imagen de esta función.

**2.** Indica los valores de los extremos relativos y absolutos. ¿En qué día del mes se alcanzan?

**3.** Menciona los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

**4.** Expresa el conjunto de ceros, de positividad y de negatividad.

**5.** Analiza la paridad y la periodicidad de esta función. Justifica tus respuestas.

# 3 Función cuadrática

## MATEMUNDO

En algunas ciudades hay plazas que cuentan con un conjunto de fuentes ornamentales, cibernéticas e interactivas, en las cuales el agua, la música, la luz, las imágenes y los efectos láser se combinan para ofrecer un maravilloso espectáculo.

Los chorros de agua de las fuentes describen trayectorias parabólicas, cuyo alcance está en función de la fuerza con la que son expulsados.

En Matemática, las funciones cuadráticas pueden representarse con curvas parabólicas.

En este modelo parabólico, el punto más alto de la trayectoria del chorro de agua representa el valor máximo de la función.

- Si lanzas una pelota hacia arriba, ¿qué tipo de trayectoria va a describir? ¿Y si la lanzas en ángulo hacia adelante?
- Reúnete en grupo y elabora con tus compañeros afiches con imágenes de modelos parabólicos que representen situaciones reales.

## Busco en la web

Digita en algún buscador (Firefox, Chrome, etc.) lo siguiente:

modelos + función cuadrática

Así obtendrás ejemplos de situaciones reales representadas a través de un modelo matemático.

## ESTO YA LO SABÍA...

1 Considera los siguientes valores de $x$: 3, 4, 5, 6. Indica cuáles son solución de cada ecuación.

a. $x^2 - 10x + 24 = 0$    b. $x^2 - 8x + 15 = 0$

2 Señala para cuál función la ordenada del punto (2; –3) corresponde a un máximo y para cuál, a un mínimo.

a. $y = x^2 - 4x + 1$    b. $y = -2x^2 + 8x - 11$

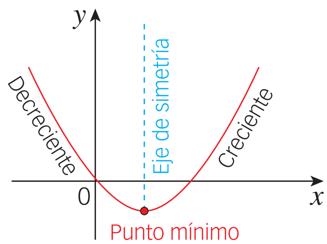
# Gráfico de una función cuadrática

Una **función cuadrática** tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde los coeficientes $a$, $b$ y $c$ son números reales y $a \neq 0$. Su representación gráfica es una curva llamada **parábola**, que es **simétrica** con respecto a una recta vertical llamada **eje de simetría**.

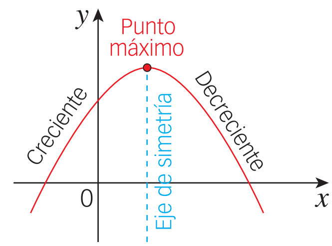
Las parábolas presentan un tramo creciente y otro decreciente. El paso de un tramo al otro se da en el **vértice**, que es el punto donde la función alcanza su valor mínimo o máximo. Además, las parábolas son continuas porque no presentan cortes en su trazo.

**Concavidad y convexidad**

Cuando una parábola tiene un mínimo, sus ramas se abren "hacia arriba" y se la llama **cóncava**.
En cambio, cuando tiene un máximo, sus ramas se abren "hacia abajo", y se la llama **convexa**.




El coeficiente principal $a > 0$



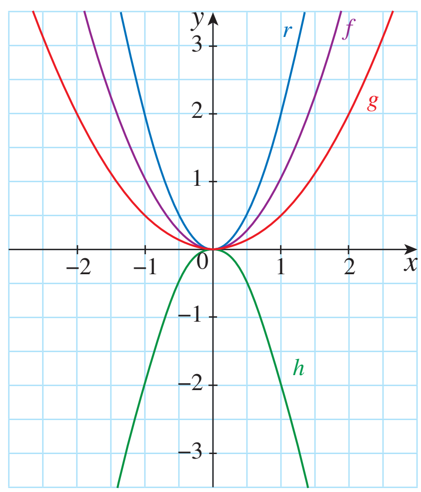

El coeficiente principal $a < 0$

**EJEMPLO:**

Grafica las funciones $f(x) = x^2$; $g(x) = \frac{1}{2}x^2$; $r(x) = 2x^2$ y $h(x) = -2x^2$ en el mismo plano cartesiano. Luego, compáralas.

- Elaboramos la tabla de valores. Para ello, reemplazamos algunos valores de $x$ en cada una de las funciones y calculamos los correspondientes resultados.

| $x$ | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |
| $g(x)$ | 4,5 | 2 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 2 | 4,5 |
| $r(x)$ | 18 | 8 | 2 | 0 | 2 | 8 | 18 |
| $h(x)$ | –18 | –8 | –2 | 0 | –2 | –8 | –18 |




- Ubicamos los puntos en el plano cartesiano y trazamos cada parábola. Luego, las comparamos con respecto a la función $f(x) = x^2$.
  – El gráfico de $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ es más ancho que el de $r(x) = 2x^2$. Esto se puede observar al comparar los gráficos de color rojo y azul.
  – El gráfico de $h(x) = -2x^2$ es igual de ancho que el de $r(x)$, pero convexo. Esto se puede observar al comparar los gráficos de color verde y azul.

**3** Considera las funciones $f(x) = x^2$; $g(x) = 3x^2$; $h(x) = -3x^2$ y $r(x) = \frac{1}{4}x^2$.

**a.** Completa la tabla según los valores de $x$.

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |
| $g(x)$ | | | | | | | |
| $h(x)$ | | | | | | | |
| $r(x)$ | | | | | | | |

**b.** Grafica las funciones en un mismo plano cartesiano.



**c.** ¿Qué relación observas entre los gráficos de las funciones $f$ y $g$? Ayúdate con la tabla y los gráficos anteriores.

**d.** ¿Cómo se relacionan los gráficos de $g$ y $h$?

**e.** Escribe una función $s$ cuyo gráfico sea más ancho que el de $r$. ¿En qué valor de la expresión debes fijarte?

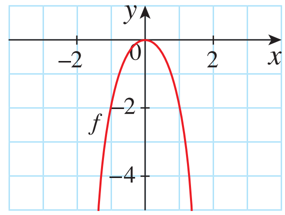
**f.** Escribe una función $t$ cuyo gráfico sea menos ancho que el de la función $g$. ¿Qué debes tener en cuenta?

**g.** Escribe una función $u$ cuyo gráfico sea convexo y sea simétrico al gráfico de $r$ con respecto al eje $x$. ¿Qué debes tener en cuenta?

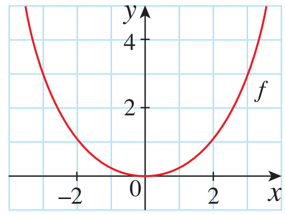
**h.** Escribe una función $v$ cuyo gráfico sea más ancho que el de $g$ y sea convexo. ¿Qué debes tener en cuenta?

**4** Analiza cada gráfico y relaciónalo con la función que le corresponde.

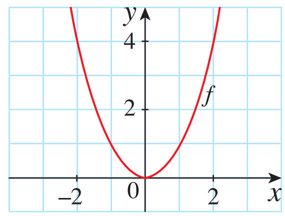
**a.**



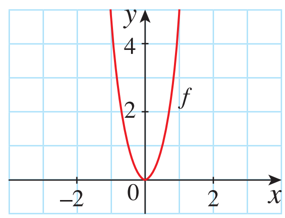

**b.**




**c.**




**d.**




○ $f(x) = 2x^2$

○ $f(x) = x^2$

○ $f(x) = -2x^2$

○ $f(x) = \frac{1}{3}x^2$

○ $f(x) = -x^2$

○ $f(x) = 4x^2$

**5** Considera las funciones $f(x) = x^2$; $g(x) = x^2 + 2$; $h(x) = x^2 - 2$ y $j(x) = 2x^2 + 4$.

**a.** Completa la tabla según los valores de $x$.

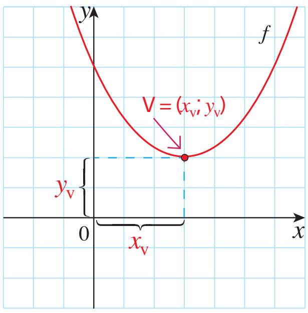
| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |
| $g(x)$ | | | | | | | |
| $h(x)$ | | | | | | | |
| $j(x)$ | | | | | | | |

**b.** Grafica las funciones en un mismo plano cartesiano.

**c.** ¿Qué relación observas entre los gráficos de las funciones $f$ y $g$? ¿Y entre los gráficos de $f$ y $h$? Ayúdate con la tabla y las representaciones.

**d.** ¿Qué observas entre las expresiones de las funciones $f$ y $j$ y sus respectivos gráficos?

# Vértice de la parábola




El vértice es uno de los elementos principales de la parábola, ya que permite identificar su mínimo (si es cóncava) o su máximo (si es convexa). Además, está directamente relacionado con el eje de simetría.

Las coordenadas del vértice V de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ se determinan mediante las expresiones $x_v = \frac{-b}{2a}$ e $y_v = f(x_v)$.

**EJEMPLO:**

Halla el valor mínimo o máximo de la función $f(x) = 2x^2 - 8x$ y su eje de simetría. Además, determina su imagen.

- En la función cuadrática $f(x) = 2x^2 - 8x$, el valor del coeficiente principal $a = +2$ es positivo; por lo tanto, la parábola será concava y la función $f$ tendrá un valor mínimo.
- El valor mínimo lo indica la ordenada del vértice.

Para $f(x)$ tenemos $a = 2$, $b = -8$ y $c = 0$. Entonces:

$$\text{V} = \left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) \rightarrow \left(\left(\frac{-(-8)}{2(2)}\right); f\left(\frac{-(-8)}{2(2)}\right)\right) = (2;\ 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2) = \underbrace{(2; -8)}_{\text{Valor mínimo } -8}$$

El valor mínimo es $-8$ y la $\text{Im}\, f(x) = [-8; +\infty)$.

- El eje de simetría lo determina la abscisa del vértice: $x = 2$.

**El eje de simetría**

Para expresar la ecuación del eje de simetría se utiliza la abscisa del vértice: $x = x_v$.

**6** Indica las coordenadas del vértice y el eje de simetría para cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^2 - 2x + 2$ b. $f(x) = -2x^2 + x - 1$

c. $f(x) = -x^2 + 7$ d. $f(x) = 3x^2 - x$

**7** Halla el valor mínimo o máximo de cada función y determina su imagen.

a. $f(x) = x^2 + 4x + 4$ b. $g(x) = -2x^2 + 3x - 2$

**8** La imagen de una función $f$ es $\left(-\infty; \frac{9}{8}\right]$ y su gráfico es una parábola que pasa por los puntos $(0; 0)$ y $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

a. Halla las coordenadas del vértice de la parábola e indica si tiene un mínimo o un máximo.

b. Realiza un gráfico aproximado de la función.

# Raíces de la función cuadrática

Recordemos que las **raíces** o **ceros** de una función son los valores de $x$ donde aquella se anula, es decir, $f(x) = 0$.
Y una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ puede resolverse con la fórmula general $x_{1;2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

**EJEMPLO:**

Halla las raíces de la función $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$.

- Planteamos la ecuación: $2x^2 + 3x - 5 = 0$.
- Identificamos los valores de $a$, $b$ y $c$ de la ecuación: $a = 2$, $b = 3$ y $c = -5$.
- Reemplazamos $a$, $b$ y $c$, en la fórmula general y hallamos las raíces:

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x_{1;2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(-5)}}{2 \cdot 2} \rightarrow x_{1;2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4}$$

Entonces, el conjunto de ceros o raíces de $f(x)$ es $C^0 = \{-2{,}5;\ 1\}$.

**Propiedades de las raíces**

Dada una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, la suma de sus raíces da $\frac{-b}{a}$ y el producto, $\frac{c}{a}$.

Por ejemplo, $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ tiene raíces $x_1 = -3$ y $x^2 = 1$.

Suma:
$x_1 + x_2 = -3 + 1 = \frac{-4}{2}$

Producto:
$x_1 \cdot x_2 = -3 \cdot 1 = \frac{-6}{2}$

No siempre se obtienen dos raíces reales en una ecuación cuadrática. En la fórmula general, el radicando $b^2 - 4ac$ se denomina **discriminante** $\Delta$ y permite conocer el número de raíces que tendrá la ecuación.

| $b^2 - 4ac > 0$ | $b^2 - 4ac = 0$ | $b^2 - 4ac < 0$ |
|---|---|---|
| La ecuación tiene 2 raíces reales diferentes. $x_{1;2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ | La ecuación tiene una sola raíz real (que es el $x_v$). $x = \dfrac{-b}{2a}$ | La ecuación no tiene raíces reales. |

**EJEMPLOS:**

Determina el número de raíces de las siguientes ecuaciones:

**a)** $x^2 - 10x + 24 = 0$

- Hallamos el discriminante reemplazando $a = 1$, $b = -10$ y $c = 24$.
  $\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(1)(24) = 4 \rightarrow \Delta > 0$

La ecuación $x^2 - 10x + 24 = 0$ tiene dos raíces reales diferentes.

**b)** $x^2 - 10x + 25 = 0$

- Hallamos el discriminante reemplazando $a = 1$, $b = -10$ y $c = 25$.
  $\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(1)(25) = 0 \rightarrow \Delta = 0$

La ecuación $x^2 - 10x + 25 = 0$ tiene una sola raíz real.

**c)** $x^2 + 2x + 2 = 0$

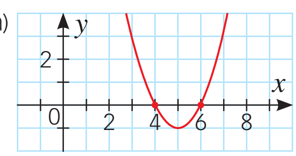
- Hallamos el discriminante reemplazando $a = 1$, $b = 2$ y $c = 2$.
  $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(2) = -4 \rightarrow \Delta < 0$

La ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$ no tiene raíces reales.

Comprobamos gráficamente

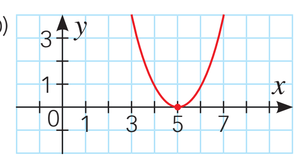
$x^2 - 10x + 24 = 0$

a)



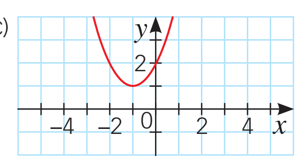

$x^2 - 10x + 25 = 0$

b)




$x^2 + 2x + 2 = 0$

c)



**9** Halla las raíces de las siguientes funciones.

a. $f(x) = x^2 - 2x - 24$  b. $f(x) = x^2 + 5x + 6$

c. $f(x) = 5x^2 + 32x + 27$  d. $f(x) = 6x^2 + 7x + 2$

e. $f(x) = x^2 - 36$  f. $f(x) = 6x^2 - 12x$

**10** Resuelve cada ecuación graficando la correspondiente función con ayuda de una herramienta informática, como GeoGebra.

a. $x^2 - x - 12 = 0$  b. $x^2 - x - 6 = 0$

c. $x^2 - 13x + 36 = 0$  d. $x^2 - 2x - 35 = 0$

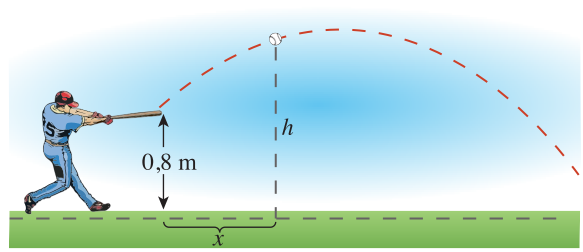
e. $x^2 + 3x - 10 = 0$  f. $x^2 - 3x - 40 =$

**11** Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba. Su altura $h$ (en metros) medida desde el suelo está dada por la función $h(t) = -4{,}9t^2 + 58{,}8t$, donde $t$ es el tiempo transcurrido en segundos.

a. Indicar los coeficientes $a$, $b$ y $c$ de la función cuadrática.

b. ¿En qué instantes la pelota estuvo en el suelo?

**12** Sergio batea una pelota en un partido de béisbol.




La longitud de la altura $h$ que alcanza la pelota está relacionada con la distancia horizontal $x$ que recorre. La función que modela esta situación es:

$$h(x) = -\frac{9{,}8}{512}x^2 + 0{,}75\,x + 0{,}8$$

¿A qué distancia horizontal $x$ la pelota toca el suelo?

**13** Completa la tabla.

| Ecuación | $\Delta$ | N.º de raíces |
|---|---|---|
| $5x^2 - 10x = 0$ | | |
| $18x^2 + 24x + 8 = 0$ | | |
| $3x^2 + 18x + 27 = 0$ | | |
| $7x^2 + 14x - 7 = 0$ | | |
| $6x^2 = 0$ | | |

**14** Halla el valor de $m$ en los siguientes casos:

a. Para que la suma de las raíces de la ecuación $(m - 3)x^2 + 3x + 1 = 0$ sea $-\frac{3}{2}$.

b. Para que el producto de las raíces de la ecuación $(m + 2)x^2 - 9x + (m + 1) = 0$ sea $\frac{4}{5}$.

c. Para que haya una sola raíz real en la ecuación $(m + 1)x^2 - 2mx + (m - 3) = 0$

# Análisis de la función cuadrática

Al analizar una función cuadrática se buscan las coordenadas del vértice, el eje de simetría, los puntos de corte con los ejes, el dominio, la imagen, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, el valor máximo o mínimo.

**EJEMPLO:**

Analiza la función $g(x) = x^2 + 2x - 3$.

- El dominio de $g(x)$ es Dom $g = \mathbb{R}$.
- Identificamos $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$ y hallamos las coordenadas del vértice:

$$V = \left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = (-1; -4)$$

- El eje de simetría es la recta vertical $x = -1$.
- Como $a > 0$, la parábola es cóncava.
- Por lo tanto, $g(x)$ tiene un mínimo en $x = -1$ y su valor es $-4$.
- Entonces, la imagen de $g(x)$ es Im $g = (-4; +\infty)$.
- Además, $g(x)$ decrece para $x \in (-\infty; -1)$ y crece para $x \in (-1; +\infty)$.
- Hallamos las intersecciones con los ejes:

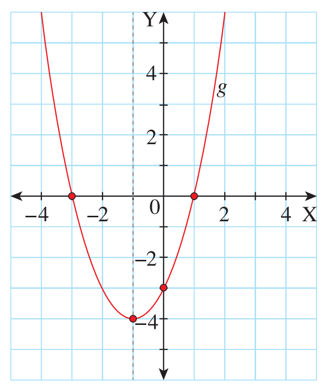
Con el eje $y$: $g(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 3 = -3$ ◀ Punto de corte: (0; –3)

Con el eje $x$: $0 = x^2 + 2x - 3$

$x_1 = 1$ ◀ Punto de corte: (1; 0)

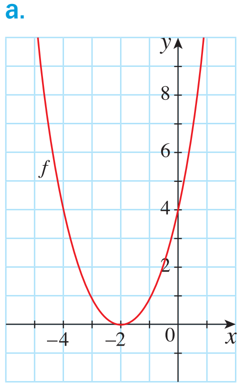
$x_2 = -3$ ◀ Punto de corte: (–3; 0)

- El conjunto de ceros de la función es $C^0 = \{-3; 1\}$.
- Además, la parábola cóncava ubica al intervalo $C^-$ entre las raíces de $g(x)$.
- Entonces, el intervalo de negatividad es $C^- = (-3; 1)$.
- Y el intervalo de positividad es $C^+ = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

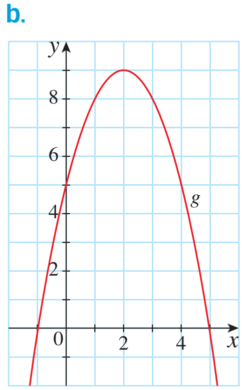



**15** Para cada función halla Dom, Im, vértice, eje de simetría, máximo o mínimo, crecimiento, decrecimiento, cortes con los ejes, $C^0$, $C^+$ y $C^-$.

**a.**




**b.**

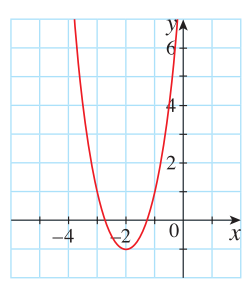


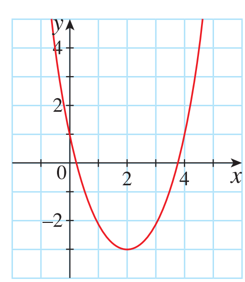

**16** Analiza las funciones $f$ y $g$.

**a.** $f(x) = x^2 + x - 6$ **b.** $g(x) = x^2 + 12x - 28$

**17** Relaciona cada expresión con su gráfico.

$f(x) = x^2 - 4x + 1$ $g(x) = 2x^2 + 8x + 7$





## Problemas de aplicación

Las **funciones cuadráticas** se aplican en la ciencia, los negocios, la ingeniería, el deporte, y otras actividades. Mediante este tipo de funciones se puede, por ejemplo, describir una trayectoria parabólica, predecir las ganancias y las pérdidas de un negocio, ayudar en la determinación de valores máximos y mínimos, etcétera.

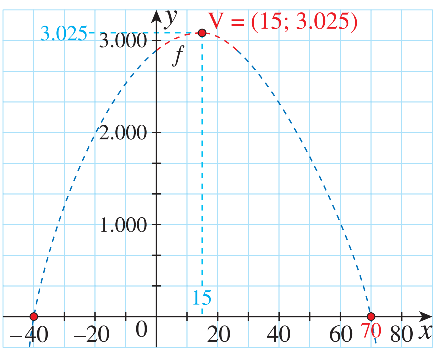
**EJEMPLO:**

Una empresa de turismo presupuesta el costo de una excursión para un grupo de estudiantes. Ellos cobran \$ 70 por persona si son 40 estudiantes y rebajan \$1 por persona por cada estudiante adicional. Además, el grupo no puede estar conformado por más de 65 estudiantes ni por menos de 40. ¿Cuántos estudiantes deben participar en la excursión para que la empresa realice el mejor negocio?

- A partir de la siguiente tabla, obtendremos una expresión que nos permita hallar el total que cobra la empresa en función de la cantidad $x$ de estudiantes que exceden el mínimo de 40.

| Cantidad de estudiantes | Costo por persona (\$) | Total a cobrar (\$) |
|---|---|---|
| 40 | 70 | $40 \cdot 70$ |
| 40 + 1 | 70 – 1 | (40 + 1)(70 – 1) |
| 40 + 2 | 70 – 2 | (40 + 2)(70 – 2) |
| 40 + 3 | 70 – 3 | (40 + 3)(70 – 3) |
| $40 + x$ | $70 - x$ | $(40 + x)(70 - x)$ |

- Al multiplicar $(40 + x)(70 - x)$ obtenemos la función cuadrática $\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 30x + 2.800}$.




- Como queremos averiguar el mayor ingreso para la empresa de turismo, buscamos el **máximo** de la función.
- Como $x$ representa un número entero desde 0 a 25, el gráfico de $f$ está formado solo por algunos puntos de la parábola, ubicados en la zona de la línea punteada roja.
- La parábola completa es el gráfico de una función que tiene la misma fórmula que $f$, pero cuyo dominio es $\mathbb{R}$. Sus raíces son –40 y 70.
  – La abscisa del vértice es $x_v = \dfrac{-30}{2 \cdot (-1)} = 15$.
  – La ordenada del vértice es $y_v = -(15)^2 + 30 \cdot 15 + 2.800 = 3.025$.
- Entonces, el punto máximo de la función es (15; 3.025), que es el vértice de la parábola.

Como la cantidad de estudiantes según la tabla es $\boldsymbol{40 + x}$ y la máxima ganancia se halla en el vértice cuya abscisa $\boldsymbol{x}$ es **15**, para que la empresa de turismo realice el mejor negocio, en la excursión deben participar 40 + 15 = 55 estudiantes.

**18** Un basquetbolista lanzó una pelota, la cual alcanzó una altura (en metros) descripta por la función $h(t) = 1,7 + 4t - 5t^2$, cuyo tiempo se mide en segundos. ¿Cuál fue la altura máxima alcanzada por la pelota? ¿Al cabo de cuánto tiempo la pelota alcanzó su altura máxima?

**19** En una fábrica de autopartes se representa la producción en función del precio de venta (en dólares) de un producto por la función $p(x) = -5x^2 + 20x$. Si $p(x)$ es la cantidad de producto y $x$ es el precio de venta, ¿cuál debe ser el valor de $x$ para que la producción sea la máxima posible? ¿Cuál será el valor de ese máximo?

**20** Un organizador de eventos ha fijado el precio $x$ de la entrada general para un concierto, teniendo en cuenta que el dinero recaudado $i$ dependerá de la cantidad de entradas que se vendan, a través de la siguiente función: $i(x) = -4x^2 + 4.000x$

**a.** ¿Cuál debe ser el precio de la entrada general de modo que permita obtener el máximo ingreso?

**b.** ¿Cuál es el ingreso máximo que se podrá recaudar?

**21** Un proyectil se dispara desde un acantilado ubicado a 200 metros por arriba del nivel del agua. La altura $h$ del proyectil sobre el nivel del agua está dada por la función $h(x) = \frac{-32x^2}{(50)^2} + x + 200$, donde $x$ es la distancia horizontal del proyectil a la base del acantilado. Calcula aproximando a los décimos:

**a.** La altura máxima alcanzada por el proyectil.

**b.** La distancia horizontal desde la base del acantilado hasta el punto de altura máxima del proyectil.

**22** Una compañía de venta de *hardware* ha encontrado que sus ingresos por la venta de *laptops* están determinados por la función $r(p)$, donde $p$ es el precio de cada *laptop*. Además, se sabe que el ingreso $r$ es $r(p) = \frac{-1}{2}p^2 + 1.900p$.

**a.** ¿Cuál es el precio unitario $p$ que debe fijarse por cada *laptop* para maximizar el ingreso?

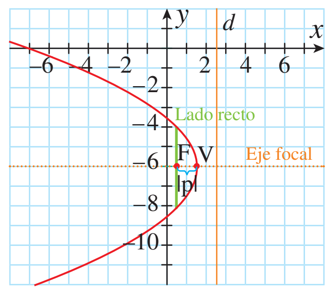
**b.** ¿Cuál es el máximo ingreso de la compañía?

# La parábola como lugar geométrico

En este apartado estudiaremos la parábola como un conjunto de puntos cuyas distancias a ciertos elementos fijos cumplen determinadas relaciones.

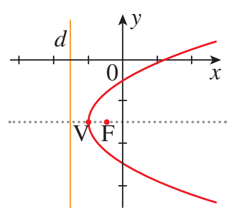
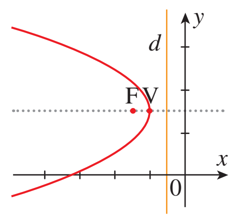
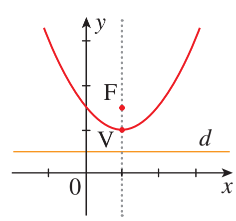
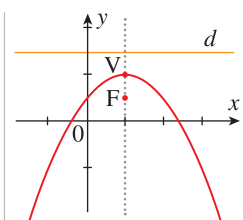
Dada una recta (llamada **directriz** $d$) y un punto exterior a ella (llamado **foco** F), la parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de esa directriz y ese foco. Es decir, es el conjunto de los puntos cuya distancia a $d$ y a F es la misma.

## Características de las parábolas




- El eje de simetría es perpendicular a la directriz y contiene el vértice y el foco, por eso se lo llama **eje focal**.
- Ese eje puede ser paralelo al eje $x$, al eje $y$ o estar inclinado.
- La distancia a la directriz se mide perpendicular a ella.
- El vértice es el punto de la parábola que está a la mínima distancia de la directriz y el foco. Se la llama **distancia focal** y se la simboliza con |p|.
- El segmento paralelo a la directriz, que pasa por el foco y está limitado por la parábola se llama **lado recto**. Su longitud es igual a 4|p|.

## Ecuación canónica de la parábola

| Cuando el eje focal es paralelo al eje $x$ | | Cuando el eje focal es paralelo al eje $y$ | |
|---|---|---|---|
| $(y - y_v)^2 = 4p(x - x_v)$ | | $(x - x_v)^2 = 4p(y - y_v)$ | |
|  |  |  |  |
| $p > 0$ | $p < 0$ | $p > 0$ | $p < 0$ |
| $V = (x_v, y_v)$; $F = (x_v + p, y_v)$; $d \rightarrow x = x_v - p$ | | $V = (x_v, y_v)$; $F = (x_v, y_v + p)$; $d \rightarrow y = y_v - p$ | |

**EJEMPLO:**

La distancia del vértice V = (–1; –4) de una parábola al foco mide 5 unidades. Halla la ecuación de esa parábola sabiendo que es cóncava hacia arriba.

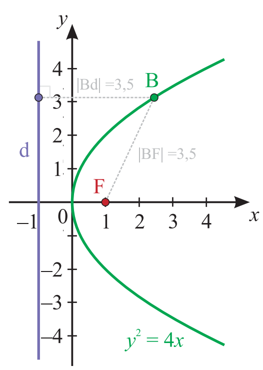
- Por dato: V = (–1; –4) y |p| = 5. Por ser cóncava hacia arriba, la directriz es paralela al eje $x$ y $p > 0$. Entonces, p = 5.
- Reemplazamos los datos: $(x + 1)^2 = 4 \cdot 5 \cdot (y + 4)$.

La ecuación de la parábola es $(x + 1)^2 = 20\,(y + 4)$.

En forma desarrollada: $x^2 + 2x + 1 = 20y + 80 \rightarrow x^2 + 2x - 20y - 79 = 0$

### Uso de software matemático

Grafica en GeoGebra la parábola $y^2 = 4x$. Marca su foco F = (1; 0) y su directriz $d$, cuya ecuación es $x = -1$. Elige un punto B cualquiera de la parábola y mide su distancia a F y su distancia (perpendicular) a $d$. Mueve el punto sobre la parábola y verifica que ambas distancias siempre son iguales.




### Ecuación general de la parábola

Se obtiene al desarrollar la ecuación canónica, y depende de la orientación del eje focal.

Eje focal paralelo al eje $x$:
$y^2 + Ay + Bx + C = 0$

Eje focal paralelo al eje $y$:
$x^2 + Ax + By + C = 0$

**EJEMPLO:**

Halla la ecuación general de una parábola si su vértice es V = (–3; 5), la longitud de su lado recto es 32 y es cóncava hacia la izquierda.

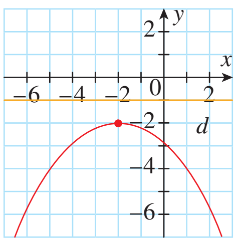
- Como su lado recto mide 32: $|4p| = 32 \rightarrow |p| = 8$
- Como es cóncava hacia la izquierda, el eje focal es paralelo al eje $x$ y $p < 0$.
- Hallamos la ecuación general a partir de la ecuación canónica:

  $(y - 5)^2 = 4(-8)(x + 3) \rightarrow (y - 5)^2 = -32(x + 3)$

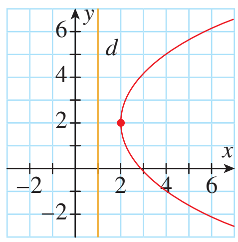
  $y^2 - 10y + 25 = -32x - 96 \rightarrow y^2 - 10y + 32x + 121 = 0$

**23** Determina la ecuación de cada parábola.

**a.**



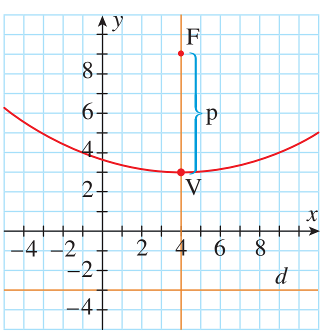

**b.**




**24** Si la recta directriz de una parábola es $y = -5$, determina su ecuación. ¿Es única?

**25** Halla la ecuación canónica de una parábola que tiene como foco F = (–2; 0). ¿Es única?

**26** Si en la parábola del esquema intercambiaras de lugar el foco con la directriz, ¿cómo cambiarían el gráfico y la ecuación canónica?




**27** Si el vértice de la parábola es V = (7; 1) y el foco F = (7; –4), halla la ecuación general de la parábola.

**28** Determina la ecuación general de la parábola de vértice V = (2; 3) que pasa por el punto (0; 5) y cuyo eje focal es paralelo al eje $y$.

**29** Determina el vértice, el foco y la directriz de la parábola $y^2 + 2y + 8x + 1 = 0$. Te conviene graficarla previamente en GeoGebra.

**30** ¿Cuáles de las siguientes funciones son cuadráticas? Marca y justifica tus respuestas.

**a.** $f(x) = 4x^2 + 5x$ ☐ **b.** $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 1}$ ☐

**c.** $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{4}$ ☐ **d.** $g(x) = 3x^2 + x^3$ ☐

**31** Se tienen 20 m de malla metálica para construir un corral rectangular aprovechando toda la malla.

**a.** Si el ancho es $x$, expresa el largo del corral.

**b.** Halla una fórmula para calcular su área $A(x)$.

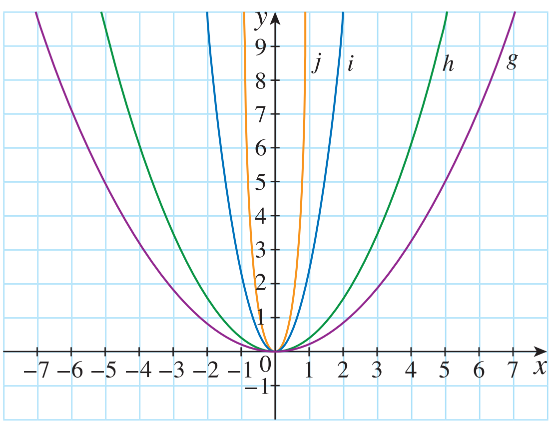
**c.** En tu carpeta, completa una tabla como esta:

| Ancho: $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Largo | | | | | | | | | | | |
| A $(x)$ | | | | | | | | | | | |

**d.** En una hoja cuadriculada, representa el área en función de $x$ según los valores de la tabla. ¿Cuánto vale el área máxima?

**32** ¿Qué función corresponde a cada gráfico?

**i.** $0{,}2x^2$ **ii.** $12x^2$ **iii.** $0{,}4x^2$ **iv.** $2{,}5x^2$




**33** Representa con GeoGebra la función $f(x) = x^2$. Compárala con cada una de las siguientes funciones:

**i.** $g(x) = (x - 2)^2$ **ii.** $h(x) = x^2 - 2$

**iii.** $i(x) = (x + 3)^2$ **iv.** $j(x) = x^2 + 3$

**a.** ¿A qué conclusiones puedes llegar?

**b.** ¿En qué casos se trata de una traslación horizontal? ¿Y vertical?

**34** Dada la función $f(x) = 4x^2$, realiza lo siguiente:

**a.** Halla una función cuadrática $g$ cuyo gráfico sea más ancho que el de la función $f$.

**b.** Halla la función cuadrática $h$ cuyo gráfico sea simétrico al de la función $f$ con respecto al eje $x$.

**35** **a.** Dado el gráfico de la función $f(x) = x^2 + 2x$, explica la traslación resultante en los gráficos de las funciones $g$ y $h$.

**i.** $g(x) = f(x - 2)$ **ii.** $h(x) = f(x + 1)$

**b.** ¿Qué relación encuentras entre los vértices de los gráficos de $f(x)$; $g(x)$ y $h(x)$?

**36** Escribe las coordenadas del vértice de las parábolas que representan a las siguientes funciones:

**i.** $p(x) = (x + 8)^2$ **ii.** $r(x) = x^2 + 5$

**iii.** $s(x) = (x - 1)^2$ **iv.** $t(x) = x^2 - 6$

**37** Halla los vértices y los puntos de corte con los ejes de las siguientes parábolas:

**i.** $f(x) = x^2 - 2x + 2$ **ii.** $g(x) = -2x^2 + x - 1$

**iii.** $f(x) = 4x^2 + 4x - 1$ **iv.** $g(x) = -3x^2 + 2x + 1$

**38** Analiza las siguientes funciones cuadráticas e indica si tienen un valor máximo o mínimo.

**i.** $f(x) = x^2 + 4x - 1$ **ii.** $f(x) = -3x^2 + 2x$

**39** Para cada función halla Dom, Im, vértice, eje de simetría, máximo o mínimo, crecimiento, decrecimiento, cortes con los ejes, $C^0$, $C^+$ y $C^-$.

**i.** $f(x) = x^2 - 4x + 3$ **ii.** $f(x) = -5x^2 + 10x + 2$

**40** La altura $A$ (en metros) alcanzada por un objeto está relacionada con el tiempo $t$ (en segundos) transcurrido desde su lanzamiento, por la función $A(t) = 80t - 5t^2$, $t \geq 0$. ¿Cuál es la altura máxima, en metros, que alcanza el objeto? ¿En cuántos segundos alcanza dicha altura?

**41** Considera una parábola de eje focal horizontal, cóncava hacia la derecha, de vértice $V = (9; 0)$ y lado recto igual a 1.

**a.** Halla sus ecuaciones canónica y general.

**b.** ¿Representa el gráfico de una función? Justifica.

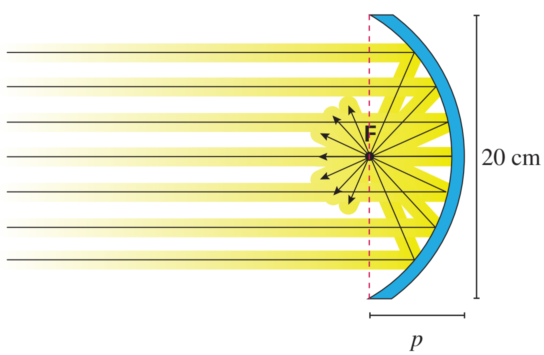
**c.** ¿Qué relación existe entre esta parábola y el gráfico de la función $f(x) = \sqrt{x - 9}$?

## Control de plagas

**42** Los árboles del pueblo fueron atacados por un hongo. Al cabo de un tiempo, los técnicos de control de plagas encontraron que la cantidad de árboles infectados podía describirse, en forma aproximada, a través de la función $N(t) = -2t^2 + 20t + 2.000$, donde $N$ es la cantidad de árboles afectados y $t$ es la cantidad de días transcurridos desde el inicio de la plaga. ¿Es cierto que la plaga se extinguirá pasado algún tiempo?

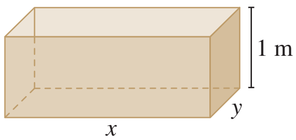
## Telescopio reflector

**43** Un telescopio tiene un espejo parabólico, cuya boca –de 20 cm de diámetro– está en el mismo plano que contiene al foco. Averigua qué profundidad ($p$) tiene el espejo.




## Campaña de reciclaje

**44** Los estudiantes de un colegio han organizado una campaña de reciclaje. Para ello, han gestionado la donación de planchas de cartón a fin de elaborar cajas para almacenar residuos. Cada caja debe tener forma de paralelepípedo rectangular de 1 m de altura y su base debe tener un perímetro de 2,4 m. Si se desea almacenar la mayor cantidad de residuos, ¿cuánto deben medir las dimensiones de la base del contenedor?




## Proceso viral

**45** La temperatura corporal $T$ de una persona durante cierta enfermedad viral está dada por la función $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 37$, donde $T$ es la temperatura en °C en el tiempo $t$, medido en días. Dibuja un gráfico que muestre la evolución de la temperatura de la persona durante los 12 días que duró el proceso hasta que se curó. ¿Qué día la persona alcanzó su máxima temperatura?

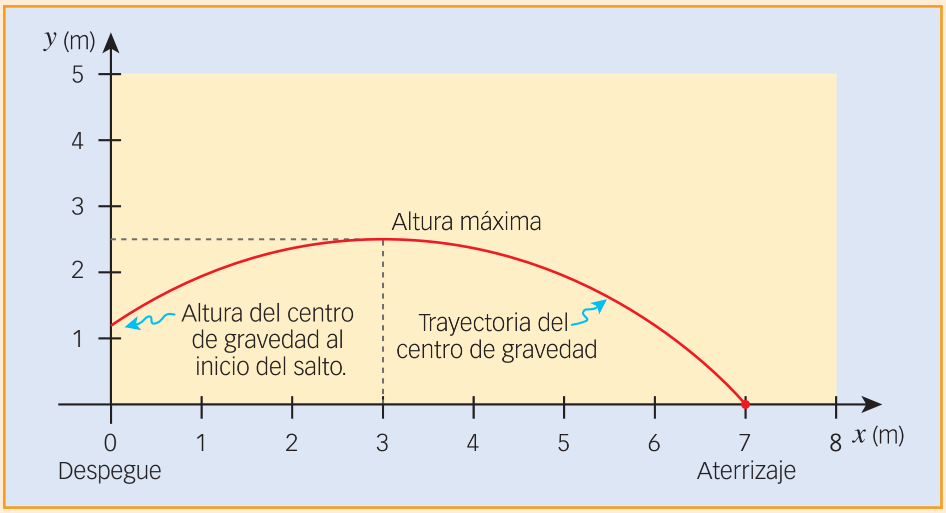
# AUTOEVALUACIÓN

## El salto perfecto

Se observó con atención la secuencia de movimientos de un atleta en una prueba de salto en largo. Al analizarse varias fotos sucesivas, se notó que el salto describía una parábola.

A continuación, se tomó como punto de referencia el centro de gravedad del cuerpo del atleta y se lo señaló a 35/32 metros del piso (en el abdomen). Luego, se representó en un plano cartesiano las alturas alcanzadas por el centro de gravedad y las correspondientes distancias horizontales recorridas durante el salto.

En el gráfico, que es aproximado, se despreció la distancia del centro de gravedad al piso en el momento de finalizar el salto.


1. ¿Qué distancia horizontal recorre el centro de gravedad del atleta cuando este finaliza el salto?

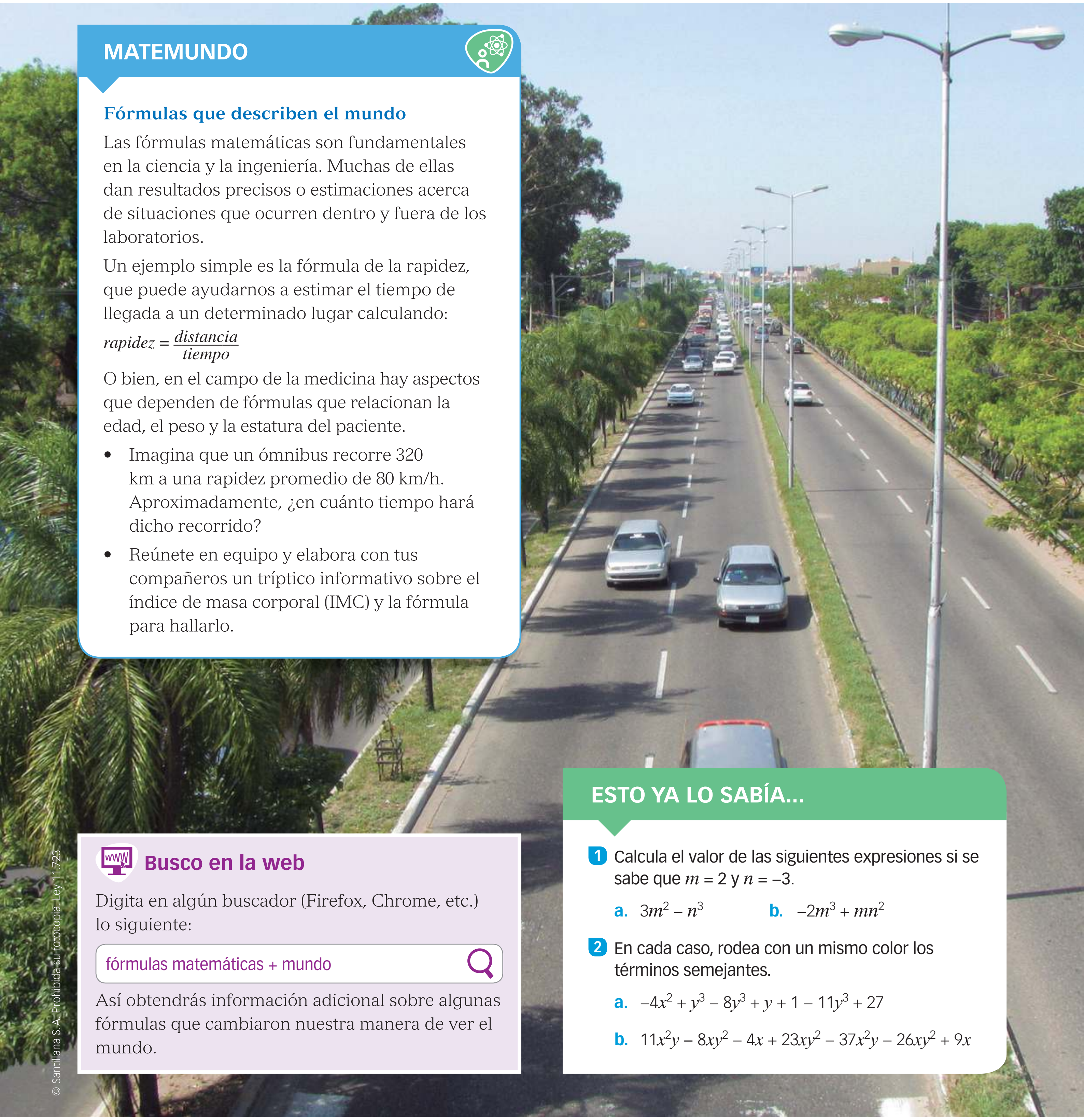
2. ¿Qué distancia horizontal habrá recorrido el centro de gravedad del atleta en el momento de alcanzar su altura máxima?

3. ¿En qué intervalo de distancias horizontales se aprecia un descenso de la altura?

4. Nombra las coordenadas de los puntos que representan el inicio del salto, la altura máxima y el fin del salto.

5. Halla la función que representa el salto, si la ecuación canónica de la parábola tiene la forma $(y - k) = 4p(x - h)^2$, donde $(h, k)$ representa las coordenadas del vértice.

# 4 Polinomios I. Expresiones algebraicas



## MATEMUNDO

### Fórmulas que describen el mundo

Las fórmulas matemáticas son fundamentales en la ciencia y la ingeniería. Muchas de ellas dan resultados precisos o estimaciones acerca de situaciones que ocurren dentro y fuera de los laboratorios.

Un ejemplo simple es la fórmula de la rapidez, que puede ayudarnos a estimar el tiempo de llegada a un determinado lugar calculando:

$$rapidez = \frac{distancia}{tiempo}$$

O bien, en el campo de la medicina hay aspectos que dependen de fórmulas que relacionan la edad, el peso y la estatura del paciente.

- Imagina que un ómnibus recorre 320 km a una rapidez promedio de 80 km/h. Aproximadamente, ¿en cuánto tiempo hará dicho recorrido?
- Reúnete en equipo y elabora con tus compañeros un tríptico informativo sobre el índice de masa corporal (IMC) y la fórmula para hallarlo.

## ESTO YA LO SABÍA...

**1** Calcula el valor de las siguientes expresiones si se sabe que $m = 2$ y $n = -3$.

**a.** $3m^2 - n^3$ **b.** $-2m^3 + mn^2$

**2** En cada caso, rodea con un mismo color los términos semejantes.

**a.** $-4x^2 + y^3 - 8y^3 + y + 1 - 11y^3 + 27$

**b.** $11x^2y - 8xy^2 - 4x + 23xy^2 - 37x^2y - 26xy^2 + 9x$

### Busco en la web

Digita en algún buscador (Firefox, Chrome, etc.) lo siguiente:

fórmulas matemáticas + mundo

Así obtendrás información adicional sobre algunas fórmulas que cambiaron nuestra manera de ver el mundo.

# Expresiones algebraicas

Llamamos operaciones básicas a sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potenciaciones y radicaciones.

**Valor numérico**

Cuando se le asignan números a las letras de una expresión algebraica se obtiene su valor numérico.

El término $\frac{5}{7y^{-2}}$ es equivalente a $\frac{5}{7}y^2$.

Una **expresión algebraica** es una combinación de números y letras relacionados mediante operaciones básicas.

En cada **término** de la expresión, la parte numérica se llama **coeficiente**, mientras que las letras (y sus exponentes) representan la **parte literal**.

**EJEMPLO:**

Completa la tabla.

| Expresión algebraica | Cantidad de términos | Último término | Coeficiente | Parte literal |
|---|---|---|---|---|
| $8 + 5x - 3x^2$ | 3 | $-3x^2$ | $-3$ | $x^2$ |
| $3a^3 - \sqrt{7b} + 2a - \frac{1}{2}$ | 4 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | |
| $\frac{a+1}{b+3} + 5a + b$ | 3 | $b$ | 1 | $b$ |
| $4y + \frac{5}{7y^{-2}}$ | 2 | $\frac{5}{7y^{-2}}$ | $\frac{5}{7}$ | $y^2$ |

**3** Observa el ejemplo y escribe una expresión algebraica que represente cada enunciado.

Ejemplo: *"Área de un rectángulo cuya base es el triple de la altura"* $\rightarrow 3x^2$.

**a.** Volumen de un prisma de base cuadrada cuya altura es el doble que una arista de la base.

**b.** Área total de un cubo de x cm de arista.

**c.** Sueldo de \$12.000 mensuales más \$100 por cada hora extra.

**d.** Producto de tres números pares consecutivos.

**4** Halla el valor de cada expresión si

$a = 6$, $b = -1$, $n = -2$, $x = 2$ e $y = 4$.

**a.** $\frac{2}{3}a^4 - 6ab - \sqrt{6a}$ __________

**b.** $6x^3 + 6xy^2 + \frac{x+4}{y-2}$ __________

**c.** $8b + 3b^4 + 3b^{-3}$ __________

**d.** $\frac{2}{5x^{-5}} + x^2 - 7x$ __________

**e.** $\frac{3}{4}n^2 + 4n + 8$ __________

**f.** $x^7 + x^3 - x^{-2} + \frac{1}{x^{-1}}$ __________

**5** En cada caso rodea los coeficientes con un color y la parte literal con otro. Luego opera con los términos semejantes para reducir la expresión.

**a.** $-8\sqrt{xy} + 6\sqrt{xy} + 3\sqrt{xy}$

**b.** $6{,}2x^{\frac{1}{2}}y - x^2y + 5x^{\frac{1}{2}}y - 2{,}1x^2y$

**c.** $7{,}3x^3y^2 - (8{,}2x^2y^3 + 0{,}2x^3y^2) + 7{,}8x^2y^3$

# Polinomios. Valor numérico

Un **polinomio** P($x$, $y$, ...) es una expresión algebraica en la que los exponentes de las variables **indeterminadas** ($x$, $y$, ...) son números enteros no negativos.

Un polinomio de una variable podría ser: $P(x) = 3x^4 + 5x - 1$.

Y de dos variables: $Q(x, y) = 2x^3y + 5xy^2$.

El **valor numérico** de un polinomio es el número que se obtiene al sustituir las variables por números y resolver las operaciones descriptas . A esa acción se la llama **especializar** el polinomio.

Los polinomios reciben nombres que indican cuántos términos poseen:

- monomio (un término),
- binomio (dos términos),
- trinomio (tres términos).

Si tienen más de tres términos, se los llama polinomios de cuatro, cinco, seis... términos según el caso.

**EJEMPLO:**

Halla el valor numérico de $P(x) = 3x^4 + 5x - 1$ y de $R(x, y) = 2x^3y + 5xy^2$ cuando $x = 2$ e $y = -3$.

- Reemplazamos el valor de $x$ en $P(x)$: $P(2) = 3 \cdot 2^4 + 5 \cdot 2 - 1 = 57$
- Ahora, los valores de $x$ e $y$ en $R(x, y)$: $R(2, -3) = 2 \cdot 2^3 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 \cdot (-3)^2 = 42$

**EJEMPLO:**

El polimonio $p(a) = \frac{a^2}{400}$ relaciona el peso límite $p$ (en kilogramos) con la estatura $a$ (en centímetros) que puede alcanzar una persona saludable. ¿Cuál es el peso límite que debe tener una persona de 1,80 m de estatura?

- Expresamos la estatura en centímetros: 1,80 m = 180 cm
- Calculamos el peso límite para la estatura $a = 180 \Rightarrow p(180) = \frac{180^2}{400} = 81$

Una persona de 1,80 m de estatura debe tener un peso límite de 81 kg.

**EJEMPLO:**

Ana ha elegido un plan de telefonía móvil que consiste en un pago fijo de \$300 al mes, el cual incluye 100 minutos de llamadas y 200 mensajes de texto. Además, cada minuto y mensaje de texto adicional tendrán una recarga de \$0,17 y \$0,04, respectivamente. ¿Qué polimonio permitirá calcular el consumo de un mes? ¿Cuánto pagará Ana por un consumo de 226 minutos y 317 mensajes de texto?

- Determinamos el polinomio P($x$, $y$) que representa el consumo de un mes:

  $P(x, y) = 0{,}17(x - 100) + 0{,}04(y - 200) + 300$

- Calculamos cuánto pagará Ana:

  $0{,}17(226 - 100) + 0{,}04(317 - 200) + 300 = 21{,}42 + 4{,}68 + 300 = 326{,}10$

Ana pagará \$326,10.

**6** Señala las expresiones que son polinomios. Justifica tu respuesta.

**a.** $8x^4 + \frac{3}{5}x^2 - 18x$ **b.** $\sqrt{2x} - x^2 + 3x^3$

**c.** $5y^2 - 2xy - 1 + 3x - 9$ **d.** $4,2y^5 + 4y^{-2}$

**7** Calcula el valor numérico de $P(x) = 8x^5 + 4x^3 - 2x + 1$ en los siguientes casos:

**a.** $x = 0$ **b.** $x = 2$ **c.** $x = -1$

**8** Sea $R(x) = bx^5 + bx^4 + 13x^3 - 11x^2 - 10x - 2b$, donde el coeficiente b está indeterminado.

Calcula $b$ si $R(-1) = 0$.

**9** Si $R(x) = 3x^5 + 1$ y $T(x) = 6x^2 - 8$, calcula el valor de $R(-2) + T(-2)$.

**10** Si $P(x) = 2x^3 + 5$ y $P(2n) = -11$, calcula el valor de $n$.

**11** Si $P(x) = 4x - b$; $Q(x) = x + 3$ y $P[Q(2)] = 32$, calcula el valor de $b$.

**12** Un laboratorio investiga el efecto de un remedio y concluye que su duración D (en horas) depende de los $x$ mg de principio activo presente, según la fórmula $D(x) = 10x^3 - 5x^4$.

**a.** Realiza una tabla de valores, donde $x$ varíe desde 0 a 2 mg, con incrementos de medio mg.

**b.** Explica la efectividad que tiene el remedio en cada uno de los extremos del intervalo [0; 2].

**c.** ¿Es cierto que la duración del remedio podría llegar a superar las 8 horas? Justifica tu respuesta.

**13** El cuadrado del área de un triángulo de lados $a$, $b$, $c$ se puede calcular con la fórmula $A^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$, donde $p = (a + b + c) : 2$ es el semiperímetro. Calcula el cuadrado del área de los triángulos cuyos lados se indican.

**a.** $a = 10$ cm, $b = 8$ cm, $c = 6$ cm

**b.** $a = 15$ cm, $b = 10$ cm, $c = 15$ cm

## **Mathway**, para obtener el valor numérico

**Paso 1** Accede a **https://www.mathway.com/es/Algebra**, haz clic en **Álgebra** y sigue el **Paso 2** para determinar el valor numérico de los polinomios $P(x) = 20x^3 - x^2 + 5x - 30$ y $Q(y) = \frac{3}{4}y^2 + \sqrt[3]{8}y - 1$, con $x = 2$ e $y = 4$.

**Paso 2** **Caso 1**

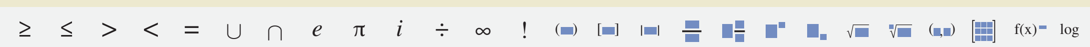
Ingresa el polinomio $P(x)$. Para ello, digita los coeficientes, variables, exponentes y signos de manera consecutiva (sin espacios) y separados por una coma del valor de la variable. Es decir, así:

$$\boxed{20x^3 - x^2 + 5x - 30,\ \ x = 2}$$

Una vez ingresados los datos, haz clic en el botón para obtener el valor numérico del polinomio $P(x)$, que es 136. Si se llegara a desplegar un menú, elige la opción: *Evalúe usando el valor dado*.

**Caso 2**

Ingresa el polinomio $Q(y)$. Por ser una expresión más compleja, puedes utilizar algunos de los botones que aparecen en la pantalla.




Para ingresar los coeficientes fraccionario y radical, usa y . Para indicar los exponentes, usa . Del mismo modo que en el caso anterior, digita los datos de modo que en la pantalla aparezca lo siguiente:

$$\boxed{\frac{3}{4}y^2 + \sqrt[3]{8}y - 1,\ \ y = 4}$$

Finalmente, haz clic en para obtener el valor numérico, que en este caso es 19.

### EXPLORA E INTERACTÚA

Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios:

a. Si $P(x) = 5x^2 + 3x^3 - 30x + 10$, calcula $P(-2)$. Utiliza los procedimientos de los casos 1 y 2.

b. Si $Q(y) = \frac{2}{5}y^3 - \frac{4}{5}y^2 - \frac{7}{5}y$, calcula $Q(5)$.

c. Si $Q(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2\sqrt[3]{5}x^2 + 20$, calcula $Q(3)$.

d. Si $R(n) = 3n^5 - 8n^2 + 1001$, calcula $R(2)$.

e. Si $T(r) = 2r^4 + 2r^3 - 4r$, calcula $T(3)$.

Realiza lo que se indica.

a. Si $T(m) = 0{,}35m^3 + 2{,}5m^2 - 0{,}03m^4$, calcula $T(0{,}4)$. Utiliza el punto para separar los decimales.

b. Si $R(s) = 100s^4 + 1.000s^2 - 10$, calcula $R(0{,}1)$.

c. Si $B(x) = 2x^2 + \sqrt{5}x$, calcula $B(\sqrt{5})$.

d. Si $P(a) = 3a^2 + 2a^3 - a^4$, calcula $2[P(-2)] - 1024$.

e. Si $M(x) = 4x^4 - 4x^3 + 2x^2$, calcula $M(5)$, $M(3)$ y $M(2)$. Luego, efectúa $-2[M(5)] - 4[M(3)] + M(2)$.

# Grado de un polinomio

Se llama **polinomio nulo** a aquel cuyos coeficientes son todos ceros.

El polinomio nulo carece de grado.

En un polinomio, el **término principal** es el de mayor grado.

Y el **término independiente** es el de grado nulo, es decir, el que se expresa como un número.

En polinomios de una sola indeterminada, el **grado** es el valor del máximo exponente de esta en un término con coeficiente no nulo.

**EJEMPLOS:**

**a)** Si $P(x) = 0,5x^4 + \sqrt{3}x^2 - 8$, halla el grado del polinomio.

- Observamos que hay una sola indeterminada, que es $x$.
- Rastreamos su máximo exponente: 4. Ese es el grado de $P(x)$.

**b)** Calcula el valor de $m$ si $M(x) = -4x^{2m+4}$ es de grado 20.

- El grado del monomio está expresado por el exponente $2m + 4$.
- Entonces: $2m + 4 = 20 \Rightarrow 2m = 16 \Rightarrow m = 8$

**c)** Calcula el valor de $a$ si $P(x) = 5 + 9x^{a+5} - 7x^{a+3}$ es de noveno grado.

- Para cualquier valor de $a$, resulta que $a + 5 > a + 3$. Entonces, $a + 5$ debe representar el máximo exponente.
- Como el polinomio es de grado 9, el mayor exponente $(a + 5)$ es igual a 9. Planteamos la ecuación: $a + 5 = 9 \Rightarrow a = 4$

**14** Dado un polinomio no nulo, evalúa cada afirmación como verdadera o falsa.

a. El grado de un monomio puede ser negativo.

b. El grado del término independiente no nulo es igual a cero.

c. El grado de un polinomio puede ser igual o mayor que el grado de uno de sus términos.

d. El polinomio $P(x) = 4x^5 + 8a^3x^4 + x^3$ es de séptimo grado.

**15** Calcula $n$ si $R(y) = 8y^{3n-8}$ es de décimo grado.

**16** La suma de los coeficientes del polinomio $R(x) = (a-4)x^{a+3} + (a+2)x^{a+2} + ax^{a+1}$ es 25. Halla el grado de $R(x)$.

**17** Considera los monomios $M(x) = -4x^{m+3}$ y $N(y) = 5y^{6-m}$. ¿Existe algún valor de $m$ para el cual $M(x)$ y $N(x)$ tienen igual grado? ¿Por qué?

## Polinomios ordenados y completos

| Polinomio | Definición | Ejemplo |
|---|---|---|
| Ordenado | Los exponentes de la indeterminada están en orden creciente o decreciente (esto último es lo más usual). | $P(x) = 3x^5 + 4x^3 - x^3 - 2$ está ordenado en forma decreciente. |
| Completo | Los exponentes de la indeterminada aparecen desde cero hasta el grado del polinomio. | $R(y) = 8 + y + 0y^2 - 5y^3 - y^4$ es un polinomio completo y ordenado en forma creciente.<br>Observemos que se agregó (con coeficiente 0) el término cuadrático, que no estaba en el polinomio, para completarlo. |

**EJEMPLO:**

Si el polinomio $P(x) = 8x^{a-4} - 2x^{b+2} + x^{c+5}$ está completo y ordenado en forma decreciente, halla $a$, $b$ y $c$.

- Por tener tres términos y estar completo, el polinomio debe ser de grado 2:
  $P(x) = 8x^2 - 2x^1 + x^0$
- Calculamos los valores de $a$, $b$ y $c$:
  $P(x) = 8x^{a-4} - 2x^{b+2} + x^{c+5} = 8x^2 - 2x^1 + x^0$
  $a - 4 = 2 \Rightarrow a = 6$ $\quad b + 2 = 1 \Rightarrow b = -1$ $\quad c + 5 = 0 \Rightarrow c = -5$

En un polinomio completo, el número de sus términos es igual a su grado más uno.

**18** Escribe los polinomios que se indican.

a. Un binomio $B(x)$ ordenado en forma creciente.

b. Un polinomio $P(y)$ de grado 4, completo y ordenado en forma decreciente.

c. Un trinomio $Q(y)$ ordenado, de grado 6.

d. Un polinomio $P(x)$ de cinco términos, completo y ordenado en forma decreciente.

e. Un cuatrinomio $R(x)$ de cinco términos, completo pero no ordenado.

**19** Sea $P(x) = 9x^{a-8} + 2x^{b-6} - 6x^{c-4}$ un polinomio completo y ordenado en forma decreciente. Halla $a$, $b$ y $c$.

**20** Determina en cada caso los valores de $a$ y $b$ si los siguientes polinomios están completos.

a. $P(x) = 8x^4 - 6x^a + 3x^2 + 4 - x^b$

b. $Q(y) = \frac{3}{4}y^2 + 2y^5 - 7y^a - 9y^b + 7 + y^3 - 2{,}3y^4$

c. $R(x) = \sqrt{5}x^3 - 1{,}2\,x^a + 2x^b + 9$

d. $S(z) = z^7 - 4z^a + 3z^b + 8z^2 - \frac{8}{9}z^4 + 6z + \frac{4}{3} + 3z^6$

**21** Completa y ordena en forma decreciente los siguientes polinomios:

a. $S(x) = \sqrt{7}x^5 + 7x - 3x^2 + x^4$

b. $T(y) = -y^2 - 2y^6 + 8 + 5y^3 + y^7$

c. $U(z) = 3z + 6z^4 - 8z^5 + 0{,}5z^3 + 6z^7$

# Operaciones con polinomios

## Adición y sustracción

Otra forma de sumar y restar consiste en organizar mediante paréntesis, para luego eliminarlos y reducir (sumar o restar) términos semejantes.

$(2{,}7x^3 + x + 2) - (-4x^3 + 2x^2 - 0{,}6x) + (-x^3 - 2) =$
$= 2{,}7x^3 + x + 2 + 4x^3 - 2x^2 + 0{,}6x - x^3 - 2 =$
$= 5{,}7x^3 - 2x^2 + 1{,}6x$

**EJEMPLO:**

Sean $F(x) = 2{,}7x^3 + x + 2$; $G(x) = -4x^3 + 2x^2 - 0{,}6x$ y $H(x) = -x^3 - 2$.
Calcula $F(x) - G(x) + H(x)$.

- Ordenamos verticalmente para resolver $F(x) - G(x) + H(x)$:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & 2{,}7x^3 & + & 0x^2 & + & 1x & + & 2 \\ + & 4x^3 & - & 2x^2 & + & 0{,}6x & + & 0 \\ & -1x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & - & 2 \\ \hline & 5{,}7x^3 & - & 2x^2 & + & 1{,}6x & + & 0 \end{array}$$

Ordenamos en forma decreciente y completamos cada polinomio. Luego, cambiamos de signo los términos de G($x$), pues es el polinomio que se resta, y sumamos los tres polinomios.

$F(x) - G(x) + H(x) = 5{,}7x^3 - 2x^2 + 1{,}6x$

**EJEMPLO:**

¿Qué polinomio hay que sumar a $P(x) = 3x^3 - 8x + 5$ para obtener $T(x) = 2x^3 + 7x - 1$?

- Sea M($x$) el polinomio que vamos a hallar:

$P(x) + M(x) = T(x)$ — Planteamos la suma.

$(3x^3 - 8x + 5) + M(x) = 2x^3 + 7x - 1$ — Reemplazamos P($x$) y T($x$).

$M(x) = 2x^3 + 7x - 1 - (3x^3 - 8x + 5)$ — Despejamos M($x$).

$M(x) = -x^3 + 15x - 6$ — Resolvemos y hallamos M($x$).

## Multiplicación

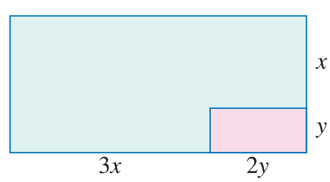
El **producto de dos polinomios** es otro polinomio que se obtiene multiplicando cada monomio de un factor por cada monomio del otro factor. Luego, se reducen los términos semejantes.

- $x^m \cdot x^n = x^{(m+n)}$
- $x^m \div x^n = x^{(m-n)}$
- $(x^m)^n = x^{mn}$

**Multiplicación de monomios**.
$3x^2y^5 \cdot 2x^3y^2z = 6x^5y^7z$

**EJEMPLO:**

En una de las esquinas de una sala hay una alfombra con las dimensiones que se muestran. ¿Qué expresión representa el área de la sala?




- Observamos que la sala tiene forma de rectángulo cuyo largo mide $(3x + 2y)$ y cuyo ancho es $(x + y)$.
- Calculamos el área de la sala, la cual es base por altura: $A = (3x + 2y)(x + y)$. Para ello, aplicamos la propiedad distributiva:

$(3x + 2y)(x + y) = 3x^2 + 3xy + 2xy + 2y^2 = 3x^2 + 5xy + 2y^2$

La expresión que representa el área de la sala es $3x^2 + 5xy + 2y^2$.

## División

Para dividir **un polinomio por un monomio,** se divide cada término del polinomio por el monomio.

**EJEMPLO:**

Calcula el cociente de $(8x^4 - 12x^3 + 20x^2) \div (-4x^2)$.

- Dividimos cada término del dividendo por el divisor:

  $8x^4 \div (-4x^2) + (-12x^3) \div (-4x^2) + 20x^2 \div (-4x^2) = -2x^2 + 3x - 5$

El cociente es $-2x^2 + 3x - 5$.

**División de monomios.**
$6x^5y^7z \div 2x^3y^2z = 3x^2y^5$

Al **dividir dos polinomios**, P($x$) y Q($x$), se obtienen otros polinomios, C($x$) y R($x$), llamados polinomios **cociente** y **resto**, respectivamente, tal que: P($x$) = Q($x$) · C($x$) + R($x$).
Siempre se cumple que R($x$) es nulo o su grado es menor que el de Q($x$).

**EJEMPLO:**

Divide $P(x) = 6x^3 - 2x^2 + 8$ por $Q(x) = -5 + 2x^2$

- Dividimos el primer término del dividendo por el primer término del divisor: $6x^3 \div 2x^2 = 3x$

$$\begin{array}{rrrr|l} 6x^3 & -2x^2 & +0x & +8 & 2x^2-5 \\ \cline{5-5} -6x^3 & & +15x & & 3x \\ \cline{1-3} & -2x^2 & +15x & & \end{array}$$

- Multiplicamos $3x$ por cada uno de los términos del divisor, y el resultado lo restamos del dividendo.
- Bajamos el siguiente término del dividendo (+8) y dividimos el primer término del nuevo dividendo por el primer término del divisor:

  $-2x^2 \div 2x^2 = -1$

$$\begin{array}{rrrr|l} 6x^3 & -2x^2 & +0x & +8 & 2x^2-5 \\ \cline{5-5} -6x^3 & & +15x & \downarrow & 3x-1 \\ \cline{1-3} & -2x^2 & +15x & +8 & \\ & 2x^2 & & -5 & \\ \cline{2-4} & & 15x & +3 & \end{array}$$

- Repetimos el proceso hasta que el polinomio resto tenga grado menor que el divisor o sea cero.

$C(x) = 3x - 1 \quad R(x) = 15x + 3$

Al dividir, es necesario ordenar ambos polinomios en forma decreciente y completar el dividendo:
$P(x) = 6x^3 - 2x^2 + 0x + 8$
$Q(x) = 2x^2 - 5$

**EJEMPLO:**

Divide $P(y) = 13y^3 + 15y + 6y^4 + 5$ por $Q(y) = 2 - y + 2y^2$

- Ordenamos y completamos los polinomios. Luego, dividimos:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 6y^4 & +13y^3 & +0y^2 & +15y & +5 & 2y^2-y+2 \\ \cline{6-6} -6y^4 & +3y^3 & -6y^2 & \downarrow & \downarrow & 3y^2+8y+1 \\ \cline{1-3} & 16y^3 & -6y^2 & +15y & & \\ & -16y^3 & +8y^2 & -16y & & \\ \cline{2-4} & & 2y^2 & -y & +5 & \\ & & -2y^2 & +y & -2 & \\ \cline{3-5} & & & & 3 & \end{array}$$

$C(y) = 3y^2 + 8y + 1 \qquad R(y) = 3$

Si el resto no es nulo, su grado debe ser menor que el grado del polinomio divisor.

**22** Considera los siguientes polinomios:

$P(x) = 5x^3 - 2x^2 + 7x^5 + x^6 - 4x + 8$

$Q(x) = -3x^2 + 8x^4 + 1 + 2x^5 + 6x - 5x^3$

$R(x) = 9 - 6x^6 - 2{,}1x^3 + 4x^5 - 2x^4 + x^2 + 8x$

$S(x) = -7x^4 - 3x^5 + 2x^2 + 8x^6 - 0{,}5x^3$

Calcula lo que se pide.

a. $P(x) + Q(x)$ b. $R(x) + S(x)$

c. $Q(x) - S(x)$ d. $S(x) - Q(x) - P(x)$

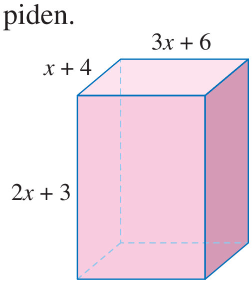
**23** Dado el prisma recto de la figura, expresa mediante polinomios las medidas que se piden.

a. La suma de todas sus aristas.

b. La suma de las áreas de las dos bases.

c. Su área lateral.

d. Su volumen.




**24** Si $P(x) = 2x^2 + 5x + 5$; $N(x) = 0{,}5x - 4$ y $M(x) = 3x^2 - x + 11$, calcula:

a. $P(x) \cdot N(x)$ b. $P(x) \cdot M(x)$

c. $N(x) \cdot M(x)$ d. $[P(x) + N(x)] \cdot M(x)$

**25** Efectúa las siguientes divisiones:

a. $(-4x^4 + 8x^3 - 10x^2 + 6x) \div 2x$

b. $(7y^5 - 14y^7 + 21y^6 - 49y^{10}) \div (-7y^4)$

**26** Divide mediante el método habitual.

a. $(9x^2 + 6x - 6) \div (3x + 1)$

b. $(4y^4 + 14y^3 + 15y - 6) \div (2y^2 - y + 2)$

# Método simplificado para dividir polinomios

Este algoritmo usa solo los coeficientes y divide polinomios de cualquier grado.

**EJEMPLO:**

Calcula el cociente y el resto de $(6x^5 + 4 + 5x^4 - 8x^3 - 4x^2) \div (2x^3 + 3x^2 - 1)$.

- Ordenamos en forma decreciente y completamos los polinomios dividendo $D(x)$ y divisor $d(x)$.

$D(x) = 6x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 0x + 4$

$d(x) = 2x^3 + 3x^2 + 0x - 1$

- Colocamos en la 1.ª fila los coeficientes del dividendo con su mismo signo, y en la columna izquierda, los coeficientes del divisor: el primero con su signo y los demás con signo cambiado.
- Trazamos una línea vertical a 3 lugares desde la derecha (porque el grado del divisor es 3).

3 lugares

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| +2 | +6 | +5 | −8 | −4 | 0 | +4 |
| −3 | | | | | | |
| 0 | | | | | | |
| +1 | | | | | | |

Coeficientes del cociente — Coeficientes del resto

- Dividimos el 1.er coeficiente del dividendo por el 1.er coeficiente del divisor para obtener el 1.er coeficiente del cociente ($6 \div 2 = 3$).
- Luego, multiplicamos ese 3 por cada uno de los coeficientes restantes del divisor: $3 \times (-3) = -9$; $3 \times 0 = 0$ y $3 \times (+1) = +3$ y ubicamos estos resultados en las columnas 2; 3 y 4.

÷

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| +2 | +6 | +5 | −8 | −4 | 0 | +4 |
| −3 | | −9 | 0 | +3 | | |
| 0 | | | | | | |
| +1 | | | | | | |
| | 3 | | | | | |

- Sumamos los valores de la 2.ª columna: $(+5) + (-9) = -4$ y dividimos la suma por el 1.er coeficiente del divisor: $-4 \div (+2) = -2$.
- Multiplicamos $-2 \times (-3) = +6$; $-2 \times 0 = 0$ y $-2 \times (+1) = -2$ y ubicamos los resultados en las columnas 3; 4 y 5.

÷ −4

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| +2 | +6 | +5 | −8 | −4 | 0 | +4 |
| −3 | | −9 | 0 | +3 | | |
| 0 | | | +6 | 0 | −2 | |
| +1 | | | | | | |
| | 3 | −2 | | | | |

- Sumamos los valores de la 3.ª columna: $(-8) + 0 + (+6) = -2$ y dividimos la suma por el 1.er coeficiente del divisor: $-2 \div (+2) = -1$. Luego, repetimos el procedimiento.
- Sumamos los valores de las columnas para obtener los coeficientes del resto: +2; −2 y +3.

÷ −2

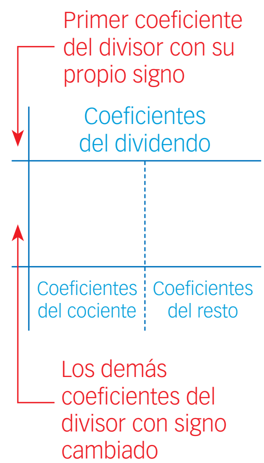
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| +2 | +6 | +5 | −8 | −4 | 0 | +4 |
| −3 | | −9 | 0 | +3 | | |
| 0 | | | +6 | 0 | −2 | |
| +1 | | | | +3 | 0 | −1 |
| | 3 | −2 | −1 | +2 | −2 | +3 |

- Expresamos el cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$.

$C(x) = 3x^2 - 2x - 1$

$R(x) = 2x^2 - 2x + 3$

Observa cómo se organizan los coeficientes del dividendo y del divisor.




La ubicación de la línea vertical (en azul) depende del grado del polinomio divisor. Además, esta línea separa los coeficientes del cociente y los coeficientes del resto.

**EJEMPLO:**

Al dividir $P(x) = -11x^2 + px + 6x^4 + q$ por $Q(x) = -1 - 3x + 3x^2$, se obtiene el resto $R(x) = 3x + 2$. Calcula $p + q$.

- Ordenamos y completamos los polinomios dividendo y divisor:
  $P(x) = 6x^4 + 0x^3 - 11x^2 + px + q$ y $Q(x) = 3x^2 - 3x - 1$
- Realizamos la división:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| +3 | +6 | 0 | −11 | $p$ | $q$ |
| +3 | | +6 | +2 | | |
| | | | +6 | +2 | |
| +1 | | | | −3 | −1 |
| | +2 | +2 | −1 | +3 | +2 |

- Sabemos que el resto es $3x + 2$.
  Sumamos la ecuaciones de $p$ y $q$:

$$\begin{array}{lr} & p + 2 - 3 = 3 \\ + & q - 1 = 2 \\ \hline & p + q + 2 - 3 - 1 = 3 + 2 \end{array}$$

- Hallamos $p + q$:
  $p + q = 3 + 2 - 2 + 3 + 1$
  $p + q = 7$

**27** Calcula el cociente y el resto.

**a.** $(x^5 + 4x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - 1) \div (x^2 + x - 1)$

**b.** $(-10x^2 + 3x^3 + 2x - 2x^4 + x^5 - 4) \div (x^3 + 3 - x^2)$

**28** El volumen de agua que lleva un canal de regadío depende de la temperatura $t$, según:
$V(t) = 4t^5 + 2t^4 + 3t^3 + 2t^2 + 4t + 1$. Si el tiempo que demora ese volumen en fluir es $T(t) = t^2 - t + 1$, halla la expresión del caudal Q en función de $t$.
(Caudal = volumen ÷ tiempo).

**29** Halla $m$ y $n$ y determina $C(x)$ y $R(x)$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | −2 | 4 | 0 | 10 |
| −4 | | −4 | 6 | 4 | |
| 6 | | | 12 | −18 | −12 |
| 4 | | | | | |
| | 1 | $m$ | 22 | $n$ | −2 |

**30** Al dividir $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ por $Q(x) = 3x^3 - x^2 - x + 1$, se obtiene $C(x) = 4x^2 + 5x + 6$ y $R(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Halla los coeficientes de $P(x)$.

**31** Halla el valor de cada expresión si $x = 6$ e $y = 1$.

**a.** $5x^3 - 6xy^{-2} + 4x$

**b.** $\dfrac{x^2}{x+y} + 7x^2 - \sqrt{y} + 5$

**c.** $\dfrac{8}{3}x - 16 + \dfrac{4}{x^3} - 3x^5$

**d.** $\dfrac{2}{\sqrt{x-5}} + \dfrac{5y}{x} - 5y^3 + \dfrac{1}{2}$

**e.** $\dfrac{2}{5}x^2 - 3x^4 + \dfrac{5}{x^2} - x^5$

**32** Determina la parte literal sabiendo que los términos son semejantes: $72a^{5m+2}b^{n-4}$ y $56a^{m+10}b^{2n-10}$.

**33** Calcula la suma de los coeficientes de la expresión $R(x) = (a+2)x^{b-1} + (a+b)x^4 - abx^a$ si sus términos son semejantes.

**34** Observa las siguientes expresiones algebraicas.

| | |
|---|---|
| $5x^3 + 2x^{-1} + 2$ | $x + 4{,}5x^3 - x^2$ |
| $9z^x + 6{,}1z + 2$ | $\sqrt{5}x^5 - 8x + 1{,}2$ |
| $\sqrt{y} + y$ | $x^{\sqrt{3}} + 4x$ |

**a.** Para cada una de ellas, señala todos los coeficientes y todas las partes literales.

**b.** Indica cuáles de esas expresiones algebraicas son polinomios.

**c.** Para las que no lo sean, sugiere algún cambio para que sean polinomios.

**35** Halla el mínimo valor de $m$ que haga que $G(y)$ sea un polinomio, con $G(y) = 5y^{m-3} + 2y^{m-1} + y^{m-6}$.

**36** Calcula la suma de los coeficientes del polinomio $G(x) = ax^d + bx^c + cx^b + dx^a + a$ si se sabe que está completo y ordenado en forma decreciente.

**37** Si $F(x) = 4x - 17$ y $G(4x - 17) = x^2 + 3x - 6$, calcula el valor numérico de $G(3)$.
Pista: resuelve primero $F(x) = 3$.

**38** Completa y ordena en forma creciente los siguientes polinomios.

**a.** $P(x) = 9{,}2x^4 - 2x^6 + 4x + 5x^3 + 4$

**b.** $Q(x) = 8 - 3x^3 + 5x + x^2 + 6x^5$

**c.** $R(y) = 9y + 5y^5 - \dfrac{1}{2}$

**39** Si $R(x)$ y $T(x)$ son polinomios ordenados, calcula los posibles valores de $n$ para cada uno.

**a.** $R(x) = -7x^8 - 3x^6 + 8x^n + \dfrac{3}{5}x$

**b.** $T(x) = \sqrt[3]{5}x^4 + 7x^6 - 2x^n + 16x^{10}$

**40** Al sumar $M(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ y $N(x) = 7x^3 + 8x^2 + x + 4$, se obtiene $P(x) = 10x^3 + 3x^2 + 2x - 2$.
Calcula los valores de $a$, $b$, $c$ y $d$.

**41** Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones.

**a.** $(15m^{25} - 30m^4 - 45m^8) \div (-15m^2)$

**b.** $\left(-\dfrac{6x^3}{5} + 2x^2 - \dfrac{16x}{3}\right) \div \left(-\dfrac{2x}{5}\right)$

**c.** $(x^3 - 3 + 3x^2 - x) \div (2x + x^2 - 3)$

**d.** $\dfrac{10a^7 - 10a^6 - 6a^5 - 21a^4 + 2a^3 + 2a - 7}{5a^4 - 3a^2 - a - 3}$

**42** Completa la tabla.

| | Factor 1 | Factor 2 | Producto |
|---|---|---|---|
| **a.** | $x + 3$ | | $-x^2 + 2x + 15$ |
| **b.** | | $7x - 3$ | $7x^2 + 11x - 6$ |
| **c.** | $4m - 5$ | | $12m^3 - 15m^2 + 8m - 10$ |
| **d.** | | $3a - 4$ | $-27a^2 + 6a + 40$ |

**43** Calcula $P(x) \cdot Q(x)$ en los siguientes casos:

**a.** Si $P(x) = x^{m+1} - 4x^m + 3$ y $Q(x) = x^m - 2$.

**b.** Si $P(x) = 3x^{n-1} + x^n - 4$ y $Q(x) = x^{n-1} + 5$.

**44** En la siguiente multiplicación, la 1.ª fila de la suma representa el producto entre el primer polinomio y el término –2, mientras que la 2.ª fila corresponde al producto por $3x$.
Completa los términos que faltan.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & \square & \square & \square & \square \\
 & \times & & & 3x & -\;2 \\
\hline
+ & & \square & \square & 8x & \square \\
 & \square & \square & \square & \square & \\
\hline
 & -9x^4 & +\;12x^3 & -\;16x^2 & -\;7x & +\;10
\end{array}
$$

**45** Responde justificando tu respuesta.

a. ¿La expresión algebraica $y^3 + 5\,y^{\frac{1}{2}}$ es un polinomio?

b. ¿El polinomio $P(x) = 5x^5 + 2x^3 - 8$ está ordenado en forma creciente?

c. Para que $P(x) = (a - 1)x^2 + (b - 3)x + (c - 7)$ sea nulo, ¿cuáles deben ser los valores de $a$, $b$ y $c$?

d. ¿Por qué la expresión $3x^{-2} + 4x + 1$ no es un binomio?

**46** Resuelve los siguientes problemas:

a. La figura ① representa un terreno rectangular sobre el cual se construirá una piscina. En el resto del terreno se sembrará césped. Determina la expresión algebraica que representa el área de la región que tendrá césped.

b. En la figura ②, expresa el área de la región coloreada en función de $x$.

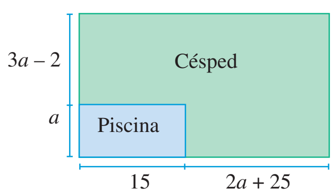


Figura ①

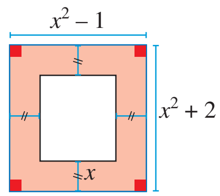
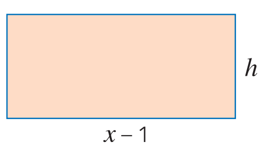


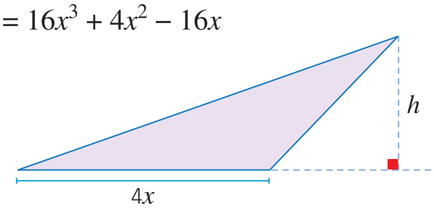
Figura ②

**47** Determina la altura de las figuras a partir de los datos que se dan.

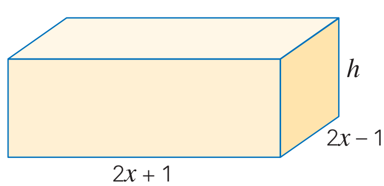
a. $A_{\square} = x^3 + 2x^2 + x - 4$




b. $A_{\triangle} = 16x^3 + 4x^2 - 16x$

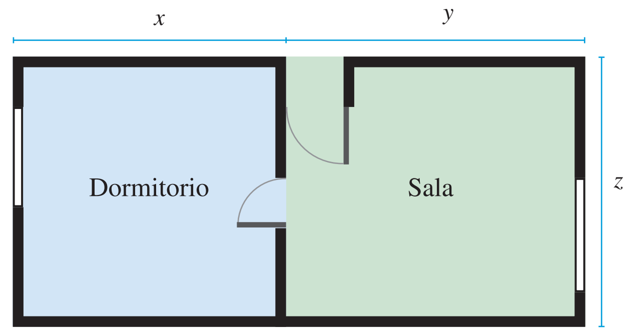



c. $V = 12x^3 + 8x^2 - 3x - 2$




**48** En el producto de $(ax + 1)(x + a)$, el término de primer grado tiene coeficiente 10. Calcula el valor de $a$ para $a > 0$.

**49** Observa la distribución de los ambientes de la casa de Antonio. Luego, desarrolla lo que se indica.




Se sabe que el metro cuadrado de mayólica cuesta $n$ pesos, y el metro cuadrado de parqué, el doble. Además, el costo de mano de obra por colocar un metro cuadrado de parqué cuesta $10 más que el costo por colocar un metro cuadrado de mayólica. Halla una expresión algebraica que represente:

a. Costo total por colocar parqué en el dormitorio.

b. Costo total por colocar mayólica en la sala.

**50** Se sabe que Iván vende empanadas de pollo a $3 y empanadas de carne a $4. Además, gasta $5 diarios en movilidad. Para calcular el dinero que recauda cada día, Iván utiliza la expresión $3x + 4y - 5$. Si el viernes vendió 15 empanadas de pollo y 20 de carne, ¿cuánto recaudó por dicha venta?

**51** En un supermercado, el ingreso anual por la venta de pollos se representa por $F(x) = 5x^2 - 3x + 14$ y el ingreso anual por la venta de pavos se representa por $G(x) = 25x^2 + x + 16$. Determina la expresión que representa el ingreso total por la venta de estas aves.

## Medicina forense

**52** Los científicos forenses pueden estimar la estatura de una persona a partir de la medida de algunos de sus huesos. Las fórmulas que se muestran expresan las relaciones aproximadas entre la longitud de la tibia $t$ y la estatura $h$ para varones y mujeres. Las medidas están dadas en centímetros.

Varones: $h = 81{,}688 + 2{,}392t$

Mujeres: $h = 72{,}572 + 2{,}533t$

**a.** Estima la estatura de un varón si su tibia mide 43 cm. Expresa la estatura en metros y aproximada a los centésimos.

**b.** Estima la estatura de una mujer si su tibia tiene una longitud de 38 cm. Expresa la estatura en metros y aproximada a los centésimos.

**c.** Si una mujer tiene una estatura de 160 cm, ¿cuál es la longitud de su tibia? Expresa dicha longitud en centímetros y aproximada a los centésimos.

**d.** Encuentra una expresión que indique la diferencia de estatura entre un varón y una mujer cuyas tibias midan lo mismo. ¿Esa diferencia depende de la longitud de las tibias?

## Nutrición

**53** El metabolismo basal es el gasto energético diario de una persona, es decir, lo que su cuerpo necesita diariamente para seguir funcionando.

Para medir el metabolismo basal de una persona, esta debe haber permanecido en reposo total en un lugar con una temperatura de 20 °C y haber estado en ayunas 12 o más horas.

El metabolismo basal se calcula en kilocalorías/día y depende del género, estatura y peso de la persona. La Organización de las Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura (FAO, *Food and Agriculture Organization*, en inglés) propone este método para edades comprendidas entre 10 y 18 años:

Mujeres: $M_{basal} = 7{,}4m + 428h + 572$

Varones: $M_{basal} = 16{,}6m + 77h + 572$

Donde $m$: peso en kilogramos y $h$: altura en metros.

**a.** Calcula las necesidades nutricionales de una adolescente de 17 años de edad si tiene un peso de 59 kg y mide 161 cm de estatura.

**b.** Calcula las necesidades nutricionales de un joven de 18 años de edad si tiene un peso de 67 kg y mide 175 cm de estatura.

## Geología

**54** Los geólogos estiman que la temperatura de la Tierra aumenta cerca de 10 °C por cada kilómetro debajo de su superficie.

**a.** Halla una expresión que permita estimar la temperatura de la Tierra a una profundidad de $k$ km si la temperatura superficial es de $s$ °C.

**b.** Si en la superficie de la Tierra hay una temperatura de 27 ºC, ¿cuál será la temperatura a una profundidad de 15 km?

# AUTOEVALUACIÓN

## Venta de autos

En internet hay información que orienta a las personas a establecer un precio apropiado para ofertar sus vehículos. Allí se indica que, luego del primer año, un auto 0 km se depreciará 20 % (es decir, valdrá el 80 % del precio de un auto nuevo de la misma marca y modelo) y, a partir del segundo año, se depreciará a razón de 10 % de su valor por año.

1. Si un auto 0 km cuesta \$180.000, calcula cómo variará su precio luego de 1, 2, 3 y 4 años.

2. Señala cuáles de las siguientes expresiones algebraicas representan el precio que tendrá ese auto nuevo de \$180.000 dentro de $n$ años ($n \geq 2$). Justifica tu respuesta.

   a) $180.000 \cdot 0{,}8 \cdot (n - 1) \cdot 0{,}9 \cdot n$

   b) $180.000 \cdot 0{,}8 \cdot n \cdot 0{,}9 \cdot (n - 2)$

   c) $180.000 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9^{(n-1)}$

   d) $180.000 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot (n - 1)$

3. Modifica la expresión algebraica elegida en el ítem anterior para que pueda ser utilizada con un auto que cueste $x$ pesos siendo un 0 km.

4. Considera el siguiente polinomio:

   $f(x) = 834\,x^4 - 8.364\,x^3 + 30.054\,x^2 - 58.524\,x + 180.000$

   Con un calculadora efectúa $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ y $f(4)$.
   ¿Qué podría representar este polinomio?

# 5 Polinomios II

## MATEMUNDO

### Optimización de problemas

Supongamos que una fábrica debe decidir el tamaño de las cajas en las que envasará sus productos, de manera que pueda transportar la mayor cantidad gastando lo menos posible en el empaque.

Claramente, una caja más grande permitirá transportar más productos, pero también tendrá mayor costo, dado que requerirá más cartón para ser confeccionada.

El tamaño final (expresado en función de $x$) no se ha decidido todavía, aunque ya se analiza qué forma tendrán las cajas, que deberían ser prismáticas para facilitar su traslado.
Se evalúan cuatro alternativas:

- un prisma de base rectangular de $(x - 3) \times (x + 3)$ cm de base y $x$ cm de altura;
- un prisma de base cuadrada de $(x - 2)$ cm de arista y de $(x + 4)$ cm de altura;
- un prisma de base cuadrada de $(x + 2)$ cm de arista y de $(x - 4)$ cm de altura;
- un cubo de $x$ cm de arista.

• Expresa el volumen que tendrá cada tipo de caja en función de $x$. Recuerda que el volumen de un prisma es el producto entre su altura y la superficie de su base.

• Por cuestiones operativas, la longitud $x$ debería ser 20 cm. Evalúa cuál de los cuatro tipos de caja ofrece mayor volumen.

### Busco en la web

Digita en algún buscador (Firefox, Chrome, etc.) lo siguiente:

optimizar volumen + caja

Así observarás diversas maneras de optimizar este tipo de problemas.

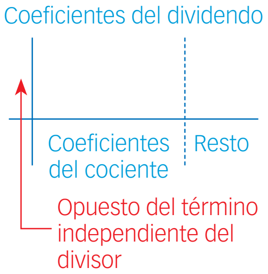
## ESTO YA LO SABÍA...

1 Si se divide un polinomio de cualquier grado por otro de grado 1 y la división no es exacta, ¿cuál debería ser el grado del polinomio resto? ¿Por qué?

2 ¿Qué relación hay entre el polinomio $P(x) = x^3 - 9x$ y la expresión $S(x) = x \cdot (x^2 - 9)$?

# Método de Ruffini y teorema del resto

El esquema de Ruffini organiza los coeficientes de los polinomios cociente y resto.




El **método de Ruffini** se utiliza para divisiones entre un polinomio de cualquier grado y un divisor de primer grado de la forma $(x \pm a)$.

**EJEMPLO:**

Divide $P(x) = 3x^3 + 2x - 4$ por $Q(x) = 2 + x$.

- Ordenamos y completamos el dividendo.

$$(3x^3 + 0x^2 + 2x - 4) \div (x + 2)$$

- Ubicamos los coeficientes del dividendo en la primera fila. En el costado izquierdo, colocamos el opuesto del término independiente del divisor (–2).

$$\begin{array}{r|rrr|r} & +3 & +0 & +2 & -4 \\ -2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

- Bajamos el 1.er coeficiente del dividendo (+3) y lo multiplicamos por –2.
- Escribimos el resultado (–6) en la 2.ª columna y lo sumamos con el 2.º coeficiente del dividendo $(0 + -6 = -6)$.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & +3 & 0 & +2 & -4 \\ -2 & & -6 & & \\ \hline & +3 & -6 & & \end{array}$$

- Multiplicamos –6 por –2. Luego, escribimos el resultado (+12) en la 3.ª columna y lo sumamos con el 3.er coeficiente del dividendo $(+2 + (+12) = +14)$.
- Multiplicamos +14 por –2. Luego, escribimos el resultado (–28) en la 4.ª columna y lo sumamos al 4.º coeficiente del dividendo $(-4 + -28 = -32)$.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & +3 & 0 & +2 & -4 \\ -2 & & -6 & +12 & -28 \\ \hline & \underbrace{+3 \quad -6 \quad +14}_{\text{Coeficientes del cociente}} & & & \underbrace{-32}_{\text{Resto}} \end{array}$$

El cociente de la división es $C(x) = 3x^2 - 6x + 14$, y el resto es $R(x) = -32$.

El grado del polinomio cociente es una unidad menor que el grado del polinomio dividendo.

Un polinomio $P(x)$ es **divisible** por otro $Q(x)$ si existe un polinomio $C(x)$ tal que: $P(x) = Q(x) \cdot C(x)$. En ese caso, la división entre $P(x)$ y $Q(x)$ es **exacta** y su resto es nulo: $R(x) = 0$.

**EJEMPLO:**

Calcula $k$ para que $2x^3 - 5x^2 + kx + 8k$ sea divisible por $(x + 2)$.

- Para que el polinomio sea **divisible** por $(x + 2)$, el resto debe ser igual a 0. Resolvemos mediante el método de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -5 & k & 8k \\ -2 & & -4 & 18 & -36 - 2k \\ \hline & 2 & -9 & 18 + k & \underbrace{-36 + 6k}_{\text{Resto}} \end{array}$$

$$-36 + 6k = 0 \quad \text{Resto} = 0$$

$$6k = 36 \rightarrow k = 6$$

El valor de $k$ es 6.

## Teorema del resto

Este teorema afirma que al dividir un polinomio $P(x)$ por $(x - a)$, el resto $R(x)$ coincide con el valor de $P(a)$. Este hecho permite calcular el resto sin necesidad de realizar la división, pues alcanza con calcular $P(a)$.

Entonces, pueden seguirse estos pasos:

**Paso 1:** Se iguala el polinomio divisor a cero, para hallar su **raíz**.

**Paso 2:** Se reemplaza el valor de la raíz en el polinomio dividendo, obteniéndose así el resto.

**EJEMPLO:**

Calcula el resto de dividir $(7x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 1) \div (x - 2)$.

- Igualamos el divisor a cero: $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$ ◀ 2 es la raíz del divisor.
- Hallamos el resto, que es P(2). Para ello, reemplazamos $x = 2$ en el dividendo.
  $7(2)^5 + 4(2)^3 - 2(2)^2 + 1 = 224 + 32 - 8 + 1 = 249$

El resto de la división es 249.

**EJEMPLO:**

Si la división $(8x^3 + 8x^2 - mx - 6) \div (2x + 1)$ es **exacta**, calcula el valor de $m$.

- Para aplicar el teorema del resto, hallamos la raíz del divisor:
  $2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$
- Reemplazamos el valor de $x = -\frac{1}{2}$ en el dividendo y hallamos el resto, que quedará expresado en función de $m$:
  $$8x^3 + 8x^2 - mx - 6 \rightarrow 8\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 8\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - m\left(-\frac{1}{2}\right) - 6$$
  $$= 8\left(-\frac{1}{8}\right) + 8\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{m}{2} - 6 = -1 + 2 + \frac{m}{2} - 6 = \frac{m}{2} - 5$$
- Como la división es exacta, el resto es cero:
  $\frac{m}{2} - 5 = 0 \rightarrow \frac{m}{2} = 5 \rightarrow m = 10$

El valor de $m$ es 10.

El teorema del resto también se aplica para divisiones de la forma $ax \pm b$.

**EJEMPLO:**

Calcula el resto de dividir $P(x) = (x^3 + ax^2 - ax - 2)$ por $(x - a)$, si se sabe que $P(x)$ es divisible por $(x - 2)$.

- Por dato, la división $(x^3 + ax^2 - ax - 2) \div (x - 2)$ es exacta.
  Para saber el valor de $a$, hallamos la raíz del divisor: $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$
  Reemplazamos $x = 2$ en el dividendo: $(2)^3 + a(2)^2 - 2a - 2 = 6 + 2a$
  Por ser una división exacta, el resto es cero: $6 + 2a = 0 \rightarrow a = -3$
- Calculamos el resto de $(x^3 + ax^2 - ax - 2) \div (x - a)$.
  Reemplazamos $a = -3$ en la división: $(x^3 - 3x^2 + 3x - 2) \div (x + 3)$
  Aplicamos el teorema del resto: $x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$
  $(-3)^3 - 3(-3)^2 + 3(-3) - 2 = -27 - 27 - 9 - 2 = -65$

El resto de la división es $-65$.

**3** Calcula el cociente C($x$) y el resto R($x$).

**a.** $(8x^3 + 14x^2 - 10x - 12) \div (x - 1)$

**b.** $(3x^4 - 10x^3 - 20x + 5 - x^2) \div (-4 + x)$

**4** Si las siguientes divisiones son exactas, calcula los valores de $m$ y $n$.

**a.** $(2x^4 + 11x^3 - 4x^2 + mx + 15) \div (x + 5)$

**b.** $(x^3 + mx^2 - nx - 14) \div (x - 2)$ si $m = 2n$.

**5** El resto de $(y^4 - y^3 - y + m) \div (y - 2)$ es 10. Calcula el valor de $m$.

**6** ¿Qué valor debe tener $a$ para que el polinomio $x^3 - 18x + a$ sea divisible por $x + 5$?

**7** Resuelve las siguientes divisiones:

**a.** $(-12 + x^4 + 22x^2 + 9x^3 + 10x) \div (2 + x)$

**b.** $(10x^3 - 15) \div (x + 5)$

**c.** $(-x^2 + 12 - 16x + 3x^3) \div (-2 + x)$

**8** Halla el resto aplicando el teorema respectivo.

**a.** $(4x^3 - 4x^2 + 3x - 1) \div (x + 2)$

**b.** $(20x^5 - 2x^3 + 3x - \sqrt{2}) \div (x + \sqrt{2})$

**EJEMPLO:**

Calcula $(4x^9 + 3x^6 - 7x^3) \div (x^3 - 2)$ con el método de Ruffini.

- Observamos que el divisor no es de primer grado, pero los exponentes del dividendo son múltiplos del grado del divisor. Por ello, podemos expresar el dividendo así:

$$(4(x^3)^3 + 3(x^3)^2 - 7x^3) \div (x^3 - 2)$$

- Reemplazamos $x^3 = z$ y aplicamos el método de Ruffini: $(4z^3 + 3z^2 - 7z) \div (z - 2)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 4 | 3 | –7 | 0 |
| 2 | | 8 | 22 | 30 |
| | 4 | 11 | 15 | 30 |

$C(z) = 4z^2 + 11z + 15$ y $R(z) = 30$

Reemplazamos $z = x^3$ en el cociente y el resto.

$C(x^3) = 4(x^3)^2 + 11(x^3) + 15 = 4x^6 + 11x^3 + 15$

$R(x) = 30$

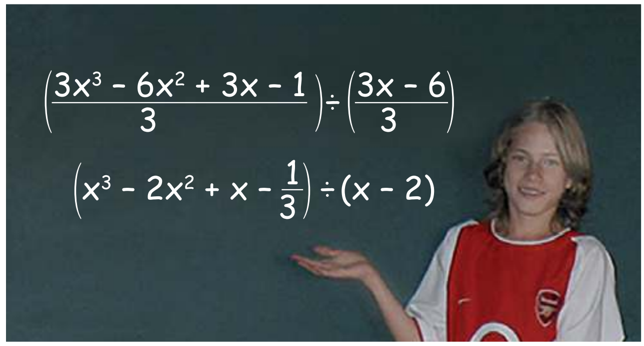
**9** Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones. Aplica el método de Ruffini.

**a.** $(3x^6 + 5x^4 - 2x^2 - 1) \div (x^2 + 3)$

**b.** $(y^{20} - 2y^{15} + 4y^{10} - 8y^5 + 4) \div (-1 + y^5)$

## Aplicar un artificio

Sara debe hallar el cociente y el resto de la división $(3x^3 - 6x^2 + 3x - 1) \div (3x - 6)$. El divisor es de primer grado, pero su coeficiente principal no es 1. ¿Cómo lo hará? ¿Qué artificio matemático puede aplicar?




**Comprende**

Sabemos que el divisor es de grado 1 y hay que hallar el cociente y el resto. Una forma de obtener estos términos es mediante el método de Ruffini, pero la dificultad está en que el divisor tiene la forma $(mx \pm b)$.

Debemos encontrar una división equivalente cuyo divisor tenga la forma $(x \pm a)$ y, luego, aplicar el método de Ruffini.

**Planifica**

Escribimos una división equivalente cuyo divisor resulte de la forma $(x \pm a)$. Para ello, debemos dividir el dividendo y el divisor por el coeficiente $m$ (en este caso, por 3) para poder aplicar el método de Ruffini.

Notamos que, como la división es equivalente, el cociente se mantiene igual, pero el resto queda dividido por $a$. Por lo tanto, para obtener el resto correcto, debemos multiplicarlo por $a$.

**Resuelve**

Dividimos el dividendo y el divisor por 3, ya que ese es el coeficiente del divisor.

$$\left(\frac{3x^3 - 6x^2 + 3x - 1}{3}\right) \div \left(\frac{3x - 6}{3}\right) \rightarrow \left(x^3 - 2x^2 + x - \frac{1}{3}\right) \div (x - 2)$$

Aplicamos el método de Ruffini:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | –2 | 1 | –1/3 |
| 2 | | 2 | 0 | 2 |
| × | 1 | 0 | 1 | 5/3 ◀ Resto |

Para obtener el resto correcto, lo multiplicamos por 3: $\frac{5}{3} \times 3 = 5$

El cociente es $x^2 + 1$ y el resto es 5.

**Comprueba**

Una forma de comprobarlo es aplicar el teorema del resto. Para ello, hallamos la raíz del divisor: $3x - 6 = 0 \rightarrow x = 2$

Reemplazamos en el dividendo y comprobamos que 5 es el resto:

$3x^3 - 6x^2 + 3x - 1 \rightarrow 3(2)^3 - 6(2)^2 + 3(2) - 1 = 5$

Otra forma de comprobar el resultado es verificar que se cumple la igualdad:

$D(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x)$

Reemplazamos con los datos obtenidos y verificamos que se obtiene $D(x)$:

$(3x - 6)(x^2 + 1) + 5 = (3x^3 + 3x - 6x^2 - 6) + 5 = 3x^3 - 6x^2 + 3x - 1 = D(x)$

**10** Resuelve los siguientes problemas aplicando un artificio.

a. Efectúa $(4x^3 - 2x^2 + 6) \div (2x + 2)$ y calcula la mitad del resto.

b. El cociente de $(6x^2 + 5 - 13x) \div (3x - 5)$ tiene la forma $(ax - b)$. Calcula $a$ y $b$.

c. Resuelve $(4x^2 - 12x + 9) \div (2x - 3)$ y calcula la diferencia entre el divisor y el cociente.

d. Realiza el cálculo.
$[(14x^2 - 12 + 22x) \div (7x - 3)] - 4$

e. Efectúa $(-14x^2 + 33 + 71x) \div (-3 - 7x)$ y halla la raíz del cociente.

f. Resuelve $(64x^4 - 36x^2 + 8x) \div (4x - 1)$ para obtener solo el tercer término del cociente.

g. Calcula la suma de coeficientes del cociente de $(2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 8x + 6) \div (\frac{1}{2}x + 1)$.

h. Resuelve $(-10x^3 - 13x^2 + 13x - 2) \cdot (-5x + 1)^{-1}$ y determina el cociente y el resto $-\frac{11}{2}$.

# Factor común

Hay ocasiones en las que, de ser posible, conviene escribir una expresión algebraica como producto de dos o más factores. Para eso hay diversos recursos algebraicos, uno de ellos es extraer **factor común** de la expresión.

**EJEMPLO:**

Extrae factor común de la expresión $4a^2b^3c + 6a^4b^5c^2 - 10a^2b^4$.

- Observamos los coeficientes buscando un factor (distinto de 1 o –1) que sea común a todos, si lo hay. En este caso es 2, ya que:
  $4 = 2 \cdot 2$; $6 = 2 \cdot 3$ y $10 = 2 \cdot 5$
- Observamos las partes literales buscando las variables que aparecen en todos los términos, si las hay. De ser así, se las toma con su menor exponente. En este caso es $a^2b^3$, pues:
  $a^2b^3c = a^2b^3 \cdot c$; $a^4b^5c^2 = a^2b^3 \cdot a^2b^2c^2$ y $a^2b^4 = a^2b^3 \cdot b$
- Podemos reescribir la expresión utilizando los factores encontrados.
  $4a^2b^3c + 6a^4b^5c^2 - 10a^2b^4 = 2 \cdot 2 \cdot a^2b^3 \cdot c + 2 \cdot 3 \cdot a^2b^3 \cdot a^2b^2c^2 - 2 \cdot 5 \cdot a^2b^3 \cdot b$
- Finalmente, extraemos los factores comunes.
  $4a^2b^3c + 6a^4b^5c^2 - 10a^2b^4 = 2a^2b^3 \cdot (2c + 3a^2b^2c^2 - 5b)$

La idea es tratar de extraer el mayor factor común posible. Si los coeficientes son enteros, ese mayor factor común será el m.c.d. de todos ellos, acompañado de las variables comunes con sus menores exponentes.

**EJEMPLO:**

Extrae factor común por grupos del polinomio $4x^5 - 8x^2 + 3x^3 - 6$.

- En los coeficientes no hay un factor (distinto de 1) que sea común.
- En las partes literales, la variable $x$ no aparece en todos los términos.
- Al no haber factor común, intentamos la variante por grupos. Para ello, observemos que $4x^5 - 8x^2$ tiene una estructura similar a $3x^3 - 6$:
  – se trata de una resta de dos términos;
  – el primer coeficiente es la mitad del segundo ($4 = 8 \div 2$ y $3 = 6 \div 2$);
  – la 1.ª parte literal es 3 grados mayor que la 2.ª ($x^5$ con $x^2$ y $x^3$ con $x^0$).
- Entonces, extraemos factor común en cada grupo.
  $4x^5 - 8x^2 + 3x^3 - 6 = [4x^5 - 8x^2] + [3x^3 - 6] = 4x^2 \cdot (x^3 - 2) + 3 \cdot (x^3 - 2)$
- Finalmente, extraemos el factor común $(x^3 - 2)$ de ambos términos.
  $4x^5 - 8x^2 + 3x^3 - 6 = (x^3 - 2)(4x^2 + 3)$

Es importante destacar que en una expresión con dos o más términos puede extraerse cualquier factor común, por ejemplo:

$P(x) = 3x + 8$
$P(x) = 3\,(x + 8/3)$

En las próximas páginas se procederá de esa manera.

**Factor común por grupos**

En algunos casos es conveniente sacar factor común en grupos:

$AP + BP + AQ + BQ$

$P\,(A + B) + Q\,(A + B)$

$(A + B)\,(P + Q)$

**11** Expresa como producto.

a. $15x + 50x^2$
b. $m^{10} + 3m^5$
c. $256m^2 + 144m^4$
d. $36x^2 - 24x^3 - 4x$
e. $24x^2 - 12xy + 9y^2x^5$
f. $16a^{10}b^2 - 8a^5b^4 + a^3b^6$
g. $24x^2y - 12xy + 6x^3y^4$
h. $(a - 2)x^2 - (a - 2)x$
i. $a^5 - a^4 + a - 1$
j. $mx + m^2 + xy + my$
k. $(x + y)^3 + (x + y)^2$
l. $-(m - n) - (m - n)^3$

**12** Encuentra y corrige los errores.

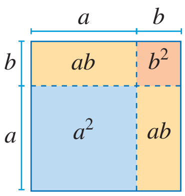
a. $4x^2y + 16x^3y^3 + 32xy^3 = 2xy(2x + 8x^2y^2 + 16y^2)$
b. $4x^2 + 4 = (2x + 2)(2x + 2)$

**13** Resuelve sin calculadora, escribiendo un producto conveniente.

a. $(0{,}4)^2 \cdot 64 - (0{,}4)^2 \cdot 7 + (0{,}4)^2 \cdot 43$
b. $(42 - 1)^2 - (42 - 1)$

# Cuadrado de un binomio

El **cuadrado de un binomio** es el producto de ese binomio por sí mismo, así que puede calcularse con la propiedad distributiva. Sin embargo, veremos que eso siempre da un mismo tipo de **trinomio**, que podemos obtener fácilmente con una fórmula.




Expresa el área de un cuadrado de lado $(a + b)$.

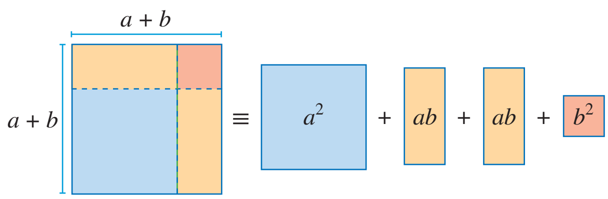
1.ª FORMA Calculamos el área elevando un lado al cuadrado:

Área $= (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ ◀ Aplicamos la propiedad distributiva.

$= a \cdot (a + b) + b \cdot (a + b)$

$= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2.ª FORMA Sumamos las áreas de las figuras que componen el cuadrado:




$(a + b)^2 \quad = \quad a^2 \quad + \quad ab \quad + \quad ab \quad + \quad b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

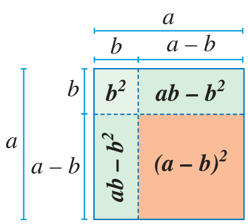
En ambos casos obtenemos: $\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

El cuadrado de una diferencia puede calcularse como el de una suma con uno de los sumandos negativos:

$(a - b)^2 = (a + (-b))^2$

En forma práctica:

$\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$



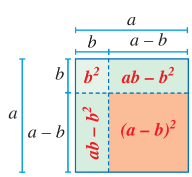

El **cuadrado de un binomio** es igual al cuadrado del primer término, más el doble del producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término.

**EJEMPLO:**

Calcula el cuadrado del binomio $a^3b^2 + 5a^4$.

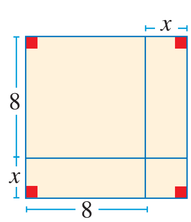
$(a^3b^2 + 5a^4)^2 = (a^3b^2)^2 + 2(a^3b^2)(5a^4) + (5a^4)^2 = a^6b^4 + 10a^7b^2 + 25a^8$

**14** El esquema muestra en rojo las áreas de cada una de las partes que forman un cuadrado de lado $a$. Con esos datos demuestra que $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

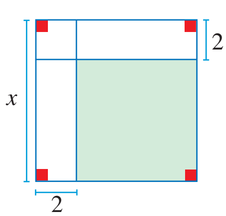



**15** Expresa el área de la región coloreada en cada caso.

**a.**




**b.**




**16** Desarrolla los siguientes binomios al cuadrado:

**a.** $(x + 3)^2$ **b.** $(3x - 2)^2$

**c.** $(4x + 5y)^2$ **d.** $(2m - 4n)^2$

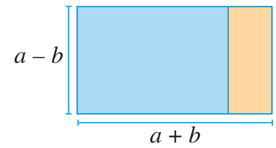
**e.** $(m^3n^4 + \frac{3}{4}m^2n)^2$ **f.** $(3\sqrt{5}a - 2\sqrt{5}b^3)^2$

**17** Une con líneas las expresiones equivalentes.

| | |
|---|---|
| $(a + b)^2 + (a - b)^2$ | $4ab$ |
| $(a - b)^2 - (a + b)^2$ | $2(a^2 + b^2)$ |
| $(a + b)^2 - (a - b)^2$ | $-4ab$ |

# Diferencia de cuadrados

Expresa el área del rectángulo de la figura.



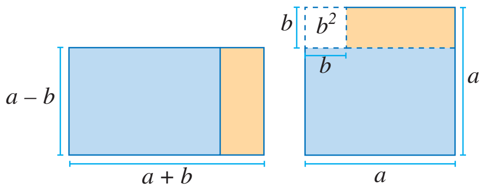

1.ª FORMA Su área es igual al producto de la base por la altura. La base del rectángulo es $(a + b)$ y su altura es $(a - b)$.

Área $= (a + b)\,(a - b)$ ◀ Aplicamos la propiedad distributiva.

$= a \cdot (a - b) + b \cdot (a - b)$

$= a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

2.ª FORMA Trasladamos figuras. El área del rectángulo es igual al área del cuadrado de lado $a$ menos el área del cuadrado de lado $b$.




$$\text{Área} = (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

En ambos casos obtenemos: $\mathbf{(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2}$

El **producto entre un binomio y su conjugado** es igual a la diferencia entre los cuadrados de los términos del binomio.

**Binomios conjugados**
Son aquellos que tienen los mismos términos, pero uno es una suma y el otro es una diferencia: $\mathbf{(a + b)}$ y $\mathbf{(a - b)}$.

**EJEMPLOS:**

Encuentra la diferencia de cuadrados.

**a)** $(2x + 5y)(2x - 5y) = (2x)^2 - (5y)^2 = 4x^2 - 25y^2$

**b)** $\left(\frac{1}{4}a^3b - 3a^4\right)\left(\frac{1}{4}a^3b + 3a^4\right) = \left(\frac{1}{4}a^3b\right)^2 - (3a^4)^2 = \frac{1}{16}a^6b^2 - 9a^8$

**c)** $\left(0,2m + 0,1n^2\right)\left(0,2m - 0,1n^2\right) = \left(0,2m\right)^2 - \left(0,1n^2\right)^2 = 0,04m^2 - 0,01n^4$

Calcula $39 \cdot 41$
$= (40 - 1)(40 + 1) =$
$= 40^2 - 1^2 =$
$= 1600 - 1 = 1599$

**18** Calcula los productos.

**a.** $(4x - 7)(4x + 7)$ **b.** $(2a^5 + b^2)(2a^5 - b^2)$

**c.** $(\sqrt{2}x + 2)(\sqrt{2}x - 2)$ **d.** $\left(\frac{3}{2}x^n - 5\right)\left(5 + \frac{3}{2}x^n\right)$

**19** Calcula el valor numérico de las expresiones.

**a.** $(\sqrt{8} + \sqrt{5})(\sqrt{8} - \sqrt{5})$

**b.** $\sqrt{5(\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2})}$

**c.** $\sqrt{(\sqrt{13} + 2\sqrt{2})(\sqrt{13} - 2\sqrt{2}) - 4}$

**20** Resuelve mediante cálculos mentales.

**a.** $98 \cdot 102 =$ ............. **b.** $18 \cdot 22 =$ .............

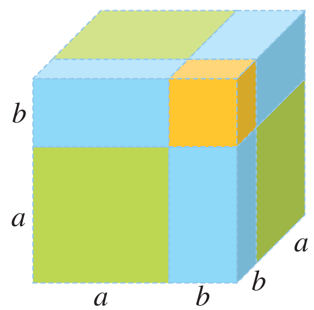
**c.** $170 \cdot 230 =$ ............. **d.** $997 \cdot 1003 =$ .............

**21** Simplifica las siguientes expresiones:

**a.** $(\sqrt{3}x + 2)(\sqrt{3}x - 2) + x^2$

**b.** $(a + 2)(a - 2) - (a + 1)(a - 1) + (a + 3)(a - 3)$

# Cubo de un binomio



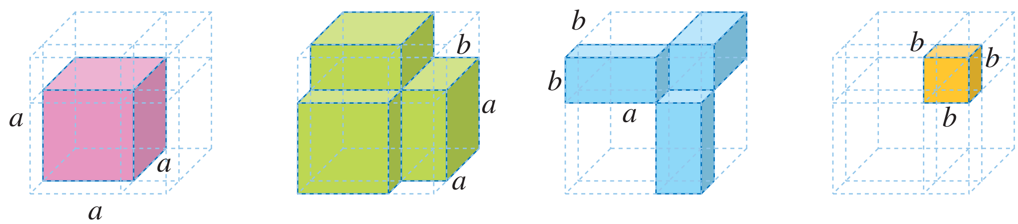

Expresa algebraicamente el volumen de un cubo de arista $a + b$.

1.ª FORMA Elevamos la arista al cubo:

$$\begin{aligned}\text{Volumen} &= (a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)^2\\ &= (a+b)\cdot(a^2+2ab+b^2)\\ &= a\cdot(a^2+2ab+b^2) + b\cdot(a^2+2ab+b^2)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

◀ Aplicamos la propiedad distributiva.

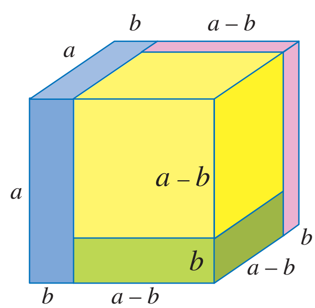
2.ª FORMA Sumamos los volúmenes de los prismas que forman el cubo:




$a^3$ $3a^2b$ $3ab^2$ $b^3$

En ambos casos obtenemos: $\mathbf{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

El **cubo de un binomio** es igual al cubo del primer término, más el triple del producto del cuadrado del primer término por el segundo, más el tripe del producto del primer término por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término.




Volumen total del cubo: $a^3$

Volumen del prisma azul: $a^2b$

Volumen del prisma rosado: $ab(a-b) = a^2b - ab^2$

Volumen del prisma verde: $b(a-b)^2 = b(a^2-2ab+b^2) = a^2b - 2ab^2 + b^3$

**EJEMPLO:**

Expresa el volumen del cubo amarillo, de arista $a - b$. Luego, evalúalo para $b = 4$.

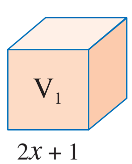
- Restamos al volumen total los volúmenes de los prismas azul, rosado y verde.

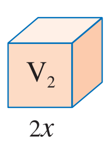
  Volumen amarillo $= (a-b)^3 = a^3 - (a^2b + a^2b - ab^2 + a^2b - 2ab^2 + b^3)$

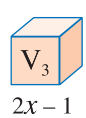
  $$\mathbf{= (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

- Si b = 4, entonces: $(a-4)^3 = a^3 - 3a^2\cdot 4 + 3a\cdot 4^2 - 4^3 = a^3 - 12a^2 + 48a - 64$

**22** ¿Cómo expresas el volumen de cada cubo?




**23** Calcula los siguientes binomios al cubo.

**a.** $(6m^4 + m)^3$ **b.** $(2a^2b^3c + 3)^3$

**c.** $(0{,}5x^4 - 2y^2)^3$ **d.** $\left(\frac{2}{3}a^5 - 3b^4\right)^3$

# Factorización de polinomios

Hay veces en las que conviene expresar un polinomio como producto de dos o más **polinomios primos**. En esos casos, decimos que el polinomio original está **factorizado** si queda escrito como el producto entre su coeficiente principal y polinomios primos que sean **mónicos** (o sea, con sus coeficientes principales iguales a 1).

La suma de los grados de esos polinomios primos debe dar el grado del polinomio original. Por ejemplo, un polinomio de grado 3 podría ser el producto de uno de grado 1 con otro de grado 2.

Las diferentes expresiones que hemos visto –como el factor común, el cuadrado y el cubo del binomio o la diferencia de cuadrados– serán muy útiles al momento de factorizar un polinomio.

**EJEMPLO:**

Factoriza el polinomio $P(x) = 3x^5 - 12\,x^3$.

- Lo primero que buscamos son factores comunes.
- Observamos que tanto 3 como $x^3$ son factores en todos los términos:
  $P(x) = 3x^5 - 12\,x^3 = 3x^3 \cdot x^2 - 4 \cdot 3x^3 = 3x^3 \cdot (x^2 - 4)$
- Notemos ahora que $3x^3$ es un monomio, mientras que $(x^2 - 4)$ tiene estructura de diferencia de cuadrados: $(x^2 - 2^2)$. Entonces, podemos factorizar este último usando binomios conjugados:
  $(x^2 - 4) = (x - 2)(x + 2)$
- Juntando todos los resultados, escribimos la factorización de $P(x)$:
  $P(x) = 3x^3(x - 2)(x + 2)$

**EJEMPLO:**

Expresa el polinomio $Q(x) = 4x^2 + 20x + 25$ de forma factorizada.

- Observamos que no hay factores comunes.
- Tampoco se puede separar el polinomio en partes con igual cantidad de términos, por lo que no es posible hacer factor común por grupos.
- Por tener tres términos, evaluamos la posibilidad de que $Q(x)$ sea un trinomio cuadrado perfecto, o sea, de la forma $a^2 + 2ab + b^2$. En ese caso, su factorización será un binomio al cuadrado: $(a + b)^2$.
- Para ello, buscamos dos términos de $Q(x)$ que sean cuadrados. Podrían ser $4x^2$ y 25, ya que $4x^2 = (2x)^2$ y $25 = 5^2$. Entonces, $2x$ y 5 serían los términos de ese posible binomio que se eleva al cuadrado.
- Hacemos el cuadrado de ese posible binomio, para ver que obtendríamos:
  $(2x + 5)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25$
- El resultado coincide con $Q(x)$. Entonces, $Q(x) = (2x + 5)^2$
- Observemos que ya hemos encontrado todos los polinomios primos en los que $Q(x)$ puede descomponerse: $(2x + 5)^2 = (2x + 5)\,(2x + 5)$. Solo resta extraer cada factor 2 para escribir su factorización: $Q(x) = 4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2$

**Polinomios primos**

Un polinomio de grado mayor o igual que 1 es primo si no se lo puede escribir como producto de polinomios de grado menor. Solo son primos los polinomios de grado 1 y de grado par sin raíces reales.

Por ejemplo, $P(x)$ y $Q(x)$ son primos:

$P(x) = 3x - 2$

$Q(x) = 7x^4 + 1$

Si un polinomio está factorizado, se pueden detectar sus raíces reales a simple vista, ya que son los valores que anulan cada factor.

$P(x) = 5x^4 - 5x^3 - 210x^2$

En su factorización se observan sus raíces:

$P(x) = 5x^2\,(x - 7)\,(x + 6)$

Raíces de $P(x)$: 0, 7 y –6.

**Trinomio cuadrado perfecto**

Es una expresión de la forma $\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2}$.

O sea, el resultado de elevar un **binomio al cuadrado**. Por ejemplo: $x^2 - 8x + 16$, que es el resultado de $(x - 4)^2$.

**Cuatrinomio cubo perfecto**

Es una expresión del tipo $\boldsymbol{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$.

Es decir, el resultado de elevar un **binomio al cubo**. Por ejemplo:

$x^3 + 12x^2 + 48x + 64$, que es el resultado de $(x + 4)^3$.

# Teorema de Gauss

Si $a$ es una raíz del polinomio $P(x)$, entonces **$(x - a)$ es un divisor** o **factor de $P(x)$**.

Por lo tanto, conocer las raíces de un polinomio es muy valioso para poder factorizarlo, ya que sus raíces nos indican los divisores o factores del polinomio.

Justamente, el teorema de Gauss se utiliza para averiguar raíces de polinomios.

Dado un polinomio $P(x) = a_n x^n + ... + a_0$, con coeficientes enteros y $a_0 \neq 0$, el **teorema de Gauss** afirma que si una fracción irreducible $p/q$ es raíz de $P(x)$, se cumple que $p$ es divisor del término independiente $a_0$ y $q$ es divisor del coeficiente principal $a_n$.

En particular, si $P(x)$ es **mónico** (o sea, $a_n = 1$), entonces $q = \pm 1$ y esas posibles raíces racionales serán enteras.

Un polinomio de grado $n$ tiene, a lo sumo, $n$ raíces reales.

Si un polinomio $P(x)$ tiene una raíz $x_1$, entonces es **divisible** por $(x - x_1)$ y puede escribirse como:
$P(x) = (x - x_1) \cdot Q(x)$

A la vez, si $Q(x)$ tiene una raíz $x_2$, entonces será:
$Q(x) = (x - x_2) \cdot S(x)$

Es decir, $x_2$ también será raíz de $P(x)$ pues:
$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot S(x)$

Y así sucesivamente.

En última instancia, la factorización de $P(x)$ será:
$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)...$

Donde $a$ es su coeficiente principal y los otros factores son polinomios mónicos de grado 1 o de grado par sin raíces reales.

**EJEMPLO:**

Se sabe que el polinomio $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$ tiene, al menos, una raíz racional. Encuéntrala y factoriza $P(x)$.

- Podemos aplicar el teorema de Gauss ya que todos los coeficientes de $P(x)$ son enteros. En particular, $a_n = 2$ y $a_0 = -6$.
- Los divisores $(q)$ de $a_n$ son $\pm 1$ y $\pm 2$.
  Los divisores $(p)$ de $a_0$ son $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 3$ y $\pm 6$.
- Armamos las posible raíces racionales $p/q$ de $P(x)$:
  $\pm 1;\ \pm \frac{1}{2};\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm \frac{3}{2}$ y $\pm 6$.
- Especializamos esos $p/q$ en $P(x)$, hasta hallar uno que lo anule:

  $P(1) = 2 \cdot 1^3 - 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 2 \neq 0$

  $P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 1 = -6 \neq 0$

  $P(\frac{1}{2}) = 2 \cdot (\frac{1}{2})^3 - (\frac{1}{2})^2 + 2 \cdot (\frac{1}{2}) - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ es raíz de $P(x)$.
- Como $P(x) = (x - \frac{1}{2}) \cdot Q(x)$, calculamos $P(x) \div (x - \frac{1}{2})$ para hallar $Q(x)$:

$$\begin{array}{c|ccc:c} & 2 & -11 & 17 & -6 \\ \frac{1}{2} & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 2 & -10 & 12 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad Q(x) = 2x^2 - 10x + 12$$

- Para factorizar $Q(x)$ podemos hallar sus raíces:

$$2x^2 - 10x + 12 = 0 \rightarrow \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} \rightarrow x = 2\ ;\ x = 3$$

- La factorización de $Q(x)$ será de la forma $a(x - x_1)(x - x_2)$:
  $Q(x) = 2(x - 2)(x - 3)$
- Finalmente, la factorización de $P(x)$ es:
  $P(x) = 2(x - \frac{1}{2})(x - 2)(x - 3)$

**24** Expresa como producto.

**a.** Empleando factor común.

$P(x) = 8x^4 + 16x^3 + 4x$

$Q(x) = –3x^5 + 18x^2 – 9x$

**b.** Empleando factor común por grupos.

$P(x) = x^4 + 2x^3 + 4x + 8$

$Q(x) = 3x^5 – 2x^2 + 9x^3 – 6$

**c.** Empleando diferencia de cuadrados.

$P(x) = 25x^2 – 81$

$Q(x) = 64x^6 – 1$

**d.** Empleando trinomio cuadrado perfecto.

$P(x) = x^2 – 24x + 144$

$Q(x) = 9x^2 + 24x + 16$

**e.** Empleando cuatrinomio cubo perfecto.

$P(x) = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$

$Q(x) = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

**f.** Empleando la fórmula resolvente.

$P(x) = 2x^2 – 22x + 60$

$Q(x) = –4x^2 – 4x + 8$

**25** Factoriza completamente cada polinomio, de modo que quede de la forma $P(x) = a(x – x_1)(x – x_2)...$, siendo $a$ el coeficiente principal de $P(x)$ y $x_1, x_2,...$, sus raíces reales.

**a.** $P(x) = 2x^4 – 72x^2$

**b.** $P(x) = –x^3 – 3x^2 + x + 3$

**c.** $P(x) = –5x^3 + 25x^2 + 70x$

**d.** $P(x) = x^4 – 625$

**e.** $P(x) = 3x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 3x$

**EJEMPLO:**

Si $n$ es impar, se puede usar el método de Ruffini para factorizar binomios de la forma $x^n \pm a^n$:

$x^n – a^n = (x – a)(x^{n–1} + a^1x^{n–2} + a^2x^{n–3} + ... + a^{n–1})$

$x^n + a^n = (x + a)(x^{n–1} – a^1x^{n–2} + a^2x^{n–3} – ... + a^{n–1})$

En base a lo anterior, factoriza $x^5 – 32$ y $x^5 + 32$.

- $x^5 – 2^5 = (x – 2)(x^4 + 2x^3 + 2^2x^2 + 2^3x^1 + 2^4) =$
  $= (x – 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$
- $x^5 + 2^5 = (x + 2)(x^4 – 2x^3 + 2^2x^2 – 2^3x^1 + 2^4) =$
  $= (x + 2)(x^4 – 2x^3 + 4x^2 – 8x + 16)$



**26** Factoriza $P(x) = x^3 + 64$ y $Q(x) = x^7 – 1$.

**27** Cada uno de los siguientes polinomios tiene tantas raíces racionales como indica su grado. Hállalas usando el teorema de Gauss.

**a.** $P(x) = x^3 – 2x^2 – 5x + 6$

**b.** $P(x) = x^3 – 31x – 30$

**c.** $P(x) = 3x^3 – 7x^2 – 22x + 8$

**d.** $P(x) = 2x^4 – 4x^3 – 26x^2 + 28x + 48$

**28** Factoriza los polinomios de la actividad anterior.

**29** Factoriza $P(x) = 20x^5 – 4x^4 – 17x^3 – 3x^2 + 3x + 1$. Recuerda que podría tener tantas raíces racionales como su grado, o menos.

**30** Interpreta los siguientes esquemas y escribe los polinomios dividendo, divisor, cociente y resto.

**a.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | –2 | 4 | –3 |
| –2 | | –2 | 8 | –24 |
| | 1 | –4 | 12 | –27 |

**b.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | –3 | 1 | 0 | –4 | 0 |
| 1 | | –3 | –2 | –2 | –6 |
| | –3 | –2 | –2 | –6 | –6 |

**31** Considera los polinomios de la actividad anterior.

**a.** En cada caso, observa el esquema e indica si el divisor o el cociente son factores del dividendo. Justifica tu respuesta.

**b.** Conociendo dividendo y divisor, ¿podrías haber conseguido las respuestas del ítem **a** sin tener esos esquemas? ¿Por qué?

**32** Los coeficientes del siguiente esquema son enteros.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |
| $f$ | | $g$ | $h$ | $i$ | –6 |
| | $a$ | $j$ | $k$ | $l$ | |

**a.** ¿De qué grado es el polinomio dividendo?

**b.** ¿De qué grado es el polinomio cociente?

**c.** ¿Cómo son los coeficientes principales del dividendo y el cociente?

**d.** Si la división es exacta, ¿cuáles son los posibles valores de los términos independientes del divisor y del cociente?

**33** Observa el siguiente esquema.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | –3 | 3 | –1 |
| 1 | | | | |
| | 1 | –2 | 1 | 0 |
| 1 | | | | |
| | 1 | –1 | 0 | |

**a.** Indica si corresponde a la factorización de alguno de estos polinomios: $x^2 + 1$, $x^2 – 1$, $x^3 + 1$, $x^3 – 1$, $(x + 1)^2$, $(x – 1)^2$, $(x + 1)^3$ o $(x – 1)^3$.

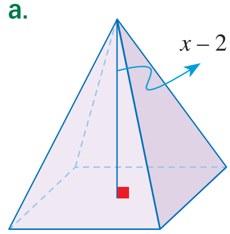
**b.** Escribe la factorización correspondiente.

**34** Completa el cuadro.

| × | | $3a + 2$ |
|---|---|---|
| $a + 7$ | $2a^2 + 11a – 21$ | |
| | $8a^2 – 14a + 3$ | $12a^2 + 5a – 2$ |

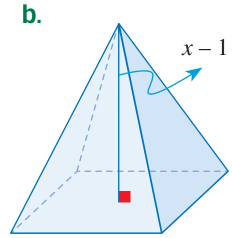
**35** El volumen de cada pirámide es el indicado debajo. Halla el polinomio que representa el área de cada base y, de ser posible, factorízalo.

**a.**




$V = \frac{1}{3}(x^3 – 8)$

**b.**




$V = \frac{1}{3}(x^3 – 1)$

**36** Completa las tablas.

**a.**

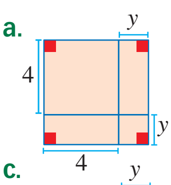
| × | $(3x – 5y^2)$ | $(3x + 5y^2)$ |
|---|---|---|
| $(3x + 5y^2)$ | | |
| $(5y^2 – 3x)$ | | |

**b.**

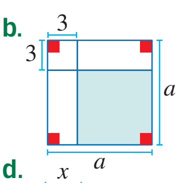
| × | $(x – 7)^2$ | $(x^2 + 7x + 49)$ |
|---|---|---|
| $(x – 7)$ | | |

**37** Expresa el área de cada región coloreada. Hazlo en forma factorizada y también desarrollada.

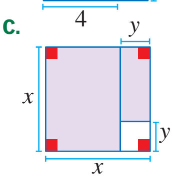
**a.**



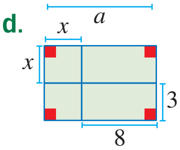

**b.**



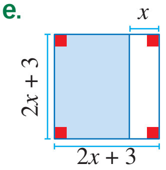

**c.**



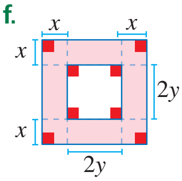

**d.**



e.




f.




**38** Evalúa las siguientes igualdades como verdaderas o falsas:

a. $(6^n + 3)(6^n - 3) = 36^{2n} - 9$

b. $(x + 3)(x - 2) = x^2 + x - 6$

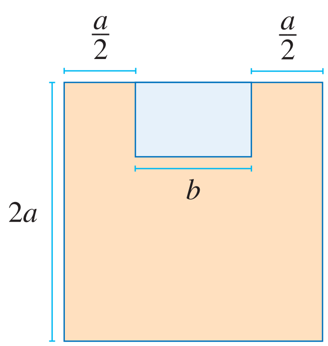
c. $(x + y)^3(x - y)^3 = x^6 - y^6$

d. $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = x^3 - 27$

e. $(x^n + x^{-n})^2 - (x^n + x^{-n})^2 = 2x^{2n}$

f. $(a + 2b)^2 = a^2 + 4b^2$

**39** Ruth compró un terreno cuadrado y quiere construir en él una casa rectangular, tal como se muestra en la figura. ¿Qué expresión algebraica representa el área que no ocupará la casa?




**40** Calcula los siguientes productos:

a. $(2x - 8)(2x + 8)$

b. $(3a^5 + 5)(3a^5 - 5)$

c. $(\sqrt{3}x + 1)(\sqrt{3}x - 1)$

d. $\left(\frac{1}{2}x^{2n} - 4\right)\left(\frac{1}{2}x^{2n} + 4\right)$

**41** Relaciona las expresiones equivalentes.

| | | |
|---|---|---|
| a. | $x^2 + 3x - 18$ | $(x + 6)(x + 3)$ |
| b. | $x^2 - 3x - 18$ | $(x - 6)(x + 3)$ |
| c. | $x^4 + 3x^2 - 18$ | $(x - 6)(x - 3)$ |
| d. | $x^2 + 9x + 18$ | $(x + 6)(x - 3)$ |
| e. | $x^2 - 9x + 18$ | $(x^2 + 6)(x^2 - 3)$ |

**42** Determina el valor de $a$ y $b$ en cada caso.

a. $x^2 + 5x - 14 = (x + a)(x + b)$

b. $x^2 - 4x - 32 = (x + a)(x + b)$

c. $x^2 - 10x + 9 = (x + a)(x + b)$

d. $x^2 + 3x - 40 = (x + a)(x + b)$

**43** Calcula el valor numérico de cada expresión sin usar calculadora.

a. $3 + (4\sqrt{3} + \sqrt{11})(4\sqrt{3} - \sqrt{11})$

b. $82 - (12 - \sqrt{91})(12 + \sqrt{91})$

c. $\sqrt[32]{1 + (9^8 - 1)(9^8 + 1)}$

**44** Reduce las siguientes expresiones:

a. $(y + 3)^3 + (y - 3)^3 - 54y$

b. $(2m + 1)^3 - (2m + 3)(2m - 3) - (2m + 4)^2$

c. $[(x + y)^3 - (x - y)^3] \div 2y$

**45** Analiza y realiza lo que se indica.

a. Si $a + b = \sqrt[3]{2}$ y, además, $ab = \sqrt[3]{4}$, calcula el valor de $a^3 + b^3$.

b. Si $x + y = 4$ y $xy = 3$, calcula $x^2 + y^2$.

c. Simplifica $[(m + n)^3 + (m - n)^3] \div (m^2 + 3n^2)$.

d. Reduce $\sqrt[3]{(x + 3)^3 - 9(x + 1)(x + 2) - 9}$.

e. Simplifica $(x - 5)^3 + (x + 5)^3 - 150x$.

f. Si $a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}} = 2$ y $ab = 1$, halla $a^3 - b^3$

**46** Resuelve los problemas.

a. El producto de dos números es 65 y la suma de sus cuadrados es 194. Calcula el cuadradro de la suma.

b. La suma de los cuadrados de dos números enteros es 159. Si el doble del producto de dichos números es 110, ¿cuál es la diferencia entre ellos?

c. La suma de los cuadrados de las edades de Víctor y Mayra es 130. Si el producto de sus edades es 63, ¿cuál es la suma de sus edades?

**47** Calcula.

**a.** $(a-1)(a+2)+(a-3)(a+6)-2(a+1)^2$

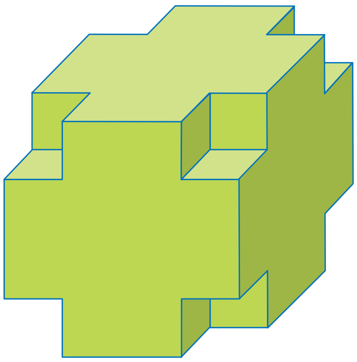
**b.** $\left(4x^3+\frac{1}{3}\right)^2-\left(4x^3-\frac{1}{3}\right)^2$

**c.** $(x^a+y^b)(x^a-y^b)(x^{2a}+y^{2b})-(x^{2a}-y^{2b})^2$

**d.** $[xy(x-3y)-x^2-3x]\div(y-1)$

**e.** $[(x+y)^3+(x-y)^3]\div 2x$

**48** De un cubo de arista $(2x+2)$ se corta en cada esquina un cubo pequeño de arista $x-2$. Escribe el polinomio que representa el volumen del sólido resultante y factorízalo.



**49** Relaciona convenientemente.

| | |
|---|---|
| **a.** $(2-3n)(4-12n+9n^2)$ | $(2+3n)^3$ |
| **b.** $(3-2n)(9-12n+4n^2)$ | $(3+2n)^3$ |
| **c.** $(2+3n)(4+12n+9n^2)$ | $(2-3n)^3$ |
| **d.** $(3+2n)(9+12n+4n^2)$ | $(3-2n)^3$ |

**50** Completa para obtener la factorización de cada polinomio.

**a.** $(4a+1)(\boxed{\phantom{x}}-4a+1)=64a^3+\boxed{\phantom{x}}$

**b.** $(\boxed{\phantom{x}}-\boxed{\phantom{x}})(25m^2+\boxed{\phantom{x}}+n^2)=125m^3-n^3$

**c.** $(3x+\boxed{\phantom{x}})(9x^2-6xy+\boxed{\phantom{x}})=27x^3+8y^3$

**d.** $(\boxed{\phantom{x}}-y^3)(\boxed{\phantom{x}}+x^2y^3+\boxed{\phantom{x}})=x^6-\boxed{\phantom{x}}$

**51** Desarrolla los siguientes productos aplicando la propiedad distributiva:

**a.** $(2x+y)(4x^2-4xy+y^2)$

**b.** $(3xy^2+4)(9x^2y^4+24xy^2+16)$

**c.** $(\sqrt[3]{6}x+x^2)(\sqrt[3]{36}x^2+\sqrt[3]{6}x^3+x^4)$

**52** Factoriza y simplifica las siguientes expresiones:

**a.** $(x+6)(x-4)-(x+6)(x-2)+3(x+6)$

**b.** $[(x+3)(x^2-3x-28)]\div[(x-7)(x+4)]$

**c.** $(x^{m+n}+3)(x^{2n}-9)-(x^{2n}-9)(x^{m+n}-1)$

**53** **a.** Halla las raíces racionales de los siguientes polinomios:

**i)** $P(x)=x^3-3x^2-13x+15$

**ii)** $P(x)=3x^3-10x^2-27x+10$

**iii)** $P(x)=4x^4+34x^3+44x^2+14x$

**iv)** $P(x)=x^4+10x^3+35x^2+50x+24$

**v)** $P(x)=6x^4+19x^3-x^2-11x+3$

**vi)** $P(x)=-2x^5+6x^4+46x^3-102x^2-188x+240$

**b.** Factoriza los polinomios del ítem **a**.

**54** Factoriza los siguientes polinomios.

**i)** $P(x)=4x^3+36x^2-4x-36$

**ii)** $P(x)=x^3+3x^2-9x-27$

**iii)** $P(x)=2x^4-162$

**iv)** $P(x)=x^4-40x^2+144$

**v)** $P(x)=-2x^4-8x^3+32x+32$

**vi)** $P(x)=x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1$

**55** Factoriza el siguiente polinomio:

$P(x)=(x-1)x^2+(x-1)x+(x-1)$

**56** ¿Por qué el polinomio $3x^2+x+1$ no puede ser factorizado?

**57** Si $x+y=5$ y $x^3+y^3=65$, factoriza $x^3+y^3$ e indica cuál es el valor de $x^2-xy+y^2$.

## Precio e ingresos

**58** El ingreso $I$ que percibe una empresa está en función de la cantidad $x$ de productos vendidos y el precio unitario $p$ de estos, según la fórmula $I = p \cdot x$. Entonces, si se pretende maximizar el ingreso, habrá que vender muchos artículos a un precio alto. Pero esto último suele atentar contra la propia venta, ya que los clientes podrían desistir de la compra. Por lo tanto, la idea es disminuir el precio de forma que resulte atractivo y genere un aumento de las ventas, pero sin que esa disminución del precio termine licuando el ingreso.

**a.** La empresa evalúa que una estimación apropiada del precio unitario $p$ puede calcularse en función de la cantidad $x$ de artículos a vender, según la fórmula:

$$p = 49 - 0{,}0001 \cdot x^2$$

Calcula el precio unitario si se proyectaran vender 100 unidades. ¿Y si fueran 500 unidades?

**b.** Factoriza el polinomio del precio unitario y usa esa factorización para averiguar los valores de $x$ para los que se anula $p$. ¿Todos esos valores tienen sentido? ¿Por qué?

**c.** Escribe la factorización del polinomio que representa el ingreso en función de $x$.

**d.** ¿Para qué valores de $x$ el ingreso sería nulo? ¿Todos esos valores tienen sentido?

## Construcción

**59** La zona de estacionamiento de un aeropuerto es de forma rectangular y mide 50 m de ancho por 80 m de largo. Los ingenieros desean incrementar esa área para lo cual planean agregar una longitud igual, en metros, al largo y ancho originales.

**a.** Expresa con un polinomio A($x$) factorizado el valor de la nueva área, en función de los $x$ metros que se agreguen al largo y ancho originales.

**b.** Utiliza la propiedad distributiva y desarrolla el polinomio A($x$) del ítem anterior. ¿Cuál es su grado?

**c.** Utiliza el polinomio del ítem **b** para averiguar cuántos metros deberían agregarse para que el área del estacionamiento llegue a los 18.000 $m^2$.

## Energía solar

**60** Para sostener un colector solar se diseñan los soportes con forma de triángulos rectángulos. La viga que sostiene el colector es 7 m más corta que la viga opuesta perpendicular a ella. La hipotenusa, apoyada en el techo, mide 13 m de largo. Aplicando el teorema de Pitágoras y factorizando, se llega a la ecuación $2(x + 5)(x - 12) = 0$, donde $x$ representa el largo de una viga. ¿Cuáles son las longitudes de las vigas?

# AUTOEVALUACIÓN

## Construir una caja

Para hacer una caja se utiliza una plancha rectangular de cartón. En cada esquina de la plancha se corta un cuadrado de 2 cm de lado y, luego, los bordes se doblan hacia arriba a fin de que se forme una caja abierta. La pieza original de cartón mide el doble de largo que de ancho y el volumen de la caja es de 672 $cm^3$.

1. Realiza un esquema de la plancha de cartón, marcando los futuros dobleces y cortes con líneas punteadas. Agrega las dimensiones al esquema, usando $x$ (o algún múltiplo) para expresar las longitudes desconocidas.

2. A partir de las dimensiones del esquema anterior, expresa el volumen de la caja como un polinomio $V(x)$, que esté factorizado como el producto entre su coeficiente principal y polinomios de grado 1.
¿De qué grado es $V(x)$?

3. Dado que $V(x) = 672$, compara la factorización de $V(x)$ con la del número $672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$.
Si se sabe que las longitudes de esta caja son números enteros, expresa 672 como diferentes productos de tres números y compáralos con los tres factores de $V(x)$ para hallar el valor de $x$.

4. Desarrolla el polinomio $V(x)$ aplicando la propiedad distributiva. Luego resuelve la ecuación cuadrática que se genera a partir de plantear:
$V(x) = 672 \Rightarrow V(x) - 672 = 0$
Compara con los $x$ obtenidos en el ítem anterior.

5. A partir de las soluciones obtenidas en el ítem 4, factoriza el polinomio $W(x) = V(x) - 672$ usando el método de Ruffini.

# 6 Ecuaciones e inecuaciones. Sistemas

## MATEMUNDO

### Alimentos y nutrición

El consumo de frutas y verduras aporta una gran parte de las vitaminas y minerales que requiere nuestro organismo. Sin embargo, estos no son los únicos nutrientes que necesita una persona saludable.

Analicemos el caso de un nutricionista que prepara una dieta que consta de los alimentos A y B. Cada 100 g del alimento A contiene 20 g de proteínas y 40 g de carbohidratos; cada 100 g del alimento B contiene 10 g de proteínas y 50 g de carbohidratos.

En promedio, un adolescente activo necesita diariamente 120 g de proteínas y 300 g de carbohidratos.

- Prueba diferentes cantidades de alimento A y B para ver si satisfacen ese requerimiento diario. Por ejemplo, 200 g de A y 300 g de B, u otras combinaciones.
- Si se aconseja una ingesta diaria de medio kilogramo del alimento A, ¿qué cantidad del B necesitaría entonces un adolescente activo?

## ESTO YA LO SABÍA...

**1** Conecta cada valor de $x$ con la ecuación o la inecuación donde el resultado es verdadero.

| | |
|---|---|
| $x = 4$ | $16 \div 2 = 4x + 8$ |
| $x = 0$ | $2x + 3 < 5$ |
| $x = -1$ | $(x - 1)(x + 1) > 0$ |

**2** Indica cuáles de los siguientes valores de $x$ no satisfacen la ecuación $-x^2 - 3x + 4 = 0$.

**a.** $x = -4$ **b.** $x = -1$ **c.** $x = 1$ **d.** $x = 4$

## Busco en la web

Digita en algún buscador (Firefox, Chrome, etc.) lo siguiente:

sistemas de ecuaciones

Así obtendrás más información sobre cómo llegar a una solución en un problema de varias incógnitas.

# Ecuaciones e inecuaciones

## Ecuaciones en la recta y en el plano

Una **ecuación** es una igualdad donde aparecen uno o más valores desconocidos, llamados **incógnitas**, que se designan mediante letras ($x$, $y$, $z$, ...).
**Resolver la ecuación** es hallar el o los valores de esa/s incógnita/s que satisface/n la igualdad. A esos valores los llamamos **soluciones**.
Una ecuación puede tener una solución, más de una o ninguna.

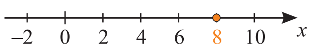
Las soluciones de las ecuaciones con una incógnita se pueden representar en la recta numérica. También puede trabajarse con dos variables y obtener una solución en la que solo aparezca una de ellas; en ese caso, la solución se representa en el plano cartesiano.

**EJEMPLOS:**

Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones.

**a)** $3x + 6 = 5x - 10$

- Ubicamos en el mismo miembro los términos con $x$, y operamos:
  $3x - 5x = -10 - 6 \Rightarrow -2x = -16$
- Finalizamos el despeje de $x$:
  $x = -16 \div (-2) \Rightarrow x = 8$ → Hay una única solución.

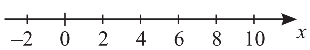



**b)** $3x + 6 = 3 \cdot (2 + x)$

- Aplicamos la propiedad distributiva y operamos:
  $3x + 6 = 6 + 3x \Rightarrow 3x - 3x = 6 - 6 \Rightarrow 0x = 0$
- Cualquier valor de $x$ multiplicado por 0 da 0. Es decir, todos los números reales son solución de esta ecuación. → Hay infinitas soluciones.


**c)** $3x + 5 = 3 \cdot (2 + x)$

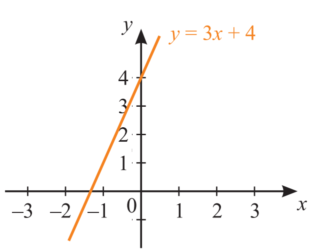
- Procedemos como en el ejemplo anterior:
  $3x + 5 = 6 + 3x \Rightarrow 3x - 3x = 6 - 5 \Rightarrow 0x = 1$
- No existe ningún valor de $x$ que multiplicado por 0 dé 1. Es decir, esta ecuación no tiene solución.




**EJEMPLO:**

Halla la solución de la ecuación $-x + 3y = 5x + y + 8$.

- Ubicamos cada incógnita en un miembro distinto y operamos:
  $3y - y = 5x + x + 8 \Rightarrow 2y = 6x + 8$
- Finalmente, despejamos una de las incógnitas:
  $y = (6x + 8) \div 2 \Rightarrow y = 3x + 4$ → Solución de la ecuación.
- Cada valor de $x$ genera un valor de $y$. Por ejemplo, $x = 0$ e $y = 4$ es una solución; $x = 1$ e $y = 7$ es otra; etc. Al no haber restricciones sobre $x$, habrá infinitas soluciones.



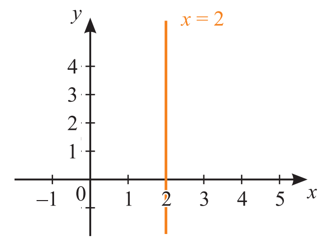
**EJEMPLO:**

Halla la solución representable en el plano de la ecuación $4x + 1 = 9$.

- Despejamos la única incógnita que aparece en la ecuación:

  $4x = 9 - 1 \;\Rightarrow\; x = 8 \div 4 \;\Rightarrow\; x = 2$

- Hay un único valor de $x$, sin restricciones sobre $y$. Así, $x = 2$ e $y = 0$ es una solución; $x = 2$ e $y = -5$ es otra; etcétera. Hay infinitas soluciones.




## Inecuaciones en la recta y en el plano

Una **inecuación** es una **desigualdad** donde aparecen una o más incógnitas. Es decir, los miembros se relacionan mediante algún tipo de desigualdad: $<$, $>$, $\leq$ o $\geq$.
Una inecuación suele tener infinitas soluciones, pero podría no tener ninguna.

**EJEMPLO:**

Encuentra la solución de la inecuación $3x + 6 \leq 5x - 10$.

- Agrupamos en un mismo miembro los términos con $x$ y operamos:

  $3x - 5x \leq -10 - 6 \;\Rightarrow\; -2x \leq -16$

- Como debemos dividir ambos miembros por un número negativo, cambia el sentido de la desigualdad:

  $-2x \div (-2) \geq -16 \div (-2) \;\Rightarrow\; x \geq 8 \;\Rightarrow\; S = [8; +\infty)$ → Hay infinitas soluciones.

Cuando haya que resolver una ecuación o inecuación con una incógnita, representaremos su solución en la recta. Si hubiera que hacerlo en el plano, se indicará en cada caso.

**EJEMPLOS:**

Halla las soluciones representables en el plano de estas inecuaciones.

**a)** $-x + 3y \geq 5x + y + 8$

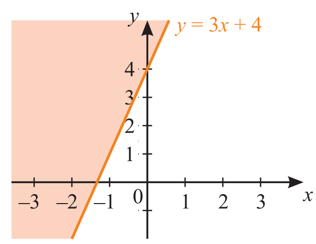
- Agrupamos cada incógnita en un miembro distinto y operamos:

  $3y - y \geq 5x + x + 8 \;\Rightarrow\; 2y \geq 6x + 8$

- Finalmente, despejamos una de las incógnitas:

  $y \geq (6x + 8) \div 2 \;\Rightarrow\; y \geq 3x + 4$ → Solución de la inecuación.

- Cada valor de x genera infinitos valores de $y$. Por ejemplo, para $x = 0$ es $y \geq 4$; para $x = 1$ es $y \geq 7$; etc. Gráficamente, la solución está representada por la región que comprende la recta $y = 3x + 4$ y los puntos del semiplano sombreado en el dibujo.
- Para hallar ese semiplano determinado por la recta $y = 3x + 4$, se toma un punto de esa región y se comprueba que verifique la inecuación.
- El sistema tiene infinitas soluciones.

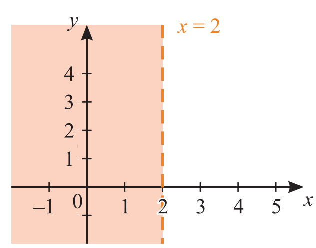



**b)** $4x + 1 < 9$

- Despejamos la única incógnita que aparece en la inecuación:

  $4x < 9 - 1 \;\Rightarrow\; x < 8 \div 4 \;\Rightarrow\; x < 2$ → Solución de la inecuación.

- Para cada $x < 2$ no hay restricciones sobre $y$. Gráficamente, la solución está representada por la región ubicada a la izquierda de la recta vertical $x = 2$.
- El sistema tiene infinitas soluciones.



**3** Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones. Grafica cada solución en tu carpeta.

**a.** $-2x + 3 = -x + 4$

**b.** $4(2x + 3) = -8x + 12$

**c.** $4x + 7 = 10 - 4x + 4$

**d.** $-(5 - 9x) = 6(3x + 3)$

**e.** $3(x + 8) = (5 - x) \div 2$

**f.** $(-2x + 8) \div 4 = (-x + 4) \div 2$

**4** Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones. Grafica cada solución en tu carpeta.

**a.** $-2x + 3 = -y + 4$

**b.** $-(x + y) = -5x + 2y$

**c.** $4x + 7 + y = 3y - 4x + 4$

**d.** $(y - 3x) \div 3 = -(x + 3y)$

**e.** $3(x + y) = 2 - (3y - x)$

**f.** $(-4x + y) = (2y - 8x) \div 2$

**5** Representa en el plano cada solución.

**a.** $-5(x + 3) = 10$ **b.** $4y + 32 = 6 \cdot 5 + 2y$

**6** Resuelve la ecuación $8x + 3 = -(2 - 5x)$.

**a.** Representa su solución en la recta.

**b.** Representa su solución en el plano.

**7** Encuentra las soluciones de las siguientes inecuaciones y grafica las soluciones.

**a.** $x + 3 > -x + 1$ **b.** $4(x - 1) < x + 11$

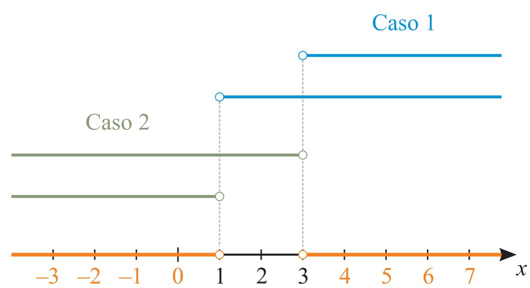
**c.** $4x + 1 \leq 2 - 4x + 3$ **d.** $-(2 - x) \geq 3(2x + 1)$

**e.** $-(2x - 5) < (5 - x)$ **f.** $-2x + 10 > 2(6 - x)$

**EJEMPLO:**

Halla la solución de $(x - 1)(x - 3) > 0$.

- Para que un producto de dos factores dé positivo, ambos deben tener el mismo signo. Hay dos casos.
- Caso 1: $(x - 1) > 0 \wedge (x - 3) > 0$.
  $x > 1 \wedge x > 3 \Rightarrow S_1 = (1; +\infty) \cap (3; +\infty) = (3; +\infty)$
- Caso 2: $(x - 1) < 0 \wedge (x - 3) < 0$.
  $x < 1 \wedge x < 3 \Rightarrow S_2 = (-\infty; 1) \cap (-\infty; 3) = (-\infty; 1)$
- La solución total es la unión de $S_1$ y $S_2$.
  $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$ → Infinitas soluciones.




**8** Halla y grafica la solución de $(x - 2)(x + 2) \leq 0$.

**9** Halla las soluciones de las siguientes inecuaciones y grafica las soluciones.

**a.** $-y + 5 \leq x + 4$

**b.** $-(x + y) > 8 + 2y$

**c.** $2x - 1 + y < 4y - x + 2$

**d.** $y - x \geq -(x + 4y) \div 4$

**e.** $-3(x + y) > 2 - (3y - x)$

**f.** $(-4x + y) \leq (2y - 8x) \div 2$

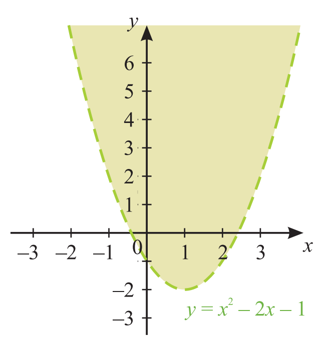
**10** ¿De cuál de las siguientes inecuaciones es solución la región coloreada en el gráfico?

**a.** $y \leq x^2 - 2x - 1$

**b.** $y < x^2 - 2x - 1$

**c.** $y > x^2 - 2x - 1$

**d.** $y \geq x^2 - 2x - 1$



# Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede expresarse de la forma:

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ Donde: $a_1$, $b_1$, $a_2$ y $b_2$ son los coeficientes de las ecuaciones.
$x$ e $y$ son las incógnitas.
$c_1$ y $c_2$ son los términos independientes.

El conjunto solución (S) del sistema es el par de valores $(x, y)$ que satisface simultáneamente las dos ecuaciones.

**Sistemas equivalentes**
Son los que tienen la misma solución.
Se puede obtener un sistema equivalente a otro multiplicando o dividiendo los miembros de cada ecuación por un número no nulo, y/o sumando o restando las ecuaciones entre sí.

**EJEMPLO:**

Halla la solución del sistema con el método de **reducción**. $\begin{cases} 3x - 2y = 26 & ① \\ 5x + 4y = 14 & ② \end{cases}$

- Para eliminar la variable $y$, multiplicamos por 2 la ecuación ① y sumamos las ecuaciones resultantes:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 26 \ (\times 2) \\ 5x + 4y = 14 \end{cases} \quad \blacktriangleright \quad \begin{array}{r} 6x - 4y = 52 \\ + \quad 5x + 4y = 14 \\ \hline 11x \qquad = 66 \end{array} \rightarrow x = 6$$

- Para calcular el valor de $y$, sustituimos el valor de $x$ en una de las ecuaciones:

En ②: $5x + 4y = 14 \rightarrow 5 \cdot 6 + 4y = 14 \rightarrow 4y = -16 \rightarrow y = -4$

Luego, la solución del sistema es: $S = \{(6; -4)\}$.

**Método de reducción**
Consiste en hacer opuestos (o iguales) los coeficientes de una de las incógnitas y sumar (o restar) las ecuaciones para eliminar esa incógnita.

**EJEMPLO:**

Encuentra la solución del sistema con el método de **sustitución**. $\begin{cases} 3x + y = 280 & ① \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 30 & ② \end{cases}$

- Despejamos $y$ en la ecuación ①: $y = 280 - 3x$
- Sustituimos en ② y resolvemos: $\frac{x}{2} - \frac{280 - 3x}{4} = 30 \rightarrow x = 80$
- Reemplazamos $x = 80$ en el despeje de ①: $y = 280 - 3 \cdot 80 \rightarrow y = 40$

La solución del sistema es: $S = \{(80; 40)\}$.

**Método de sustitución**
Consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir esta expresión en la otra ecuación.

**EJEMPLO:**

Averigua la solución del sistema con el método de **igualación**. $\begin{cases} 2x - y = 168 & ① \\ y + \frac{x}{5} = 96 & ② \end{cases}$

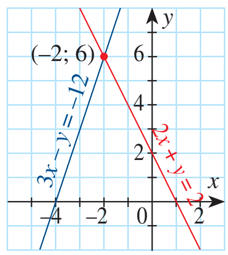
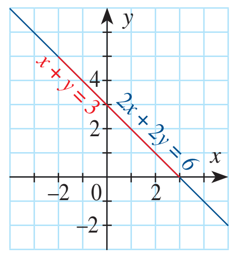
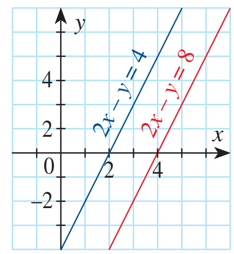
- Despejamos $y$ de ①: $y = 2x - 168$. Despejamos y de ②: $y = 96 - \frac{x}{5}$
- Igualamos y resolvemos: $2x - 168 = 96 - \frac{x}{5} \rightarrow x = 120$
- Reemplazamos $x = 120$ en uno de los despejes: $y = 2 \cdot 120 - 168 \rightarrow y = 72$

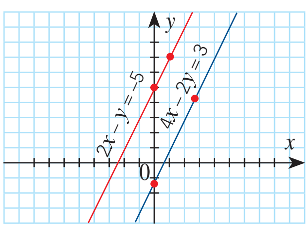
La solución del sistema es: $S = \{(120; 72)\}$.

**Método de igualación**
Consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar las expresiones obtenidas.

# Método gráfico

Este método consiste en hallar el punto de intersección de las dos rectas que representan a ambas ecuaciones. Según la posición de las rectas en el plano, podremos ver si el sistema tiene una solución, infinitas soluciones o ninguna solución.

<table>
<tr><th>Sistema compatible determinado</th><th>Sistema compatible indeterrminado</th><th>Sistema incompatible</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Tiene una única solución.<br>Las dos rectas se cortan en un punto. Ese punto es la solución del sistema.</td>
<td>Tiene infinitas soluciones.<br>Las dos rectas son coincidentes. Tienen infinitos puntos en común.</td>
<td>No tiene solución.<br>Las dos rectas son paralelas. No tienen puntos en común.</td>
</tr>
</table>




**EJEMPLO:**

Halla gráficamente la solución del sistema: $\begin{cases} 2x - y = -5 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$

- Despejamos $y$ en ambas ecuaciones y asignamos valores a $x$:

$2x - y = -5$
$y = 2x + 5$

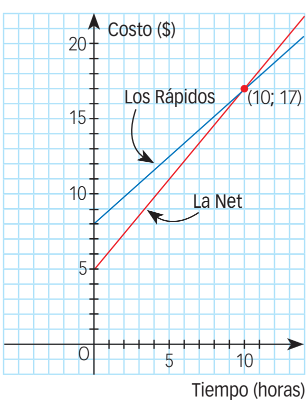
| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 5 |
| 1 | 7 |

$4x - 2y = 3$
$y = 2x - 1{,}5$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | -1,5 |
| 3 | 4,5 |

- Graficamos las rectas que representan ambas ecuaciones. Observamos que las rectas son paralelas, pues tienen igual pendiente. Pero tienen diferente ordenada al origen, así que no se intersecan en ningún punto.

El sistema no tiene solución, es decir, es un **sistema incompatible**.




**EJEMPLO:**

En el cibercafé Los Rápidos se cobra \$8 por inscripción y \$0,90 la hora de internet; mientras que en el cibercafé La Net se cobra \$5 la inscripción y \$1,20 la hora. Si un estudiante tiene que navegar 14 horas al mes, ¿qué opción le conviene?

- Planteamos las ecuaciones, donde $x$ representa las horas de navegación.

  Los Rápidos: $y_R = 0{,}9x + 8$ La Net: $y_N = 1{,}2x + 5$

- Graficamos ambas rectas en un mismo sistema cartesiano.
- Observamos que estas rectas se cortan en un punto; es decir, es un **sistema compatible determinado**, y en las primeras 10 horas conviene el cibercafé La Net, pero si hay que navegar más de eso (por ejemplo, 14 horas), es mejor elegir Los Rápidos.

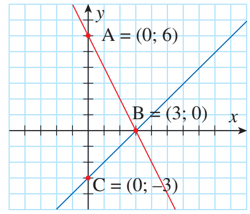
**11** Pedro compra dos USB y cinco CD por \$460 y Sandra compra ahí mismo cuatro USB y una docena de CD por \$960. ¿Cuánto cuesta un USB?

**12** En un estadio se venden las entradas de la tribuna popular a \$250 y las de la platea a \$1.200. En un partido se vendieron 8.000 boletos entre las tribunas popular y la platea, y se recaudaron \$3.900.000. ¿Cuántos boletos de cada tribuna se vendieron?

**13** Rosa cuenta en su corral que el doble del número de cabezas de los conejos más el triple que el de las gallinas es 280. Si la diferencia entre el número de patas de los conejos y las gallinas es 240, ¿cuántos animales hay en su corral?

**EJEMPLO:**

Construye el sistema de ecuaciones a partir del gráfico.




- Sabemos que dos puntos determinan una recta. Sea la ecuación de una recta: $y = mx + b$
- Hallamos la ecuación de la recta roja:

  A = (0; 6) $\longrightarrow$ $6 = m \cdot 0 + b$ $\longrightarrow$ $b = 6$

  B = (3; 0) $\longrightarrow$ $0 = m \cdot 3 + 6$ $\longrightarrow$ $m = -2$

  La ecuación de la recta es: $y = -2x + 6$.
- Hallamos la ecuación de la recta azul:

  C = (0; –3) $\longrightarrow$ $-3 = m \cdot 0 + b$ $\longrightarrow$ $b = -3$

  B = (3; 0) $\longrightarrow$ $0 = m \cdot 3 - 3$ $\longrightarrow$ $m = 1$

  La ecuación de la recta es: $y = x - 3$.
- Formamos el sistema: $\begin{cases} 2x + y = 6 & \text{Recta roja} \\ x - y = 3 & \text{Recta azul} \end{cases}$

**14** Observa el gráfico y responde.

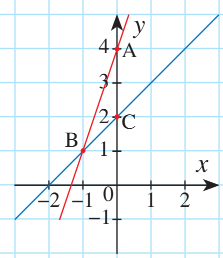


Figura 1

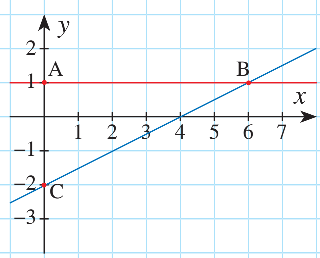


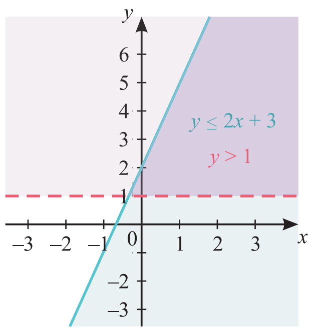
Figura 2

**a.** ¿Qué tipo de sistema forman las ecuaciones de las rectas de las figuras 1 y 2?

**b.** ¿Cuáles son los sistemas que forman las ecuaciones de cada par de rectas?

# Otros sistemas

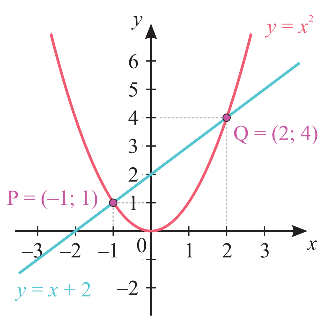
Es posible trabajar con un sistema de inecuaciones lineales, o con un sistema de ecuaciones e inecuaciones, sean estas lineales, cuadráticas, etc. En todos los casos, hallar la solución del sistema es hallar los valores de la/s incógnita/s que satisfacen todas sus ecuaciones y/o inecuaciones.




**EJEMPLO:**

Halla la solución del sistema de inecuaciones lineales $\begin{cases} -4x + 2y \leq 6 & ① \\ y > 1 & ② \end{cases}$

- Despejamos la incógnita $y$ en la inecuación ①:
  $-4x + 2y \leq 6 \;\Rightarrow\; 2y \leq 4x + 6 \;\Rightarrow\; y \leq (4x + 6) \div 2 \;\Rightarrow\; y \leq 2x + 3$
- Observamos que los valores de $y$ coinciden con los de la recta $y = 2x + 3$ o son menores. Es decir, se trata de la región que incluye esa recta y los puntos que están por debajo de ella.
- En la inecuación ② no está incluida la recta horizontal $y = 1$, por lo que se la representa con línea punteada.
- Como $y > 1$, se trata de la región que contiene los puntos que están por arriba de esa recta horizontal.
- La solución del sistema es la intersección de las dos regiones.




**EJEMPLO:**

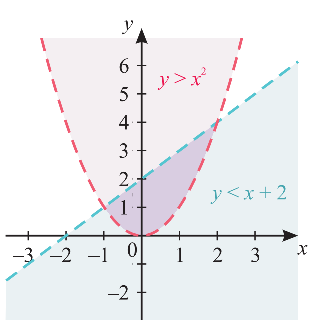
Encuentra la solución del sistema $\begin{cases} y = x^2 & ① \\ y = x + 2 & ② \end{cases}$

- Por haber solo ecuaciones, en este caso no se trata de hallar regiones.
- Igualamos las $y$ de ambas expresiones para hallar los puntos de intersección:

$$x^2 = x + 2 \;\Rightarrow\; x^2 - x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; x = -1 \wedge x = 2$$

Si $x = -1 \;\Rightarrow\; y = (-1)^2 = 1$
Si $x = 2 \;\Rightarrow\; y = 2^2 = 4$

- Las soluciones del sistema son los puntos P = (–1; 1) y Q = (2; 4).




**EJEMPLO:**

Averigua la solución del sistema $\begin{cases} y > x^2 & ① \\ y < x + 2 & ② \end{cases}$

- Al no haber igualdades, ambos polinomios se grafican con líneas punteadas.
- En la inecuación ①, se trata de la región que está comprendida entre las ramas de la parábola $y = x^2$.
- En la inecuación ②, se trata de la región que está por debajo de $y = x + 2$.
- La solución del sistema es la región comprendida entre la parábola y la recta.

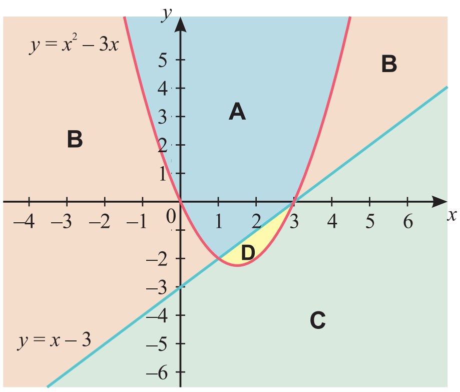
**15** Averigua la solución del sistema de inecuaciones. Grafica. $\begin{cases} -x + y \leq 2 \\ 4 \geq x + 2y \end{cases}$

**16** En cada caso despeja $y$ para encontrar la solución del sistema. Haz el gráfico y señala en él las soluciones. $\begin{cases} 4x = y + 1 \\ x^2 + y = 4 \end{cases}$

**17** Observa las diferentes regiones señaladas en el gráfico e indica de qué sistema es solución cada una.

☐ $\begin{cases} y > x^2 - 3x \\ y < x - 3 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} y < x^2 - 3x \\ y > x - 3 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} y > x^2 - 3x \\ y > x - 3 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} y < x^2 - 3x \\ y < x - 3 \end{cases}$






**18** Con relación a la actividad anterior, escribe un sistema cuya solución esté integrada únicamente por los puntos de intersección de la recta y la parábola.

**19** En un sistema de ejes cartesianos dibuja el rectángulo limitado por los ejes $x$ e $y$, la recta vertical $x = 5$ y la recta horizontal $y = 3$. Luego, escribe el sistema de inecuaciones cuya solución sea la región interior del rectángulo, sin su borde.

**20** Considera los polinomios $y = 3$ e $y = x^2$. Escribe un sistema que los utilice como ecuaciones o inecuaciones, de forma tal que la solución sea un segmento. Grafica la situación.

**21** Considera la función $P(x) = (x - 2)(x + 3)$. Plantea la inecuación que corresponda y halla su intervalo de negatividad.

**22** Halla todos los rectángulos de 18 cm de perímetro que tengan exactamente 20 $cm^2$ de área.

**23** Juan debe comprar CD y DVD para grabar audio y videos. Cada CD cuesta \$8 y cada DVD, \$10.

**a.** Si desea gastar exactamente \$120, ¿cuántos CD y DVD puede comprar? Recuerda que las cantidades de cada uno son enteras.

**b.** Si va a gastar exactamente \$120, ¿puede comprar el doble de CD que de DVD? ¿Por qué?

**c.** Si quisiera gastar entre \$50 y \$100, ¿qué cantidad de cada uno podría comprar?

**24** Considera la ecuación $ax + b = 0$, donde $a$ y $b$ son coeficientes. Determina un valor de $a$ y de $b$ de modo que la ecuación tenga:

**i)** Solución única.

**ii)** Infinitas soluciones.

**iii)** Ninguna solución.

**25** Representa gráficamente.

**a.** $A = \{x \,/\, x \in \mathbb{R};\ 3x + 1 \geq -4 - 2x\}$

**b.** $B = \{x \,/\, x \in \mathbb{R};\ 5x + 3 < -x - 1\}$

**26** Cuando sea necesario, multiplica la desigualdad por un número conveniente para simplificar los denominadores. Luego, halla su solución.

**a.** $3 - [2x + (x + 2)] < 2$ **b.** $\frac{x+2}{7} + \frac{x}{5} > 2$

**c.** $\frac{3x-1}{2} + \frac{x-3}{2} \leq 0$ **d.** $\frac{2x+1}{9} + \frac{x-3}{4} > \frac{1}{2}$

**27** ¿Cuántos valores enteros positivos verifican la inecuación $\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}(x - 2) + 2 < \frac{20}{3} - \frac{5}{2}(x - 1)$?

**28** Resuelve $(x + 2)(x - 4) \geq 0$ y representa gráficamente la solución.

**29** En cada caso, factoriza y resuelve las siguientes inecuaciones:

**a.** $x^2 - 4x + 4 > 0$ **b.** $x^2 + 4x - 5 \leq 0$

**c.** $2x^2 - 5x - 3 \geq 0$ **d.** $x^2 - 5x < 0$

**30** Resuelve la inecuación $x^2 - 8x \geq -16$.

**31** Claudia tiene que subir rollos de tela en un ascensor en el que se pueden cargar hasta 350 kg. ¿Cuál es el mayor número de rollos que puede subir en cada viaje si ella pesa 55 kg y cada rollo pesa 18 kg?

**32** El perímetro de una piscina rectangular no supera los 116 m. ¿Cuánto miden su ancho y su largo si el primero es la sexta parte del segundo, y tienen las mayores medidas enteras posibles?

**33** Determina si cada afirmación es verdadera o falsa.

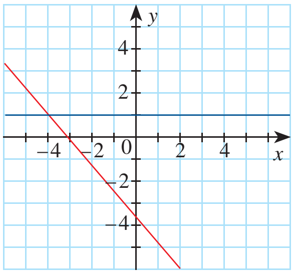
**a.** Un sistema compatible indeterminado tiene solución y es única.

**b.** Un sistema incompatible no tiene solución.

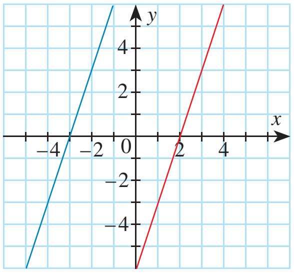
**c.** Un sistema equivalente a $\begin{cases} 4x + 8y = 8 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ es $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$

**34** Observa los gráficos e indica si los correspondientes sistemas de ecuaciones tienen solución única, infinitas soluciones o no tienen solución.

**a.**



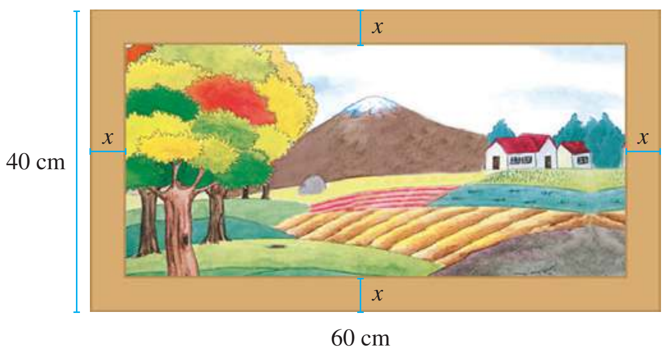

**b.**



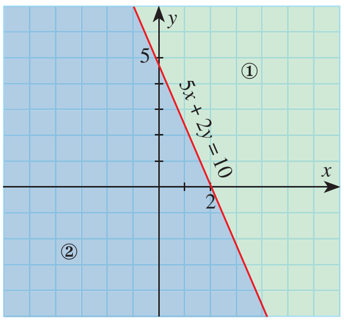

**35** La longitud de un pasillo rectangular es 2 metros mayor que dos veces su ancho. Si su perímetro es de 22 metros, ¿cuáles son sus dimensiones?

**36** El área de un triángulo es de 27 $cm^2$. Si su altura tiene 3 cm menos que dos veces su base, ¿cuáles son la longitud de su base y su altura?

**37** Plantea un sistema de dos inecuaciones (con variable $x$) que expresen el alto y el ancho de esta pintura. Considera que el ancho del marco puede variar entre 2 y 5 cm, y que el área de la pintura y el marco siempre suman 2.400 $cm^2$.




**38** Observa el gráfico y determina cuál de las siguientes es la inecuación asociada al semiplano ① que incluye la recta roja.




A) $5x + 2y > 10$

B) $5x + 2y < 10$

C) $5x + 2y \geq 10$

D) $5x + 2y \leq 10$

## Ofertas por el Día del Padre

**39** Una tienda, que ofrece camisas a \$500 y corbatas a \$100, ha vendido ambos tipos de prenda por un total de \$11.000 durante el primer día de la oferta. Si se sabe que ese día se vendió el doble de camisas que de corbatas, plantea el sistema de ecuaciones que representa la situación y halla su solución en forma gráfica.

## Conservas de atún

**40** En una fábrica de conservas de atún se envasan dos tipos de latas; las pequeñas de 200 g y las grandes de 500 g. Se cuenta con 900 kg de atún y hasta 3.000 latas, entre pequeñas y grandes.

**a.** Plantea una ecuación que indique cuántas latas pequeñas ($x$) y cuántas grandes ($y$) podrían utilizarse para envasar la totalidad del atún.

**b.** Plantea una inecuación que muestre hasta cuántas latas de ambos tipos ($x$ e $y$) se pueden usar.

**c.** En un sistema cartesiano, grafica los ítems anteriores.

**d.** A partir del gráfico determina la cantidad mínima y la máxima de latas pequeñas ($x$) a usar, recordando que se trata de cantidades enteras y no negativas.

## Premio a la mejor escuela

**41** El municipio de un distrito le entrega a una escuela de su jurisdicción un cheque de \$16.800, que puede gastar total o parcialmente para invertirlos en libros y juegos didácticos. Los libros cuestan \$80 y los juegos didácticos \$120. El municipio establece que el número de libros no puede superar al doble del número de juegos didácticos.

**a.** ¿Es posible que la escuela pueda comprar 120 libros y 60 juegos didácticos?

**b.** ¿Y 70 libros y 70 juegos didácticos? Si sobra dinero, ¿cuánto le sobra a la escuela?

**c.** Plantea un sistema de inecuaciones que represente la situación y grafícalo, marcando en él los puntos de los ítems anteriores.

## Construcción de mesas

**42** En una empresa de muebles fabrican mesas de madera. La fabricación de mesas de 2 $m^2$ requiere 3 horas de trabajo y deja una ganancia de \$800, mientras que las mesas de 1 $m^2$ requieren 1 hora de trabajo y dejan una ganancia de \$500. Si se emplearon 800 $m^2$ y 900 horas de trabajo, ¿cuántas mesas de cada tipo fabricaron? ¿Qué ganancia obtuvieron?

## Inversiones financieras

**43** Carmen tiene \$12.000 para invertirlos en la comercialización de dos productos, A y B. La inversión en B debe ser al menos de \$3.000 y no se invertirá en A más del doble que en B. Plantea un sistema de inecuaciones que represente la situación y grafícalo en un sistema cartesiano.

## Vitaminas para las mascotas

**44** Se recomienda darles a los perros vitaminas A y B con dos compuestos vitamínicos. Cada dosis del compuesto Z contiene 10 mg de vitamina A y 15 mg de vitamina B, y cada dosis del compuesto W contiene 10 mg de cada vitamina. Una mascota debe tomar 60 mg de vitamina A y 80 mg de vitamina B diariamente.

**a.** ¿Qué representa la ecuación $10Z + 10W = 60$?

**b.** Escribe la ecuación que indica cómo lograr los 80 mg diarios de vitamina B con los compuestos Z y W.

**c.** Calcula qué dosis diarias de cada compuesto debe tomar una mascota.

# AUTOEVALUACIÓN

## Accesorios con material reciclado

Los alumnos del colegio han decidido realizar un proyecto que consiste en producir y vender carteras y cintos de material reciclado. La finalidad es destinar los fondos a la creación de una biblioteca en una escuela rural.

La producción de una correa requiere 2 botellas de plástico y 4 horas de trabajo al día.

A su vez, la confección de un cinto requiere 3 botellas de plástico y 8 horas de trabajo al día. Se dispone de 600 botellas y 1.520 horas de trabajo para toda la producción.

Por la venta de un cinto se obtiene una ganancia de \$90 y por la de una cartera, de \$150.


1. Se decide utilizar todas las botellas y emplear todas las horas disponibles. Plantea y resuelve un sistema de ecuaciones que permita averiguar la producción total de carteras y cintos.

2. Grafica el sistema de ecuaciones del ítem anterior y señala en él la/s solución/es hallada/s.

3. Calcula la ganancia que obtendrán si utilizan todas las botellas y emplean todas las horas disponibles.

4. Califica el sistema de ecuaciones planteado en función del número de soluciones halladas.
¿Cómo modificarías las ecuaciones para obtener los otros dos tipos de soluciones que no aparecieron?

5. Por una cuestión de tiempo, es probable que se empleen menos horas y que no se utilicen todas las botellas.
Plantea un sistema de inecuaciones que represente esa situación y grafícalo en un sistema cartesiano.

# 7 Trigonometría

## MATEMUNDO

### Imágenes semejantes

Cuando se realiza una toma fotográfica, se precisa una adecuada luminosidad, y a veces se requiere también una óptima cercanía al objeto a fin de poder captar todos sus detalles. Para ello, las cámaras modernas, incluidas las que poseen los teléfonos celulares y las *tablets*, cuentan con herramientas para acercar o alejar la toma del objeto que se va a fotografiar, el cual mantiene su forma, sentido y dirección.

Si imprimimos una fotografía en distintos tamaños de papel, observaremos que en todos los casos la imagen mantiene su forma, así como la proporción entre su ancho y su altura.

Además, si conocemos alguna medida real del objeto fotografiado, podremos medir sus dimensiones en la foto y deducir las restantes medidas reales.

- Las estaturas de José y Verónica en una foto son de 6,5 cm y 5,2 cm, respectivamente. Si la estatura real de Verónica es 1,40 m, ¿cuál es la estatura real de José?
- ¿Valdría el planteo anterior si la cámara hubiera tomado la fotografía con un efecto como el "ojo de pez"? ¿Por qué?

## Busco en la web

Digita en algún buscador (Firefox, Chrome, etc.) lo siguiente:

fotos + ampliación + reducción

Luego, haz clic en "Imágenes". Así obtendrás más ejemplos sobre figuras que mantienen su forma y la proporción entre sus lados.

## ESTO YA LO SABÍA...

**1** El teorema de Pitágoras nos permite calcular el lado desconocido de un triángulo rectángulo. Si en uno de ellos los catetos miden 3 cm y 4 cm, ¿cuánto mide la hipotenusa?

**a.** 1 cm **b.** 3,5 cm **c.** 5 cm **d.** 7 cm

**2** Al ampliar la figura 1, se ha obtenido la figura 2. ¿Cuál es el valor de $y$?

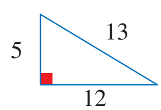


Figura 1

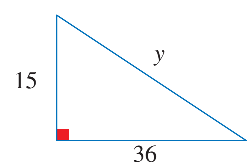


Figura 2

# Semejanza

## Razón entre dos segmentos

Considera los segmentos AB = 3 cm y CD = 4 cm. Para hallar su **razón de proporcionalidad** calculamos el cociente entre sus medidas:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$ ◀ Razón de proporcionalidad.

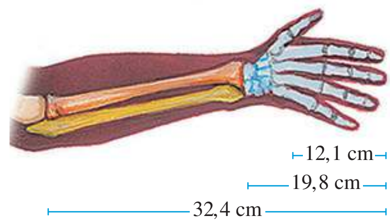
La **razón entre dos segmentos** es el cociente de sus medidas, las cuales deben estar dadas en la misma unidad.

**Principio fundamental de la proporcionalidad**

Las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ forman una proporción si $a \cdot d = b \cdot c$.

**EJEMPLO:**

Con la información del esquema, determina si existe proporción entre la razones formadas por las longitudes del antebrazo y la mano, y las longitudes de la mano y los dedos.




- Las razones mencionadas son:

$$\frac{\text{Antebrazo}}{\text{Mano}} \text{ y } \frac{\text{Mano}}{\text{Dedos}} \longrightarrow \frac{32{,}4 \text{ cm}}{19{,}8 \text{ cm}} \text{ y } \frac{19{,}8 \text{ cm}}{12{,}1 \text{ cm}}$$

- Nos preguntamos si el producto cruzado cumple la igualdad.

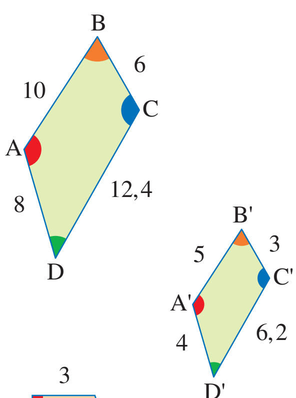
Como $32{,}4 \cdot 12{,}1 = 19{,}8 \cdot 19{,}8$, las razones forman una proporción.

**Figuras semejantes**

Tienen la misma forma.

## Semejanza de polígonos

Dos **polígonos son semejantes** cuando sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados homólogos son proporcionales.
La **razón de semejanza** es el cociente de dos lados homólogos.



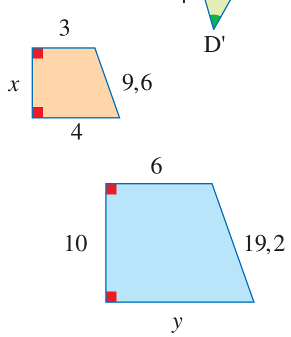

Los polígonos ABCD y A'B'C'D' son semejantes si tienen:

– Los ángulos correspondientes congruentes:

$\widehat{A} \cong \widehat{A'}$, $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$, $\widehat{C} \cong \widehat{C'}$ y $\widehat{D} \cong \widehat{D'}$

– Los lados correspondientes proporcionales:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} \longrightarrow \frac{10}{5} = \frac{6}{3} = \frac{12{,}4}{6{,}2} = \frac{8}{4} = 2$$ ◀ Razón de semejanza.



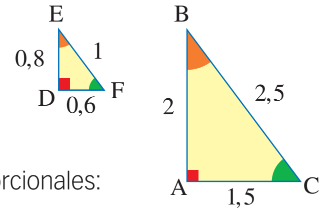

**EJEMPLO:**

Averigua $x$ e $y$ si se sabe que los trapecios son semejantes.

- Por ser semejantes, planteamos la proporcionalidad de lados homólogos:

$$\frac{3}{6} = \frac{x}{10} \longrightarrow 6x = 3 \cdot 10 \longrightarrow x = 5 \qquad \frac{3}{6} = \frac{4}{y} \longrightarrow 3y = 6 \cdot 4 \longrightarrow y = 8$$

## Semejanza de triángulos



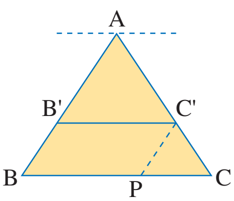

De forma análoga, dos **triángulos son semejantes** si tienen:

- Los ángulos correspondientes congruentes:
  $\widehat{A} \cong \widehat{D}$, $\widehat{B} \cong \widehat{E}$ y $\widehat{C} \cong \widehat{F}$
- Los lados homólogos (opuestos a ángulos congruentes) proporcionales:
  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \rightarrow \frac{2}{0,8} = \frac{2,5}{1} = \frac{1,5}{0,6} = 2,5$ ◀ Razón de semejanza.

Indicamos semejanza con el símbolo ~.
Ejemplo: △ ABC ~ △ DEF

## Triángulos y teorema de Thales

Dos triángulos cumplen las condiciones del **teorema de Thales** si tienen en común un ángulo y los lados opuestos a este ángulo son paralelos. Por lo tanto, los lados correspondientes de ambos triángulos son proporcionales.




En los triángulos ABC y AB'C', el ángulo en común tiene su vértice en A. Los lados que se oponen al ángulo A en cada triángulo son paralelos: $\overline{BC}$ // $\overline{B'C'}$

Por el teorema de Thales: $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ (1)

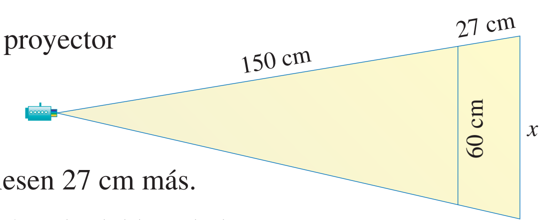
Además, C'P // AB, por el teorema de Thales: AC'/AC = BP/BC
Dado que BP = B'C' por ser B'C'PB un paralelogramo, AC'/AC = B'C'/BC (2)
De (1) y (2) resulta que AB'/AB = AC'/AC = B'C'/BC

**Teorema de Thales**

Recordemos que si tres o más paralelas son cortadas por dos transversales, los segmentos correspondientes entre las paralelas son proporcionales.

**EJEMPLO:**

Cuando los rayos exteriores de un proyector recorren 150 cm, la altura de la imagen es de 60 cm, como muestra el esquema. Calcula su nueva altura $x$ si esos rayos recorriesen 27 cm más.



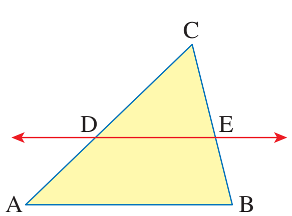

- Ambos triángulos comparten el ángulo del haz de luz, y las posiciones de la pantalla son paralelas.
  Se cumplen las condiciones del teorema de Thales. Entonces:

$$\frac{150}{177} = \frac{60}{x} \longrightarrow x = 70,8$$

La nueva altura de la imagen proyectada mide 70, 8 cm.

## Teorema fundamental de la semejanza de triángulos

Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo que interseca a los otros dos lados determina con esos lados un triángulo semejante al primero.

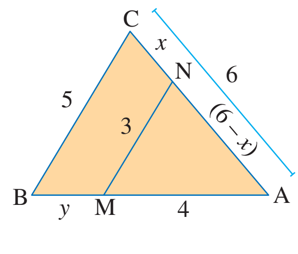



Como $\overleftrightarrow{DE}$ // $\overline{AB}$, por teorema de Thales los triángulos ACB y DCE tienen sus lados correspondientes proporcionales.

Además, tienen los tres ángulos respectivamente congruentes: C es un ángulo en común, A es congruente con D y B con E por ser correspondientes entre paralelas.
Por lo tanto, △ABC ~ △DEC.

**EJEMPLO:**

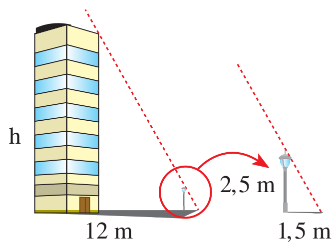
Si $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, averigua los valores de $x$ e $y$.




- Por el teorema fundamental: $\triangle ABC \sim \triangle AMN$
- Establecemos las proporciones:

$$\frac{5}{3} = \frac{6}{6-x} \longrightarrow 30 - 5x = 18 \longrightarrow x = 2{,}4$$

$$\frac{5}{3} = \frac{y+4}{4} \longrightarrow 20 = 3y + 12 \longrightarrow y = \frac{8}{3}$$




**EJEMPLO:**

Para averiguar la altura de un edificio se miden las sombras que proyectan el edificio y un farol. Si el farol mide 2,5 m de altura, ¿cuál es altura del edificio?

- La vertical del farol es paralela a la del edificio. Entonces, los triángulos que se forman son semejantes.
- Por semejanza de triángulos, establecemos las proporciones:

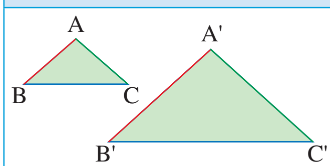
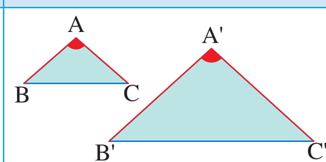
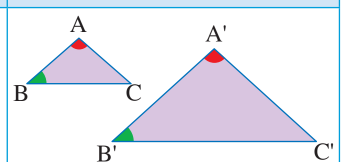
$$\frac{h}{12\text{ m}} = \frac{2{,}5\text{ m}}{1{,}5\text{ m}} \longrightarrow h = 20\text{ m}$$

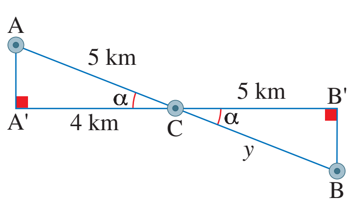
## Criterios de semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes cuando se cumple uno de estos **criterios de semejanza**:

**Congruencia de triángulos**

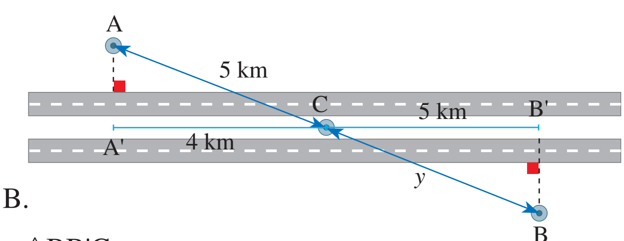
Es un caso particular de semejanza de triángulos cuya razón es 1.

| Criterio LLL (Lado-Lado-Lado) | Criterio LAL (Lado-Ángulo-Lado) | Criterio AA (Ángulo-Ángulo) |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ | $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ y $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$ | $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$ y $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$ |
| Tres lados homólogos proporcionales. | Dos lados proporcionales y el ángulo entre ellos congruente. | Dos ángulos congruentes. |




**EJEMPLO:**

Una empresa levantó estructuras en los puntos A, B y C, como muestra el esquema.



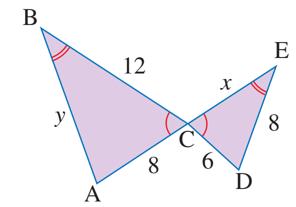

Halla la distancia entre A y B.

- Por criterio AA: $\triangle AA'C \sim \triangle BB'C$
- Calculamos $y$: $\frac{A'C}{B'C} = \frac{AC}{BC} \longrightarrow \frac{4}{5} = \frac{5}{y} \longrightarrow 4y = 25 \longrightarrow y = 6{,}25$ km

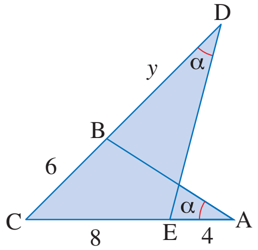
La distancia entre las estructuras A y B es 5 km + 6,25 km = 11,25 km.

**3** Según el caso, calcula los valores de $x$ e $y$.

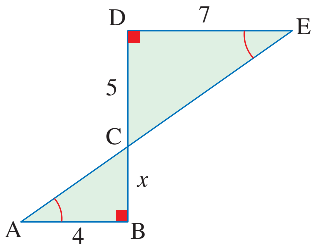
**a.**



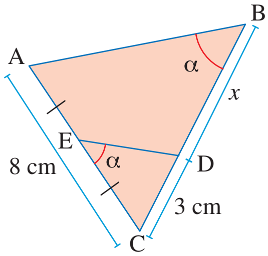

**b.**



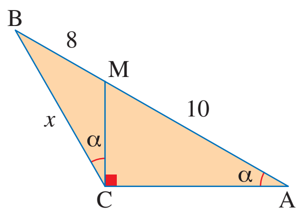

**c.**



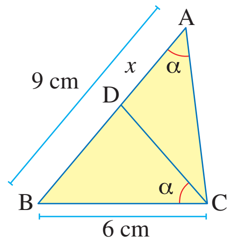

**d.**



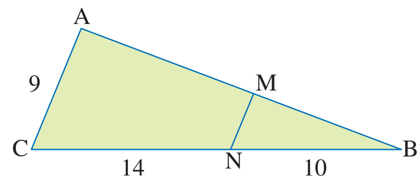

**e.**




**f.**



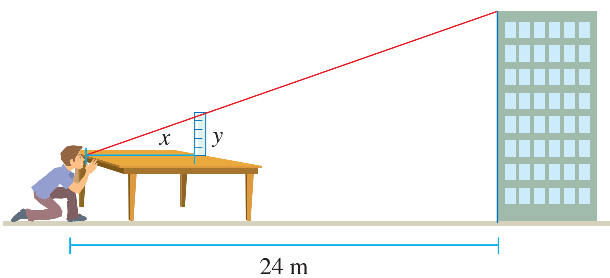

**4** Si $\overline{AC} \parallel \overline{MN}$, ¿cuál es la medida de $\overline{MN}$?



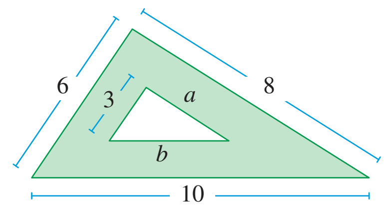

**5** Los lados de un triángulo miden 3 cm; 7 cm y 8 cm. ¿Cuánto medirán los lados de un triángulo semejante a este si la razón de semejanza entre el primero y el segundo es 2?

**6** A una hora determinada, un edificio proyecta una sombra de 8,5 m. En ese mismo instante, un semáforo de 2,4 m de altura proyecta una sombra de 120 cm. ¿Cuál es la altura del edificio?

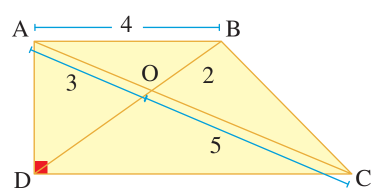
**7** Halla la altura del edificio si la mesa mide un metro de altura. Además, $x = 60$ cm e $y = 56$ cm.



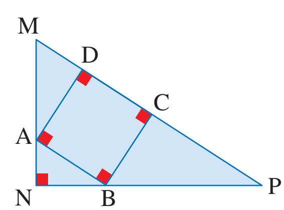

**8** La figura representa una escuadra. Calcula $a + b$.



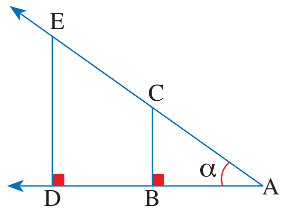

**9** Dado el trapecio ABCD, calcula OD y DC si $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.




**10** En la figura se observa un triángulo rectángulo MNP y un cuadrado ABCD. Si MD = 24 cm y CP = 54 cm, halla AB.



# Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo




En la figura del margen, observamos que los triángulos rectángulos ABC y ADE son semejantes, según el criterio AA.

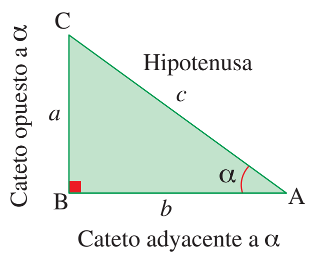
Por ser triángulos semejantes, podemos decir que $\frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$. De esta última relación, establecemos que:

$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = k$ ◀ Constante de proporcionalidad.

Esto quiere decir que si se mantiene la amplitud del ángulo α, la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa no depende del triángulo que se elige, ya que la constante de proporcionalidad siempre es la misma.

Los siguientes son los cocientes que se pueden formar entre los lados de un triángulo rectángulo con respecto al ángulo α.

| Razón trigonométrica | Notación simbólica | Relación entre los lados |
|---|---|---|
| Seno de α | sen α | $\frac{\text{cateto opuesto a }\alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$ |
| Coseno de α | cos α | $\frac{\text{cateto adyacente a }\alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$ |
| Tangente de α | tg α | $\frac{\text{cateto opuesto a }\alpha}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$ |
| Cotangente de α | cotg α | $\frac{\text{cateto adyacente a }\alpha}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$ |
| Secante de α | sec α | $\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a }\alpha} = \frac{c}{b}$ |
| Cosecante de α | cosec α | $\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a }\alpha} = \frac{c}{a}$ |




Las **razones trigonométricas** seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante relacionan los lados de un triángulo rectángulo con sus ángulos agudos.

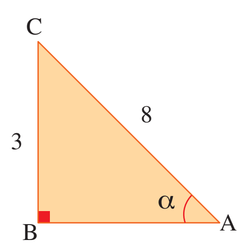
**EJEMPLO:**

Calcula cos α y cotg α si cosec α = $\frac{8}{3}$.

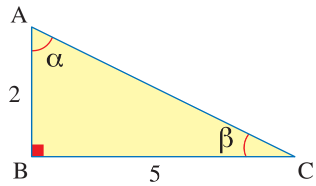
- Por definición de cosecante: cosec α = $\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a }\alpha} = \frac{8}{3}$
- Completamos los datos en un triángulo cualquiera que pueda tener esa cosecante (ver margen).
- Calculamos la medida del cateto AB:

  $(AB)^2 = (AC)^2 - (BC)^2$ ◀ Aplicamos el teorema de Pitágoras.

  $(AB)^2 = (8)^2 - (3)^2 \longrightarrow (AB)^2 = 64 - 9 \longrightarrow AB = \sqrt{55}$
- Calculamos: cos α = $\frac{\sqrt{55}}{8}$ y cotg α = $\frac{\sqrt{55}}{3}$.

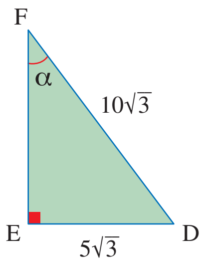


**11** Dada la figura, halla sen α y cos β.

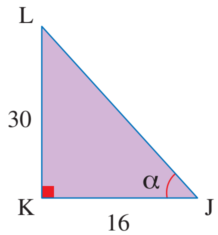



**12** Determina todas las razones trigonométricas de α.

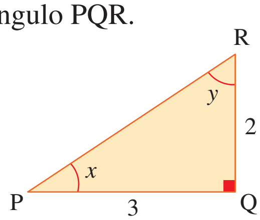
**a.**




**b.**




**13** Considera el triángulo rectángulo PQR.




Calcula lo siguiente.

**a.** sen $x$

**b.** tg $y$

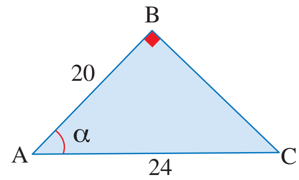
**c.** $\dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$

**d.** $\dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$

**e.** $\text{sen}^2 x + \cos^2 x$

**f.** $\text{tg}^2 y \cdot \text{cotg}^2 y$

**14** Determina las razones trigonométricas del ángulo α.




**15** Del triángulo rectángulo ACB, recto en C, se sabe que tg A = 4/3. Calcula 2 · sen B + 3 · cos B.

**16** Si sen $\alpha = \dfrac{15}{17}$, calcula $\dfrac{\text{tg } \alpha + \sec \alpha}{17 \cos \alpha}$.

**17** En cada caso, calcula las otras cinco razones trigonométricas.

**a.** sen $\alpha = \dfrac{8}{17}$

**b.** $\cos \alpha = \dfrac{13}{15}$

**c.** tg $\alpha = \dfrac{40}{9}$

**d.** cotg $\alpha = \dfrac{5}{12}$

**e.** $\sec \alpha = \dfrac{7}{2}$

**f.** cosec $\alpha = \dfrac{61}{60}$

# Identidades y aplicaciones

## Identidades trigonométricas

Se denomina **identidad trigonométrica** a toda igualdad que sea válida para todos los valores admisibles de los ángulos. Entre otras, son:

| Recíprocas | Por cociente | Pitagóricas |
|---|---|---|
| Son consecuencia de las definiciones trigonométricas.<br>• $\text{sen}\,\alpha \cdot \text{cosec}\,\alpha = 1$<br>• $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$<br>• $\text{tg}\,\alpha \cdot \text{cotg}\,\alpha = 1$ | Resultan de dividir seno y coseno.<br>• $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$<br>• $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$ | Se deducen por aplicación del teorema de Pitágoras.<br>• $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$<br>• $\sec^2\alpha - \text{tg}^2\alpha = 1$<br>• $\text{cosec}^2\alpha - \text{cotg}^2\alpha = 1$ |

Para demostrar una igualdad, transformamos uno de los miembros hasta obtener el otro. Para verificar una igualdad, es posible transformar ambos miembros.

**EJEMPLO:**

Demuestra la igualdad $\text{cotg}\,\theta \cdot \sec\theta \cdot \text{sen}\,\theta = 1$

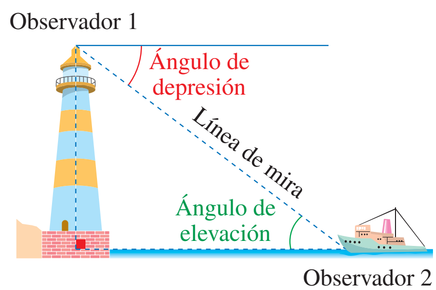
- Expresamos el primer miembro en función de senos y cosenos. Luego, simplificamos:

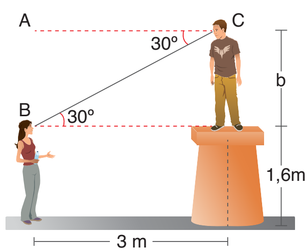
  $\text{cotg}\,\theta \cdot \sec\theta \cdot \text{sen}\,\theta = 1 \longrightarrow \left(\dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}\right)\left(\dfrac{1}{\cos\theta}\right)(\text{sen}\,\theta) = 1 \longrightarrow 1 = 1$

## Ángulos de elevación y de depresión

Cuando miramos un objeto que no está a nuestra altura se forma un ángulo cuyos lados están definidos por dos líneas imaginarias: una es la línea horizontal que pasa por nuestros ojos y la otra es la línea visual que va de nuestros ojos al objeto.

El ángulo que forman ambas líneas imaginarias se llama **ángulo de elevación** si se mira hacia arriba o **ángulo de depresión** si se mira hacia abajo.




**EJEMPLO:**

David se sube a un pedestal de 1,6 m de altura y desde allí observa a Mayra con un ángulo de depresión de 30°. Se sabe que la base superior del pedestal está a la altura de los ojos de Mayra, quien se encuentra a 3 m de su centro. ¿A qué altura del suelo mira David?

- En el esquema, $b$ es parte de un triángulo rectángulo de catetos $b$ y 3 metros.
- Como el cociente entre $b$ y 3 m es igual a la tangente de 30º podemos buscar su valor con la calculadora o considerar que es igual a $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y plantear:

  $\text{tg}\,30º = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{b}{3}\text{ m} \longrightarrow b = \sqrt{3}\text{ m} \approx 1{,}73\text{ m.}$
- David está mirando (aproximadamente) a 1,73 m + 1,6 m = 3,33 m de altura desde el suelo.

**18** Escribe cada expresión según se indica.

**a.** $\operatorname{sen}\beta + \operatorname{cosec}\beta$ en función de $\operatorname{sen}\beta$.

**b.** $\dfrac{\cos x \cdot \sec x}{\operatorname{cosec} x} + 2 \operatorname{sen} x$ en función de $\operatorname{sen} x$.

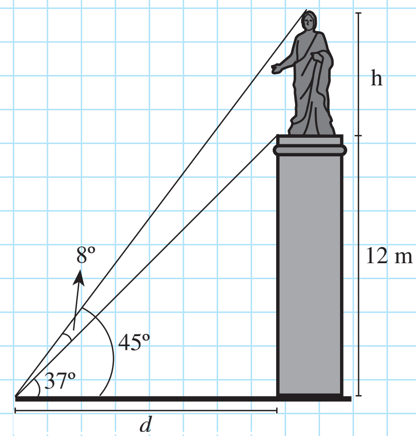
**c.** $\sec\theta \cdot \cos\theta \cdot \operatorname{cosec}\theta$ en función de $\operatorname{sen}\theta$.

**19** Expresa cada razón en función del $\operatorname{sen}\alpha$ y el $\cos\alpha$. Luego, simplifica.

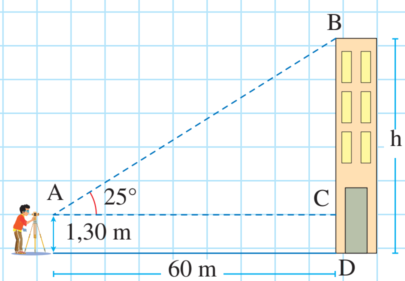
**a.** $\dfrac{\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha \cdot \cos\alpha}$ **b.** $\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha}$

**20** Demuestra la igualdad:
$\sec\theta = \operatorname{sen}\theta \cdot (\operatorname{tg}\theta + \operatorname{cotg}\theta)$

**21** Una estatua está colocada sobre una columna de 12 m de alto. Desde un punto del suelo situado en la misma horizontal del pie de la columna, vemos su capitel con un ángulo de 37°, y la parte superior de la estatua, con un ángulo que tiene 8° más. ¿Cuál es la altura de la estatua?




**22** A través del teodolito, un topógrafo observa la cúspide de un edificio con un ángulo de elevación de 25°. Si el teodolito mide 1,30 m de altura y la distancia desde el punto de observación hasta el pie del edificio es de 60 m, ¿cuál es la altura *h* del edificio?




**23** Una chica, cuyos ojos están a un metro y medio del piso, mira a su novio, que es más alto. El ángulo de depresión desde los ojos de ella a los zapatos de él es de 56,3°, mientras que el ángulo de elevación hacia el pelo de él es de 11,3°. Redondea los valores a los décimos de metro y calcula la altura del chico.

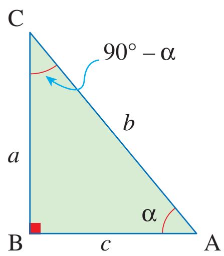
## Razones trigonométricas y ángulos complementarios

| Razón \ Ángulo | $\alpha$ | $(90° - \alpha)$ |
|---|---|---|
| Seno | $\frac{a}{b}$ | $\frac{c}{b}$ |
| Coseno | $\frac{c}{b}$ | $\frac{a}{b}$ |
| Tangente | $\frac{a}{c}$ | $\frac{c}{a}$ |
| Cotangente | $\frac{c}{a}$ | $\frac{a}{c}$ |
| Secante | $\frac{b}{c}$ | $\frac{b}{a}$ |
| Cosecante | $\frac{b}{a}$ | $\frac{b}{c}$ |

Las flechas indican cocientes que son iguales. Por ejemplo:

$\cos \alpha = \text{sen}\,(90° - \alpha)$

Los ángulos agudos en un triángulo rectángulo suman 90°. Observa lo siguiente:




- $\text{sen}\,\alpha = \frac{a}{b}$ y $\cos\,(90° - \alpha) = \frac{a}{b}$ $\rightarrow$ $\text{sen}\,\alpha = \cos\,(90° - \alpha)$
- $\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{c}$ y $\text{cotg}\,(90° - \alpha) = \frac{a}{c}$ $\rightarrow$ $\text{tg}\,\alpha = \text{cotg}\,(90° - \alpha)$
- $\sec \alpha = \frac{b}{c}$ y $\text{cosec}\,(90° - \alpha) = \frac{b}{c}$ $\rightarrow$ $\sec \alpha = \text{cosec}\,(90° - \alpha)$

En un triángulo rectángulo, el seno de un ángulo $\alpha$ es igual al coseno de su ángulo complementario $(90° - \alpha)$. Lo mismo se cumple entre la tangente y la cotangente, y entre la secante y la cosecante de dichos ángulos.

**EJEMPLO:**

Expresa en función del ángulo complementario.

**a)** $\text{tg}\,72° = \text{cotg}\,(90° - 72°) = \text{cotg}\,18°$

**b)** $\text{sen}\,37° = \cos\,(90° - 37°) = \cos\,53°$

**c)** $\cos\,48{,}34° = \text{sen}\,(90° - 48{,}34°) = \text{sen}\,41{,}66°$

**EJEMPLO:**

Calcula el valor de $x$ si $\sec\,(3x - 21°) - \text{cosec}\,(4x + 6°) = 0$.

- Transponemos términos: $\sec\,(3x - 21°) = \text{cosec}\,(4x + 6°)$
- Observamos la igualdad entre la secante y la cosecante; por lo tanto, se trata de ángulos complementarios.
- Calculamos el valor de $x$: $(3x - 21°) + (4x + 6°) = 90°$ $\rightarrow$ $x = 15°$

**EJEMPLO:**

Halla $\alpha$ y $\beta$ para que las igualdades sean válidas a la vez.

$\text{sen}\,(2\alpha + 12°) = \cos\,(2\beta + 8°)$ y $\text{tg}\,(2\alpha + 27°) = \text{cotg}\,(33° - 2\beta)$

- Como se trata de ángulos complementarios, resolveremos ambas igualdades:

| | |
|---|---|
| $\text{sen}\,(2\alpha + 12°) = \cos\,(2\beta + 8°)$ | $\text{tg}\,(2\alpha + 27°) = \text{cotg}\,(33° - 2\beta)$ |
| $2\alpha + 12° + 2\beta + 8° = 90°$ | $2\alpha + 27° + 33° - 2\beta = 90°$ |
| $\alpha + \beta = 35°$ ① | $\alpha - \beta = 15°$ ② |

- Resolvemos el sistema formado por ① y ②:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 35° \\ \alpha - \beta = 15° \end{cases} \quad \blacktriangleright \quad \alpha = 25° \wedge \beta = 10°$$

El ángulo $\alpha$ mide 25° y el ángulo $\beta$ mide 10°.

**24** Une con líneas las razones equivalentes.

| | |
|---|---|
| sen 37° | cos 42° |
| cos 67° | sen 32° |
| sen 48° | sen 63° |
| cos 27° | cos 52° |
| sen 38° | sen 23° |
| cos 58° | cos 53° |

**25** Expresa en función del ángulo complementario.

a. sen 24,5° ▶ ____________

b. tg 78,5° ▶ ____________

c. sec 32,21° ▶ ____________

d. cos 54,26° ▶ ____________

e. cotg 81,32° ▶ ____________

f. cosec 12,48° ▶ ____________

**26** Calcula el valor de $x$.

a. $\text{sen}\,(2x - 34°) - \cos\,(3x + 4°) = 0$

b. $\text{tg}\,(4x - 25°) - \text{cotg}\,(5x + 43°) = 0$

c. $\sec\,(3x - 45°) - \text{cosec}\,(2x - 10°) = 0$

**27** A partir de que $\text{sen}\ 30° = \frac{1}{2}$ y $\text{sen}\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ calcula: cos 30°, tg 30°, cos 60° y tg 60°.

**28** Halla α y β para que las igualdades sean válidas.

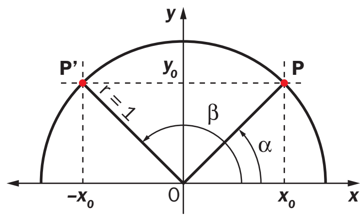
$$\begin{cases} \text{tg}\,(3\alpha + 15°) = \text{cotg}\,(\beta + 6°) \\ \text{sen}\,(\alpha + 54°) = \cos\,(2\beta - 12°) \end{cases}$$

**29** Calcula las medidas de los ángulos A y B, si:

$$\begin{cases} \text{sen}\,(A - B) = \cos 70° & ① \\ \sec\,(A + B) = \text{cosec}\, 50° & ② \end{cases}$$

# Razones trigonométricas de ángulos obtusos

Hasta ahora hemos operado con razones trigonométricas de ángulos agudos, dado que nos limitamos a trabajar con triángulos rectángulos. Pero podríamos extenderlas a ángulos obtusos. Para eso, consideremos una semicircunferencia de radio 1, centrada en el origen de coordenadas, como se observa a continuación.




Allí, los puntos P y P' tienen la misma ordenada $y_0$, mientras que sus abscisas $x_0$ y $-x_0$ son opuestas. En consecuencia, los ángulos $\alpha$ y $\beta$ asociados a esos puntos son **suplementarios**. Dado que el radio es 1, los valores del seno y del coseno para el ángulo $\alpha$ son:

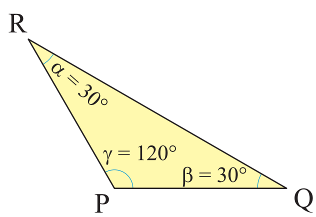
$$\text{sen } \alpha = y_0 \qquad \cos \alpha = x_0$$

Para el punto P', ubicado en el segundo cuadrante, podemos definir el seno y el coseno del ángulo **obtuso** $\beta$ así:

$$\text{sen } \beta = y_0 \qquad \cos \beta = -x_0$$

Es decir, los ángulos suplementarios tienen el mismo seno, pero sus cosenos son opuestos.

$$\text{sen } (180° - \alpha) = \text{sen } \alpha \qquad \cos (180° - \alpha) = -\cos \alpha$$




**EJEMPLO:**

Calcula el coseno de los ángulos interiores del triángulo PQR si sen 30° = 0,5.

- Aplicando la identidad pitagórica $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, resulta que:
  $\cos^2 30° = 1 - \text{sen}^2 30° = 1 - (0{,}5)^2 = 0{,}75 \rightarrow \cos \alpha = \cos \beta \approx 0{,}87$
- Por ser 30° y 60° ángulos complementarios: cos 60° = sen 30°.
- Por ser 60° y 120° ángulos suplementarios: cos 120° = –cos 60°.
  Entonces: $\cos \gamma = -0{,}5$.

**EJEMPLO:**

Si $\text{sen } \alpha = 0{,}6$ y $\cos \alpha = 0{,}8$, calcula las razones trigonométricas del ángulo suplementario.

- Por definición: $\text{sen } (180° - \alpha) = 0{,}6$ y $\cos (180° - \alpha) = -0{,}8$
- Calculamos la tangente: $\text{tg } (180° - \alpha) = \dfrac{\text{sen } (180° - \alpha)}{\cos (180° - \alpha)} = \dfrac{0{,}6}{-0{,}8} = -0{,}75$
- Calculamos la cotangente: $\text{cotg } (180° - \alpha) = \dfrac{1}{\text{tg } (180° - \alpha)} = \dfrac{1}{-0{,}75} = -1{,}\hat{3}$
- Calculamos la secante: $\sec (180° - \alpha) = \dfrac{1}{\cos (180° - \alpha)} = \dfrac{1}{-0{,}8} = -1{,}25$
- Calculamos la cosecante: $\text{cosec } (180° - \alpha) = \dfrac{1}{\text{sen } (180° - \alpha)} = \dfrac{1}{0{,}6} = 1{,}\hat{6}$

**30** Expresa en función del ángulo suplementario.

a. sen 125° ▶ ______

b. tg 92° ▶ ______

c. sec 170° ▶ ______

d. cos 102,5° ▶ ______

e. cotg 99,9° ▶ ______

f. cosec 179,1° ▶ ______

**31** Une con líneas las razones equivalentes.

| | |
|---|---|
| sen 145° | –cos 80° |
| cos 100° | –cos 12° |
| sen 123° | sen 35° |
| cos 132° | –cos 48° |
| sen 107° | sen 57° |
| cos 168° | sen 73° |

**32** Completa con el signo + o –, siendo $0° < x < 90°$.

$\text{sen}\ (180 - x) =$ ______ $\text{sen}\ x$

$\cos\ (180 - x) =$ ______ $\cos\ x$

$\text{tg}\ (180 - x) =$ ______ $\text{tg}\ x$

$\text{cotg}\ (180 - x) =$ ______ $\text{cotg}\ x$

$\sec\ (180 - x) =$ ______ $\sec\ x$

$\text{cosec}\ (180 - x) =$ ______ $\text{cosec}\ x$

**33** Determina si son verdaderas o falsas las siguientes igualdades, donde $0° < \beta < 90°$.

a. $\text{sen}\ \beta \cdot \sec\ (180° - \beta) = 1$

b. $\text{tg}\ (180° - \beta) \cdot \text{cotg}\ \beta = 1$

c. $\cos\ (180° - \beta) \cdot \text{cosec}\ \beta = 1$

d. $1 + \text{cotg}^2\ \beta = \text{cosec}^2\ (180° - \beta)$

e. $1 - \text{sen}^2\ \beta = \cos^2\ (180° - \beta)$

f. $\text{tg}^2\ (180° - \beta) - \sec^2 \beta = -1$

g. $1 - \cos^2\ \beta = \text{sen}^2\ (180° - \beta)$

h. $\text{sen}^2\ (180° - \beta) + \text{cosec}^2\ (180° - \beta) = 1$

**34** Calcula el valor del ángulo agudo $x$.

a. $\cos\ (x + 12°) + \cos\ (3x - 32°) = 0$

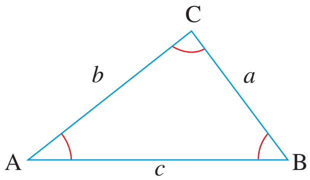
b. $\text{tg}\ (3x + 20°) + \text{tg}\ (8x + 50°) = 0$

c. $\sec\ (5x + 15°) + \sec\ (20x) = 0$

**35** Calcula el valor de los ángulos agudos A y B, si:

$$\begin{cases} \text{sen}\ (A + B) = -\cos\ 170° & (1) \\ \text{cosec}\ (A - B) = -\sec\ 110° & (2) \end{cases}$$

# Teorema del seno




En todo triángulo, las medidas de los lados son proporcionales a los senos de los respectivos ángulos opuestos.

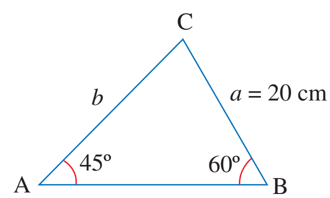
$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Este teorema se aplica para averiguar las medidas de un triángulo del que se conocen:

- Dos ángulos y un lado sabiendo a qué ángulo se opone.
- Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

**EJEMPLO:**

En un triángulo ABC, BC = 20 cm, $\widehat{A} = 45^\circ$ y $\widehat{B} = 60^\circ$. Calcula AC e indica cómo hallarías AB.



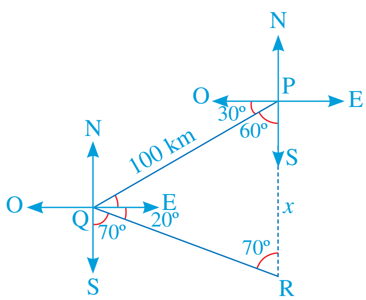

- Dibujamos el triángulo y ubicamos los datos.
- Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \text{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \text{B}} \rightarrow \frac{20}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{b}{\operatorname{sen} 60^\circ}$$

$$b = \frac{20 \operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 45^\circ} \approx 24{,}49$$

La longitud del lado AC es aproximadamente 24,49 cm.

- Para hallar AB se calcula la medida del ángulo C por suma de los ángulos interiores de un triángulo. Luego, se aplica el teorema del seno.




**EJEMPLO:**

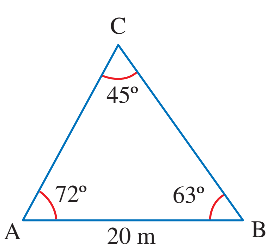
Un móvil recorre 100 km con rumbo S 60º O y luego cambia su dirección a un rumbo S 70º E hasta un punto situado al sur del punto de partida, como muestra el esquema de la izquierda.

Calcula la distancia entre el punto de partida P y el punto de llegada R.

- En el △ PQR, aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{x}{\operatorname{sen} 50^\circ} = \frac{100}{\operatorname{sen} 70^\circ} \rightarrow x = \frac{100 \operatorname{sen} 50^\circ}{\operatorname{sen} 70^\circ} \rightarrow x \approx 81{,}52$$

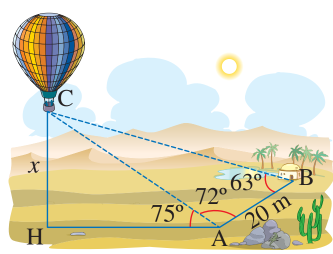
La distancia entre el punto de partida y el de llegada es de unos 81,52 km.




Con la suma de los ángulos interiores, deducimos que $\hat{C} = 45^\circ$.

**EJEMPLO:**

Para calcular la altura a la que se encuentra un globo, un ingeniero obtiene las amplitudes de los ángulos y las distancias como muestra la figura.
¿Cuánto dista el globo del punto A?
¿A qué altura está el globo?




- Hallamos la distancia del globo al punto A:

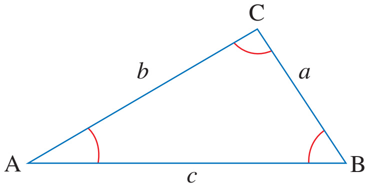
$$\frac{\text{AC}}{\operatorname{sen} 63^\circ} = \frac{20}{\operatorname{sen} 45^\circ} \rightarrow \text{AC} = \frac{20 \cdot \operatorname{sen} 63^\circ}{\operatorname{sen} 45^\circ} \approx 25{,}2 \text{ m}$$

- Calculamos la altura $x$ aplicando la definición del seno.

$$\operatorname{sen} 75^\circ = \frac{x}{\text{AC}} \rightarrow x = \text{AC} \cdot \operatorname{sen} 75^\circ \approx 24{,}34 \text{ m}$$

El globo dista unos 25,2 m del punto A y está a unos 24,34 m de altura.

**36** Escribe V si es verdadero o F si es falso.




a. $\dfrac{a}{\text{sen A}} = \dfrac{b}{\text{sen C}} = \dfrac{c}{\text{sen B}}$ ☐

b. $\dfrac{a}{\text{sen A}} = \dfrac{b}{\text{sen B}} = \dfrac{c}{\text{sen C}}$ ☐

c. $\dfrac{\text{sen A}}{a} = \dfrac{\text{sen B}}{b} = \dfrac{\text{sen C}}{c}$ ☐

d. $\dfrac{a}{\text{sen A}} = \dfrac{\text{sen B}}{b} = \dfrac{c}{\text{sen C}}$ ☐

e. $\dfrac{\text{sen A}}{\text{sen B}} = \dfrac{a}{b}$ ☐

**37** En un triángulo ABC se tiene que $a = 4$ m, $\widehat{A} = 105°$, y $\widehat{C} = 60°$. Calcula $c$.

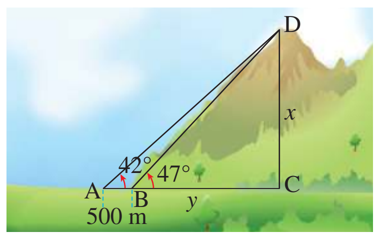
**38** Calcula el perímetro de un terreno que tiene la forma de un triángulo ABC si $\widehat{B} = 64°$; $\widehat{A} = 55°$ y $b = 100$ m.

**39** a. En un triángulo se conocen los valores de los lados $a$ y $b$, y del ángulo A (opuesto al lado $a$). ¿Cómo averiguarías los ángulos restantes?

b. En un triángulo se conocen los valores de los ángulos A y B, y del lado $a$ (opuesto al ángulo A). ¿Cómo averiguarías los lados restantes?

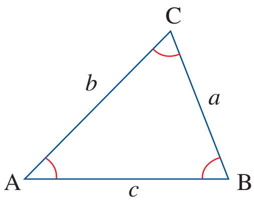
**40** En el triángulo PQR, el lado $p$ mide 20 cm y los ángulos Q y R miden 30° y 50°, respectivamente. Calcula la longitud de los lados $q$ y $r$.

**41** Según los datos de la figura, ¿cuál es la altura de la montaña?




**42** Dibuja un triángulo rectángulo ABC, con el ángulo recto en C. Considerando las definiciones de sen A y sen B, y que sen 90º = 1, demuestra que el teorema del seno es válido en ese triángulo rectángulo.

# Teorema del coseno




En todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble del producto de estos por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ $\quad$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$ $\quad$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

Este teorema se aplica para averiguar valores de un triángulo del que se conocen:

- Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
- Sus tres lados.

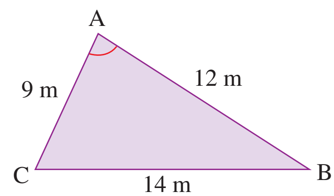
Las inversas de las funciones sen, cos y tg permiten calcular el ángulo.

En una calculadora, se habilitan con la tecla SHIFT.

**EJEMPLO:**

En un triángulo ABC, los valores de los lados son $a = 14$ m, $b = 9$ m y $c = 12$ m.

- Dibujamos el triángulo ABC y ubicamos los tres lados, que conocemos.
- Aplicamos el teorema del coseno:




$14^2 = 9^2 + 12^2 - 2 \cdot 9 \cdot 12 \cdot \cos A$

$196 = 225 - 216 \cos A$

$216 \cos A = 29 \longrightarrow \cos A = \dfrac{29}{216}$

- Para obtener la medida del ángulo A, digitamos en la calculadora:

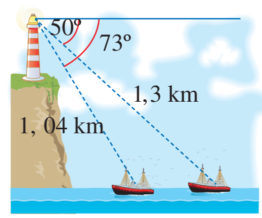
SHIFT COS 2 9 ab/c 2 1 6 = 82,28421137

El ángulo A mide aproximadamente 82,28º.

**EJEMPLO:**

Desde la parte superior de un faro se observan dos barcos con ángulos de depresión de 73° y 50°, respectivamente. ¿Cuál es la distancia entre los barcos?

- Con los datos del esquema, resolvemos:

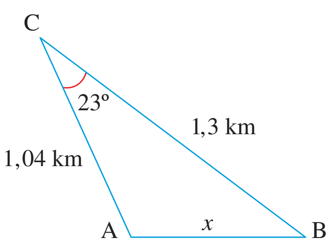



$x^2 = (1{,}3)^2 + (1{,}04)^2 - 2 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}04 \cdot \cos 23°$

$x^2 \approx 1{,}69 + 1{,}0816 - 2{,}489$

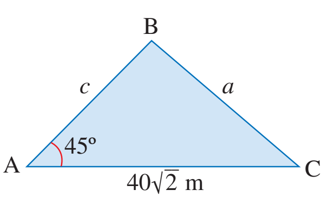
$x^2 \approx 0{,}282 \longrightarrow x \approx 0{,}53$

La distancia entre los barcos es de unos 0,53 km.




**EJEMPLO:**

Halla la distancia entre los puntos A y B si $\widehat{A} = 45º$, $AC = 40\sqrt{2}$ m y la diferencia de longitudes entre BC y AB es 10 m.




- Aplicamos el teorema del coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

  $a^2 = (40\sqrt{2})^2 + c^2 - 2 \cdot 40\sqrt{2} \cdot c \cdot \cos 45º$

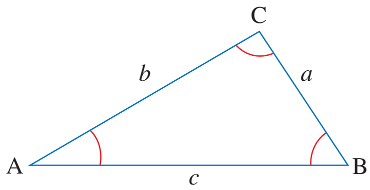
  $a^2 = 3200 + c^2 - 80\sqrt{2}c \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow a^2 = 3200 + c^2 - 80c$ ①

- Por dato: $a - c = 10 \longrightarrow a = 10 + c$ ②
- Reemplazamos ② en ①: $(10 + c)^2 = 3200 + c^2 - 80c$

  $100 + 20c + c^2 = 3200 + c^2 - 80c \longrightarrow c = 31$

La distancia entre los puntos A y B es 31 m.

**43** Completa cada igualdad para que sea verdadera.




**a.** $\underline{\qquad}^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

**b.** $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \underline{\qquad} \cdot \cos \underline{\qquad}$

**c.** $\underline{\qquad}^2 = \underline{\qquad}^2 + \underline{\qquad}^2 - 2ab \cdot \cos C$

**d.** $\underline{\qquad}^2 = \underline{\qquad}^2 + \underline{\qquad}^2 - 2 \underline{\qquad} \cdot \cos B$

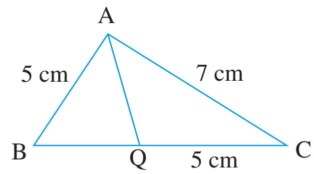
**e.** $a^2 - \underline{\qquad}^2 - \underline{\qquad}^2 = -2bc \cdot \cos \underline{\qquad}$

**f.** $\underline{\qquad}^2 + b^2 - \underline{\qquad}^2 = 2 \underline{\qquad} \cdot \cos C$

**44** En un triángulo ABC se tiene que $a = 5$ m, $b = 10$ m y $\widehat{C} = 60°$. Calcula $c$.

**45** Halla los ángulos interiores de un triángulo de 4 m, 5 m y 7 m de lado.

**46** En el triángulo que se muestra se traza un segmento AQ, tal que BQ = 3 cm. Determina AQ.




**47** Un barco que se encuentra en un punto A pide socorro. Se reciben sus señales en dos estaciones de radio B y C que distan 7 km entre sí. Si AC = 10 km y $\widehat{C} = 50°$, calcula los valores de los ángulos A y B.

**48** Dibuja un triángulo rectángulo ABC, con el ángulo recto en C. Demuestra que aplicar el teorema del coseno con respecto al ángulo C equivale a aplicar el teorema de Pitágoras a dicho triángulo.

**49** Evalúa como verdadera o falsa cada una de las siguientes proposiciones:

**a.** La semejanza solo se aplica a los triángulos.

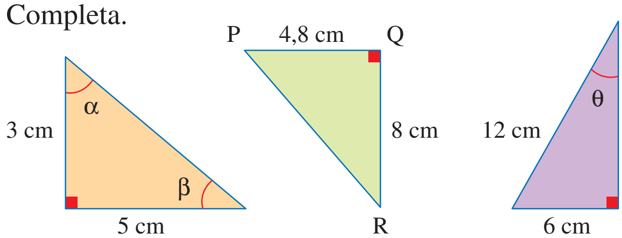
**b.** Dos triángulos isósceles que no son congruentes son semejantes.

**c.** Si dos figuras son semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales.

**d.** La razón de semejanza se obtiene de la relación entre los ángulos de las figuras.

**e.** Dos triángulos equiláteros que no son congruentes son semejantes.

**50** Completa.




**a.** PR = ☐  **b.** sen α = ☐

**c.** cos R = ☐  **d.** tg P = ☐

**e.** sec β = ☐  **f.** θ = ☐

**51** Emplea criterios de semejanza para determinar si algún par de triángulos de la actividad anterior son semejantes.

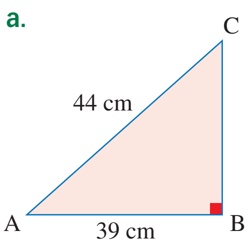
**52** Los lados de un triángulo miden 6 cm; 8 cm y 10 cm.

**a.** Halla las longitudes de los lados de un triángulo semejante al anterior si la razón de semejanza entre el primero y el segundo es 2.

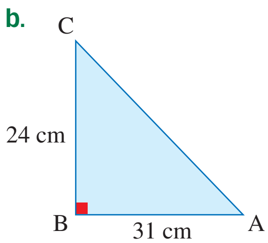
**b.** Averigua los valores de los ángulos interiores de estos triángulos e indica si son acutángulos, obtusángulos o rectángulos.

**53** Calcula los ángulos y los lados que faltan.

**a.**




**b.**



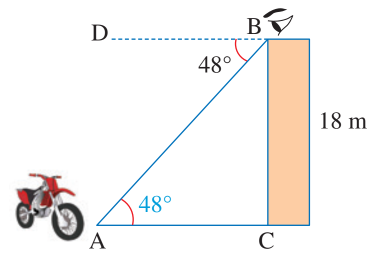

**54** En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, tg A = 5/12. Calcula 3 $\text{sen}^2$ C + 2 $\cos^2$ A.

**55** Si $\text{cotg}\ \theta = \dfrac{8}{15}$, halla $\dfrac{\frac{1}{3}\text{sen}\ \theta - \frac{1}{2}\cos\theta}{\frac{1}{17}(\sec\theta + \text{tg}\ \theta)}$

**56** Simplifica $\text{cosec}^2\ \alpha - \text{cotg}^2\ \alpha$.

**57** Simplifica $\dfrac{\cos\beta}{1 + \text{sen}\ \beta} + \text{tg}\ \beta$.

**58** En el gráfico, una persona observa una motocicleta desde un edificio, con un ángulo de depresión de 48°. ¿A qué distancia AC del edificio se encuentra la motocicleta? ¿Y de la persona?




**59** Desde un teodolito de 1,5 m de altura, se observa la cima de una loma con un ángulo de elevación de 60°. Si la distancia del teodolito al eje de la loma es de 400 m, ¿cuál es la altura de ella?

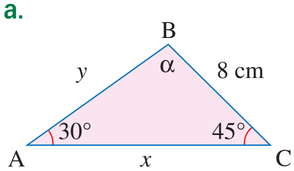
**60** Demuestra las siguientes igualdades:

**a.** sen(90° – α) · cotg(90° – α) = sen α

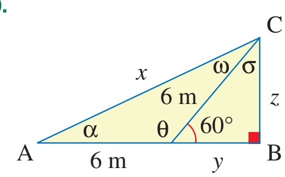
**b.** $\sec^2 (180° - \boxtimes) = 1 + \text{tg}^2 (180° - \boxtimes)$

**61** Calcula los valores de los lados y los ángulos restantes.

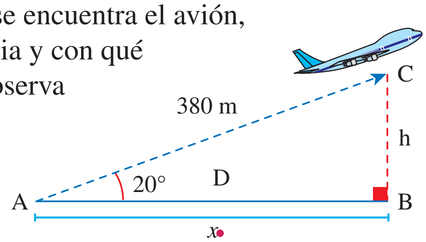
**a.**




**b.**

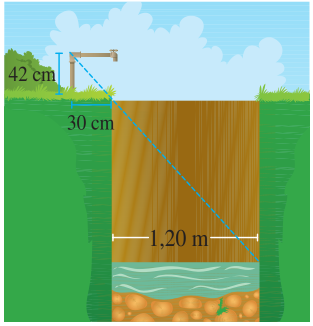



**62** Un avión acaba de despegar desde el punto A, mientras es observado desde el punto D, situado a medio camino entre A y B. Averigua a qué altura h se encuentra el avión, y a qué distancia y con qué ángulo se lo observa desde D.



## El pozo de agua

**63** Calcula los metros que faltan para que el pozo esté lleno de agua.



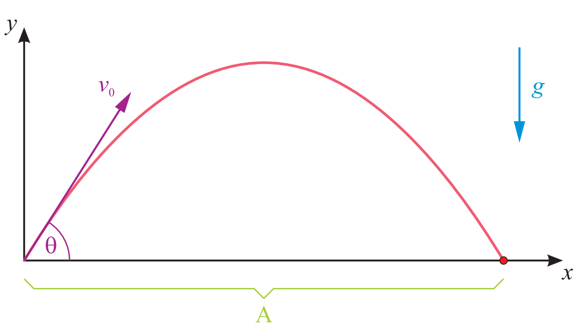

## Pirámides de Egipto

**64** La pirámide de Keops tiene una base cuadrada de 230 m de lado. En un instante, cuando su sombra medida desde su base es de 85 m, se coloca una estaca de 1,46 m de alto precisamente donde acaba la sombra. ¿Qué altura tiene la pirámide si la sombra que proyecta la estaca es de 2 m?

## El alcance del tiro oblicuo

**65** Si no hay resistencia del aire, un proyectil lanzado con un ángulo agudo $\theta$ y una rapidez inicial $v_0$ tiene un alcance A, que se obtiene con la fórmula

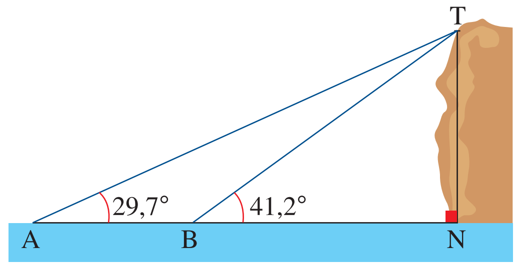
$$A = \frac{(v_0)^2}{g} \cdot \text{sen } 2\theta.$$




Demuestra que existen dos ángulos, $\theta_1 = (45° + a)$ y $\theta_2 = (45° - a)$, que generan el mismo alcance, con $a < 45°$.
Pista: mostrar que $\theta_1$ y $\theta_2$ son complementarios y analizar cómo se comporta el sen $2\theta$ en esos casos.

## La cima del acantilado

**66** Desde un buque se mide el ángulo de elevación hacia la cima de un acantilado y se obtiene una amplitud de 29,7°. El buque navega en línea recta hacia el acantilado y, luego de avanzar 1.473 m, se vuelve a realizar la medición y se obtiene un ángulo de elevación de 41,2 °. ¿Cuál es la altura del acantilado?

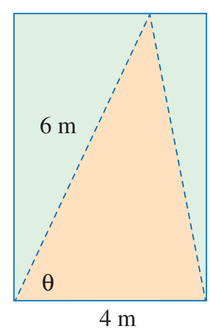



## Distancia entre dos barcos

**67** Dos barcos parten al mismo tiempo de un puerto. El barco A navega 30 km hacia el norte antes de anclar. El barco B navega 65 km con rumbo N 50° E antes de anclar. ¿Cuál es la distancia entre los barcos anclados? Aproxima tu respuesta a los enteros.

## Vela para competir

**68** De una pieza de tela rectangular, se quiere cortar una vela triangular, de modo que dos de sus lados tengan longitudes de 4 m y 6 m, tal como se muestra en la figura. La superficie total de la vela debe ser de 11,6 $m^2$, que es la máxima permitida para que un bote compita en la categoría deseada.




**a.** Calcula la amplitud que debe tener el ángulo $\theta$ para cumplir con la superficie permitida.

**b.** Halla el lado y los ángulos restantes de la vela.

AUTOEVALUACIÓN

## Auxilio en el mar

Una embarcación (E) con problemas en su motor envió un pedido de ayuda, por lo que una lancha de patrulla (P) y un helicóptero (H) salieron en su búsqueda.

Cuando hacen contacto visual, el ángulo de depresión desde el helicóptero hacia la embarcación es de 25°. En ese momento, el ángulo de elevación desde la patrulla al helicóptero es de 65° y la distancia entre ambos es de 250 m.

1. Realiza un esquema que represente las posiciones del helicóptero y las dos embarcaciones al momento del contacto visual. Señala en él los datos y halla la amplitud de los ángulos interiores del triángulo obtusángulo EHP.

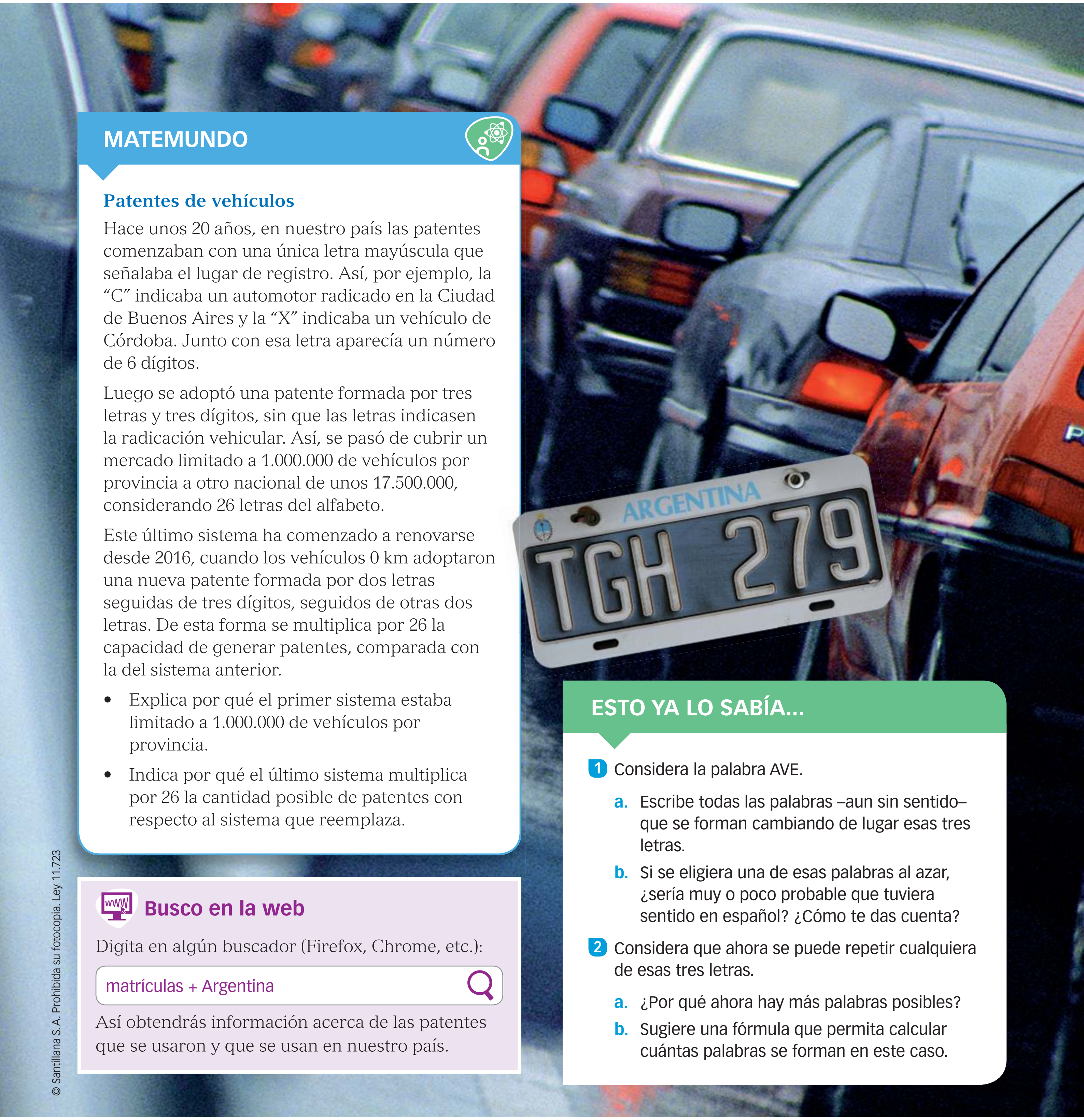
2. Determina la distancia entre la patrulla y la embarcación.

3. Averigua la distancia entre la embarcación y el helicóptero utilizando el ángulo obtuso HPE y las longitudes HP y PE.

4. Halla la altura a la que sobrevuela el helicóptero con dos cálculos distintos, para verificar que los resultados son correctos.

5. Considera el triángulo que se forma entre P y los dos extremos del segmento que representa la altura a la que se halla el helicóptero. Investiga si este triángulo es semejante al EHP utilizando criterios de semejanza.

# 8 Combinatoria y probabilidad




## MATEMUNDO

### Patentes de vehículos

Hace unos 20 años, en nuestro país las patentes comenzaban con una única letra mayúscula que señalaba el lugar de registro. Así, por ejemplo, la "C" indicaba un automotor radicado en la Ciudad de Buenos Aires y la "X" indicaba un vehículo de Córdoba. Junto con esa letra aparecía un número de 6 dígitos.

Luego se adoptó una patente formada por tres letras y tres dígitos, sin que las letras indicasen la radicación vehicular. Así, se pasó de cubrir un mercado limitado a 1.000.000 de vehículos por provincia a otro nacional de unos 17.500.000, considerando 26 letras del alfabeto.

Este último sistema ha comenzado a renovarse desde 2016, cuando los vehículos 0 km adoptaron una nueva patente formada por dos letras seguidas de tres dígitos, seguidos de otras dos letras. De esta forma se multiplica por 26 la capacidad de generar patentes, comparada con la del sistema anterior.

- Explica por qué el primer sistema estaba limitado a 1.000.000 de vehículos por provincia.
- Indica por qué el último sistema multiplica por 26 la cantidad posible de patentes con respecto al sistema que reemplaza.

## Busco en la web

Digita en algún buscador (Firefox, Chrome, etc.):

matrículas + Argentina

Así obtendrás información acerca de las patentes que se usaron y que se usan en nuestro país.

## ESTO YA LO SABÍA...

**1** Considera la palabra AVE.

a. Escribe todas las palabras –aun sin sentido– que se forman cambiando de lugar esas tres letras.

b. Si se eligiera una de esas palabras al azar, ¿sería muy o poco probable que tuviera sentido en español? ¿Cómo te das cuenta?

**2** Considera que ahora se puede repetir cualquiera de esas tres letras.

a. ¿Por qué ahora hay más palabras posibles?

b. Sugiere una fórmula que permita calcular cuántas palabras se forman en este caso.

# Combinatoria

Hay veces en las que necesitamos contar el número de formas de elegir u ordenar ciertos elementos de un conjunto. Para esas situaciones de conteo son útiles las **permutaciones**, las **variaciones** y las **combinaciones**.

**Factorial de $n$**

El factorial de un número natural es el producto de ese número por los naturales anteriores, hasta 1. Por ejemplo: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
Además, $1! = 1$ y $0! = 1$.

## Permutaciones sin repetición

Las **permutaciones** de $n$ elementos distintos ($P_n$) son todas las formas de **ordenarlos** en $n$ lugares. Para calcular ese número se puede emplear el **factorial** de $n$ ($n!$):

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

**EJEMPLO:**

Tres amigas van al cine y encuentran tres asientos vacíos. ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse?

- El primer asiento lo puede ocupar cualquiera de las 3; el segundo, cualquiera de las 2 restantes, y el tercero, la que queda.
- Es decir, hay $3 \cdot 2 \cdot 1$ maneras, que podemos expresar así: $P_3 = 3! = 6$.

## Permutaciones con repetición

Si en una permutación de $n$ elementos uno de ellos se repite $\alpha$ veces, otro se repite $\beta$ veces, etcétera, se trata de una **permutación con repetición** y puede calcularse así:

$$P'_{n,\alpha,\beta,\ldots} = \frac{n!}{\alpha! \cdot \beta! \cdot \ldots}$$

**EJEMPLO:**

¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras de la palabra BANANAS ?

- Calculamos la permutación con repetición, donde $n = 7$, $\alpha = 3$ y $\beta = 2$.
  $P'_{7,3,2} = \frac{7!}{3! \cdot 2!} = 420 \longrightarrow$ Hay 420 palabras distintas.

Se permutan 7 letras, pero intercambiar las repetidas no produce cambios.

## Variaciones sin repetición

Las **variaciones** de $n$ elementos distintos tomados de a $k$ son todas las formas **ordenadas** de armar grupos de $k$ elementos a partir de esos $n$. Pueden calcularse así:

$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (\text{con } k \leq n)$$

$$V_{n,k} = \underbrace{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots}_{k \text{ factores}}$$

**EJEMPLO:**

Ocho atletas compiten en la prueba de 100 metros. ¿De cuántas maneras diferentes puede conformarse el podio con los tres primeros puestos?

- Se tienen 8 atletas para ocupar tres puestos en orden: $n = 8$ y $k = 3$.
  $V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \longrightarrow V_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 336 \longrightarrow$ Hay 336 maneras.

## Variaciones con repetición

Si en una variación cada uno de los $n$ elementos se puede repetir hasta $k$ veces, se trata de una **variación con repetición** y puede calcularse así:

$$V'_{n,k} = n^k$$

**EJEMPLO:**

¿Cuántos números de tres cifras se forman con los dígitos del 1 al 6?

- En este caso, todas las cifras siempre tienen seis posibilidades. Por ejemplo, escribir un 3 para las centenas no impide que volvamos a escribirlo para las decenas y las unidades. Por lo tanto, se trata de variaciones con repetición:

$V'_{n,k} = n^k \rightarrow V'_{6,3} = 6^3 = 216 \rightarrow$ Se forman 216 números.

Aplicando el principio fundamental del conteo:

| C | D | U |
|---|---|---|
| 6 valores | 6 valores | 6 valores |

$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

## Combinaciones

Las **combinaciones** son variaciones en las que no interesa el orden en que se eligen o ubican los elementos seleccionados. Se calculan mediante el **número combinatorio** $C_{n,k}$, que es una combinación de diferentes factoriales.

| Combinaciones sin repetición | Combinaciones con repetición |
|---|---|
| Son los grupos de $k$ elementos –sin orden– que se forman a partir de un conjunto de $n$ elementos distintos. $C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, (con $k \leq n$) | Son combinaciones donde cada uno de los $n$ elementos que se elige se puede repetir hasta $k$ veces. $C'_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ |

**EJEMPLO:**

¿Cuántos grupos de 3 integrantes se pueden formar a partir de 5 alumnos?

- Notemos que no interesa el orden, sino quienes integran el grupo.
- Se trata de una combinación de 5 elementos tomados de a 3:

$C_{5,3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10 \rightarrow$ Se pueden formar 10 grupos.

La calculadora permite obtener permutaciones utilizando la tecla ***x!***, variaciones con ***nPr*** y combinaciones con ***nCr***.

$x!$ $x^{-1}$ | nPr nCr

Por ejemplo, para calcular $C_{5,3}$ hay que teclear:

5 nCr 3 =

**EJEMPLO:**

Se sortean tres viajes entre los diez sectores de una empresa. ¿De cuántas formas se pueden distribuir los premios si pudiera repetirse el sector ganador?

- No importa el orden de los ganadores, sino quienes son. Y como podrían repetirse, se trata de una combinación con repetición:

$C'_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \rightarrow C'_{10,3} = \frac{(10+3-1)!}{3!(10-1)!} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} \rightarrow$ Hay 220 formas.

3 Calcula con y sin repetición de digitos: ¿cuántos números de cuatro cifras se pueden formar con los dígitos 1; 2; 3; 4; 5; 6 y 7?

4 Cuatro turistas llegan a una ciudad donde hay siete hoteles. ¿De cuántas maneras pueden ubicarse si cada uno debe estar en un hotel diferente? ¿Y si más de uno puede ir al mismo hotel?

5 En una caja hay lápices de 10 colores. ¿De cuántas formas distintas se puede completar con ellos una cartuchera con 6 lápices de colores diferentes? ¿Y si los colores pudieran repetirse?

6 ¿Cuántas palabras diferentes (aun sin sentido) se pueden formar con todas las letras de la palabra "esternocleidomastoideo"?

7 ¿De cuántas maneras se pueden sentar 5 personas en 5 sillas colocadas en línea recta? ¿Y si las sillas formaran un círculo?

8 ¿Cuántas claves distintas de 6 letras se pueden crear usando todas las letras del nombre MALALA?

9 En una prueba final de natación, han quedado seis nadadores que disputarán las medallas de oro, plata y bronce. ¿De cuántas formas diferentes se pueden repartir estos premios?

**EJEMPLO:**

¿Cuántos mútiplos de 5 hay que sean de cuatro cifras? Para resolver este tipo de problemas, aplicamos el **principio fundamental del conteo**.

- Unidades de mil: podemos elegir 9 dígitos (1-9).
- Centenas: podemos elegir 10 dígitos (0-9).
- Decenas: podemos elegir 10 dígitos (0-9).
- Unidades: podemos elegir 2 dígitos (0 y 5).

Entonces:

$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = \mathbf{1.800}$

Hay 1.800 números.

| UM | C | D | U |
|---|---|---|---|
| 9 | 10 | 10 | 2 |

10 ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden escribir con los dígitos impares?

11 ¿Cuántos números de nueve cifras se pueden escribir con los dígitos 1; 2 y 3?

12 ¿Cuántos números de cinco cifras se podrán formar con los dígitos 1; 2; 3; 5 y 7 si el 3 siempre debe estar en el medio y se admite repetición?

13 ¿Cuántos números de tres cifras no son pares ni múltiplos de 5?

14 ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas no tienen cifras iguales a 1 ni a 6?

15 En un restaurante hay 3 entradas diferentes, 7 platos principales y 5 tipos de postres. ¿De cuántas maneras distintas se puede armar un menú con entrada, plato principal y postre?

# Binomio de Newton

Elevar un binomio a un exponente natural $n$ es multiplicar $n$ factores iguales.

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n \text{ veces}}$$

Si desarrollamos este producto, veremos que aparecen diferentes términos, todos ellos de la forma $a^r b^s$, donde la suma de esos exponentes da $n$. Por ejemplo, en $(a+b)^3$ aparecen los términos $a^3b^0$, $a^2b^1$, $a^1b^2$ y $a^0b^3$. Observemos que en todos los casos da 3 la suma de los exponentes: 3 + 0; 2 + 1; 1 + 2 y 0 + 3. Y que figuran todas las sumas posibles.
Además, cada uno de esos términos puede aparecer varias veces en el desarrollo del producto. En el siglo XVII, Isaac Newton investigó este desarrollo y descubrió que la cantidad de veces que aparece cada término puede calcularse con un **número combinatorio**.
Aplicando ese hecho, se llega al desarrollo del **binomio de Newton**:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Al número combinatorio $C_{n,\,k}$ también se lo simboliza utilizando paréntesis:

$$\binom{n}{k}$$

**EJEMPLO:**

Desarrolla el binomio $(a+b)^3$.

- Aplicamos el desarrollo de Newton:

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^{3-1} b^1 + \binom{3}{2} a^{3-2} b^2 + \binom{3}{3} a^{3-3} b^3$$

- Con una calculadora, obtenemos cada número combinatorio:

$$\binom{3}{0} = C_{3,\,0} = 1 \qquad \binom{3}{1} = C_{3,\,1} = 3 \qquad \binom{3}{2} = C_{3,\,2} = 3 \qquad \binom{3}{3} = C_{3,\,3} = 1$$

- Finalmente, escribimos el desarrollo del binomio:

$$(a+b)^3 = 1a^3 \mathrm{b}^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

**16** Escribe el desarrollo de los siguientes binomios.

**a.** $(x-y)^3$

**b.** $(a-2)^4$

**c.** $(x+1)^5$

**17** Desarrolla el binomio $(x^2 y^3 - x^3 y^2)^4$.

**18** Indica el binomio y el exponente que le corresponde a cada uno de los siguientes desarrollos.

**a.** $a^4 - 4a^3c + 6a^2c^2 - 4ac^3 + c^4$

**b.** $32 + 80x + 80x^2 + 40x^3 + 10x^4 + x^5$

**c.** $y^{12} + 6y^{11} + 15y^{10} + 20y^9 + 15y^8 + 6y^7 + y^6$

# Probabilidad

## Experimento aleatorio. Suceso

Un experimento es **aleatorio** cuando su resultado no se puede predecir de antemano.

El conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio es el **espacio muestral** (S), y cada uno de estos resultados es un **suceso elemental**.

Si un suceso ocurre siempre, se lo llama **seguro**. Si no ocurre nunca, **imposible**.

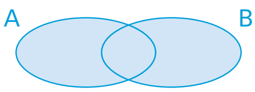
**EJEMPLO:**

Considera el experimento aleatorio de arrojar un dado numerado del 1 al 6. Halla el espacio muestral y menciona un suceso seguro y otro imposible.

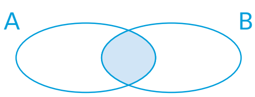
- Determinamos el espacio muestral: $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- Un suceso seguro: "Que salga un número entero del 1 al 6".
- Un suceso imposible: "Que salga un número mayor a 6".

Los sucesos son subconjuntos del espacio muestral. Con ellos se pueden realizar las operaciones de unión e intersección, por ejemplo.

- Unión: $A \cup B$




- Intersección: $A \cap B$




**EJEMPLO:**

Se lanza al aire una moneda dos veces. Identifica los sucesos A: obtener al menos una cara, y B: obtener una cara y un sello. Luego, calcula $A \cup B$ y $A \cap B$.

- Determinamos el espacio muestral y los elementos de los sucesos A y B:

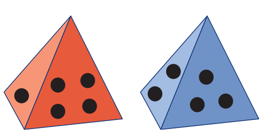
  $S = \{cc, cs, sc, ss\}$ $\quad A = \{cc, cs, sc\}$ $\quad B = \{cs, sc\}$
- Calculamos: $A \cup B = \{cc, cs, sc\}$ y $A \cap B = \{cs, sc\}$

## Probabilidad de un suceso

Si los sucesos elementales del espacio muestral son igualmente posibles, la **probabilidad** de que ocurra un suceso A puede calcularse así:

$$P(A) = \frac{\text{Cantidad de casos favorables}}{\text{Cantidad de casos posibles}}$$

Los resultados **equiprobables** son aquellos que tienen igual probabilidad de salir. Por ejemplo, al lanzar un dado equilibrado, la probabilidad de que salga 1; 2; 3; 4; 5 o 6 es la misma.



**EJEMPLO:**

Se lanzan dos dados tetraédricos. Calcula la probabilidad de que la suma de los números de las bases sea 7.

- Hallamos el número de casos posibles:

  $S = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (3; 4), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (4; 4)\} \rightarrow$ 16 casos
- Hallamos el número de casos favorables al suceso pedido:

  $A = \{(3; 4), (4; 3)\} \rightarrow$ 2 casos
- Calculamos la probabilidad pedida: $P(A) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

## Propiedades de la probabilidad

- Para un suceso A, la probabilidad es un número real entre cero y uno: $0 \leq P(A) \leq 1$.
- La probabilidad del suceso seguro es 1 y la del suceso imposible es 0.
- Si A y B son sucesos del mismo espacio muestral, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

**EJEMPLO:**

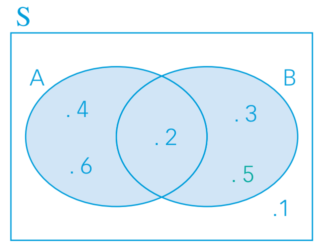
Calcula la probabilidad de que salga un número par o primo al lanzar un dado.

- Determinamos los casos favorables a cada suceso:

  Par $\rightarrow A = \{2; 4; 6\}$ Primo $\rightarrow B = \{2; 3; 5\}$ Par y primo $\rightarrow A \cap B = \{2\}$

- La probabilidad de que salga par o primo $(A \cup B)$ es:

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$




$A \cup B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$

$P(A \cup B) = \frac{5}{6}$

## Sucesos compatibles e incompatibles

Dos sucesos son compatibles cuando tienen algún suceso elemental común.
Dos sucesos son incompatibles (**mutuamente excluyentes**) cuando no tienen ningún suceso elemental común. Su intersección es vacía y su probabilidad es nula: $P(A \cap B) = 0$.

**EJEMPLO:**

Se lanza un dado. Determina si los sucesos “Salir un número par” (A), y “Salir un divisor de 5” (B) son compatibles o incompatibles.

- Hallamos los casos favorables:

  $A = \{2; 4; 6\}$ y $B = \{1; 5\}$. Como $A \cap B = \varnothing$, entonces son sucesos incompatibles.

**Sucesos complementarios**

Dado un suceso A, el suceso complementario o contrario (A') está formado por todos los sucesos elementales del espacio muestral que no están en A.

**19** Determina el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios.

a. Lanzar una moneda de \$1 y otra de \$2.

b. Lanzar dos monedas iguales.

**20** Se lanza al aire una moneda cinco veces. Menciona un suceso seguro y otro imposible.

**21** Se extrae una de las 52 cartas de una baraja francesa. Determina la probabilidad de los siguientes sucesos.

a. Sacar una figura y trébol.

b. Sacar una figura o trébol.

c. No sacar trébol.

**22** Se lanza un dado y se considera:
“Obtener un número par” (A).
“Obtener un número menor que 4” (B).

a. Calcula $A \cap B$.

b. Calcula $A \cup B$.

c. ¿A y B son incompatibles?

d. Determina los sucesos complementarios a A, B, $A \cap B$ y $A \cup B$.

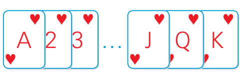
# Probabilidad condicional

## Sucesos independientes

Dos sucesos son **independientes** cuando la ocurrencia de uno no influye en la probabilidad del otro. Entonces, la probabilidad de que ocurran ambos sucesos es:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Al reponer la carta extraída en el primer suceso, la probabilidad del segundo suceso no queda afectada, ya que la baraja mantiene los 13 corazones y las 52 cartas iniciales.




**EJEMPLO:**

De una baraja de 52 cartas, se extraen dos en forma sucesiva y con reposición. Calcula la probabilidad de que ambas cartas sean de corazones.

- Calculamos la probabilidad de cada suceso:

  P(A): Salir corazón en la primera extracción. ▶ $P(A) = \frac{13}{52}$

  P(B): Salir corazón en la segunda extracción. ▶ $P(B) = \frac{13}{52}$ (Con reposición)

- Determinamos la probabilidad de que ocurran ambos sucesos:

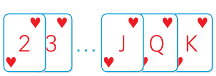
  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \longrightarrow P(A \cap B) = \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

## Sucesos dependientes: probabilidad condicional

Dos sucesos son **dependientes** cuando el resultado del primero condiciona la probabilidad del segundo. Entonces, la probabilidad de que ocurran ambos sucesos se calcula multiplicando la probabilidad del primero (P(A)) por la del segundo habiendo ocurrido el primero (P(B/A)).

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Como la 1.ª carta fue de corazón y no se repuso, la probabilidad del segundo suceso queda afectada, ya que ahora quedan 12 corazones y 51 cartas en el mazo.




**EJEMPLO:**

De una baraja de 52 cartas, se extraen dos en forma sucesiva y sin reposición. Calcula la probabilidad de que ambas cartas sean de corazones.

- Calculamos la probabilidad de cada suceso:

  P(A): Salir corazón en la primera extracción. ▶ $P(A) = \frac{13}{52}$

  P(B/A): Salir corazón en la segunda extracción, habiendo salido corazón en la primera extracción. ▶ $P(B/A) = \frac{12}{51}$ (Sin reposición)

- Determinamos la probabilidad condicional de que ocurran ambos sucesos:

  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) \longrightarrow P(A \cap B) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{1}{17}$

**23** De una baraja de 52 cartas, se extraen dos en forma sucesiva y con reposición. Calcula la probabilidad de que la primera sea roja y la segunda sea un as.

**24** Se extraen dos cartas de una baraja de 52. Si la primera carta extraída se devuelve a la baraja, calcula la probabilidad de que en ambas extracciones salgan ases.

**25** De una baraja de 52 cartas, se extraen dos sin reposición. Calcula la probabilidad de que ambas cartas sean menores que 10.

**26** De una baraja de 52 cartas, se extraen dos en forma sucesiva y sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas cartas sean de tréboles?

**27** De una bolsa que contiene tres tarjetas rojas y ocho tarjetas azules, se extraen sucesivamente dos tarjetas sin reposición. Calcula la probabilidad de que la primera tarjeta extraída sea roja y la segunda azul.

**28** De una urna que contiene seis bolillas blancas y nueve bolillas negras, se extraen dos en forma consecutiva y sin reposición. Calcula la probabilidad de que ambas bolillas sean blancas.

**29** En una urna hay diez bolillas: tres rojas, cuatro azules y el resto, amarillas. Si se extraen dos bolillas al azar y sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que la primera sea roja y la segunda no lo sea?

**30** Una urna contiene cinco bolillas rojas, cuatro azules, seis verdes y cinco amarillas. Si se extraen tres bolillas consecutivamente y sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que la primera sea roja, la segunda azul y la tercera verde?

**31** Calcula lo siguiente:

a. $1! + 2! + 3!$ b. $6! - 5!$ c. $3! - 2! + 1!$

d. $5 \cdot 7!$ e. $3! \cdot 6!$ f. $(4!)^{2!}$

**32** Para resolver lo que sigue, considera que:

$$\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)\cdot n!}{n!} = (n+1)$$

a. Halla el valor de $\dfrac{(x+3)!}{(x+2)!}$ si $x = 197$.

b. Halla el valor de $\dfrac{99! + 100!}{98!}$.

**33** Escribe el valor de las siguientes expresiones:

a. $P'_{3;\,2}$ b. $V_{8;\,4}$ c. $P_6$

d. $V'_{6;\,3}$ e. $C_{9;\,8}$ f. $C'_{7;\,2}$

**34** ¿Cuántos números de cuatro cifras existen?

**35** ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar con todas las letras de la palabra COCOROCO?

**36** ¿Cuántos números pares de cinco cifras existen?

**37** ¿Cuántos números de dos cifras se pueden escribir con los dígitos 1; 3; 4; 7; 8 y 9?

**38** En una cena de Navidad se distribuyen seis invitados alrededor de una mesa. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ubicarse?

**39** ¿Cuántos números de cuatro cifras diferentes existen en el sistema de base 7?

**40** Eduardo, Alejandra, César, Patricia, Alfredo y Omar son candidatos a los cargos de presidente y secretario del Consejo Estudiantil de su escuela. Se debe escribir en el voto un nombre para presidente y otro nombre para secretario.
¿De cuántas maneras distintas se puede votar?

**41** Aldo tiene 5 pantalones, 3 camisas y 2 pares de zapatos, todos diferentes. ¿De cuántas formas distintas puede vestirse?

**42** Para ir de la ciudad A a la ciudad B hay tres rutas posibles, y para ir de la ciudad B a la ciudad C hay 4 rutas posibles. ¿De cuántos modos distintos se puede ir a C y regresar a A pasando siempre por B si es requisito no regresar nunca por la misma ruta que se usó a la ida?

**43** De los 40 estudiantes de una clase, el 30% practica vóley, el 50% practica fútbol, el 10% practica natación y el resto no practica ningún deporte. ¿Cuántos grupos de 3 estudiantes se pueden armar donde todos practiquen el mismo deporte?

**44** Se lanzan dos dados. Determina lo siguiente.

a. El espacio muestral.

b. Dos sucesos compatibles.

c. Dos sucesos incompatibles.

d. Dos sucesos complementarios.

**45** Escribe **siempre**, **a veces** o **nunca** según el caso.

a. La probabilidad de un suceso ________ es 0,5.

b. La probabilidad ________ es 1 si el suceso es imposible.

c. Si A y B son sucesos independientes, ________ se cumple que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

**46** Se elige al azar uno de los cincuenta primeros números naturales no nulos. Calcula la probabilidad de que el número elegido sea cuadrado perfecto.

**47** En una bolsa hay doce bolillas numeradas del 1 al 12. Si se extrae una al azar, calcula la probabilidad de obtener lo siguiente.

a. Un número múltiplo de 2 o de 3.

b. Un número par o múltiplo de 5.

c. Un número múltiplo de 3 y de 5.

**48** Se lanzan tres monedas. Calcula cada probabilidad.

a. Obtener al menos dos caras.

b. Obtener tres resultados iguales.

**49** Se lanzan dos dados al mismo tiempo. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

a. Obtener cifras pares.

b. Obtener números menores que 5.

c. Obtener una suma menor que 8.

**50** De una caja que contiene siete bolillas azules y once amarillas, se extraen dos bolillas, una tras otra. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean amarillas?

**51** Desarrolla $(x + 2)^8$.

## Bailando el tango

**52** En el colegio, 24 varones y 36 mujeres concurren al taller de tango.

a. ¿Cuántas parejas distintas mujer-varón se pueden formar para bailarlo?
b. Si los varones fueron a un torneo de fútbol, ¿cuántas parejas distintas podrán formar las chicas?

## La generala

**53** En el juego de la generala se arrojan 5 dados a la vez, numerados del 1 al 6. Los números pueden repetirse y no importa el orden en que aparecen.

a. ¿Cuántos resultados distintos pueden obtenerse?
b. ¿Cuántas "generalas" (5 números iguales) pueden obtenerse?
c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener "generala"?

## El loto

**54** En un juego del loto hay que elegir seis números desde el 1 hasta el 42, sin importar el orden.

a. ¿Cuál es la probabilidad de acertar los seis números que saldrán ganadores?
b. ¿Cuál es la probabilidad de acertar cinco de los seis números ganadores?
c. ¿Cuál es la probabilidad de no acertar ninguno de los seis números ganadores?



## Dadores de sangre

**55** Doscientas personas se presentan en un hospital para donar sangre. La tabla muestra cuántas tienen cada tipo de factor sanguíneo.

| Grupo | Donantes |
|---|---|
| O | 110 |
| A | 64 |
| B | 20 |
| AB | 6 |

a. Si se elige al azar a una de esas personas, ¿cuál es la probabilidad de que su sangre sea tipo B?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea tipo B?
c. Si los primeros cinco donantes fueron de tipo O, ¿cuál es la probabilidad de que el próximo no lo sea?

## Tecnología médica

**56** Se sabe que el 75% de las personas que padece una enfermedad específica se cura con cierto medicamento. Si se eligen al azar a dos personas que sufren de dicha enfermedad y se les administra el medicamento, ¿cuál será la probabilidad en los siguientes casos?

a. Que ambas personas sanen.
b. Que ninguna persona sane.
c. Que solo una persona sane.

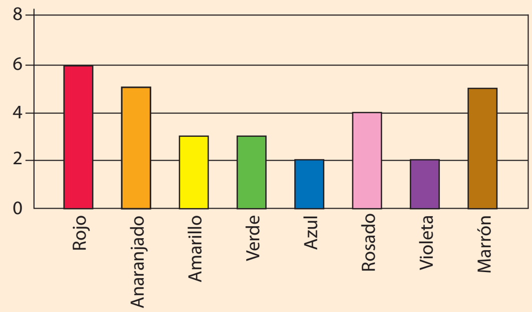
## Tecnología en la industria

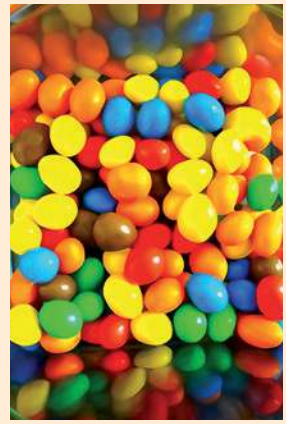
**57** De cada 1.000 piezas que produce una fábrica 25 son defectuosas. Si se prueban dos piezas, ¿cuál es la probabilidad de que una sea defectuosa?

# AUTOEVALUACIÓN

## Caramelos de colores

Una bolsa contiene caramelos de diferentes colores. La cantidad que hay de cada color se ha registrado en el gráfico que se muestra. Por ejemplo, hay 6 caramelos rojos y 5 anaranjados.



1. ¿Cuál es la probabilidad de sacar al azar un caramelo que sea rojo?

2. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un caramelo azul o marrón?

3. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un caramelo cuyo color no empiece con "V"?

4. Si se sacó al azar un caramelo rosado, se lo devolvió a la bolsa y el próximo caramelo también fue rosado, ¿se trató de sucesos independientes? Explica.

5. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un caramelo amarillo sabiendo que antes se sacó (y comió) uno anaranjado?

6. ¿Qué término de $(x + 2)^6$ tiene el coeficiente igual al doble del total de caramelos?

# SOLUCIONES

Las respuestas que no figuran quedan a cargo del alumno.

# 1 Números reales

## MATEMUNDO

A 4 km.

**1.** **a.** 31/41 **b.** 3

**2.** **a.** 0,173 **b.** 23,079 **c.** 6,275

**3.** **a.** 1.2 **b.** $4,\overset{\frown}{3}$
**c.** $0,2\overset{\frown}{5}$ **d.** –1

**4.** 1.999, N, Z, Q.
–6, Z, Q.
–1.4, Q.
$1,3\overset{\frown}{5}$, Q.
$1,\overset{\frown}{58}$, Q.

**6.** 1

**7.** 2

**8.** 5/6

**9.** 14/17

**10.** 9/10 y 18/20.

**11.** **a.** Q **b.** I **c.** I
**d.** Q **e.** I **f.** Q
**g.** Q **h.** Q

**12.** En todos los casos, se trata de algunos ejemplos.
**a.** –4,10110111011110.... y 3,10110111011110...
**b.** $\sqrt{2}$ y $\sqrt{18}$.
**c.** $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$.

**13.** **a.** Con un triángulo rectángulo de catetos 4 y 1.

**b.** Con un triángulo rectángulo de catetos $\sqrt{3}$ y 4.

**14.** Q, R.
Z, Q, R.
I, R.
N, Z, Q, R.
Q, R.
I, R.

**15.** $3\sqrt{5}$; 48/7; 62/9; 7,04; $\sqrt{50}$.

**16.** Por ejemplo, 7,05.

**17.** **a.** A veces. **b.** Siempre. **c.** Siempre.
**d.** A veces. **e.** Nunca. **f.** Siempre.

**18.** **a.** $\{x \in R / -4 < x \leq 3\}$
**b.** $\{x \in R / x \leq 6\}$
**c.** $\{x \in R / x > 3\}$

**19.** Al intervalo [–17; 16].

**20.** **a.** $(-\infty; 1) \cup [5; +\infty)$ **b.** $(-\infty; -4) \cup [5; 7)$

**21.** **a.** S = {–2/3; 4} **b.** S = {2/7; 6/7}

**22.** **a.** x = 4 **b.** x = –1

**23.** **a.** $S = (-\infty; 7/11] \cup [1; +\infty)$
**b.** S = [–9/2; 3]

**24.** **a.** $\sqrt{5} + \frac{37}{5}\pi$ **b.** $\sqrt{3} - \frac{37}{6}\pi$
**c.** $\frac{127}{9} + \pi - \sqrt{2}$ **d.** $\frac{1.507}{315} - \sqrt{5}$

**25.** 8,49

**26.** –4,9

**27.** Área capa de agua: 153,61 $m^2$.
Área vereda: 71,72 $m^2$.

**28.** $24.710,72

**29.** 0,041 mm

**30.** Toda la propiedad: 281,60 $m^2$.
Jardín: 142,37 $m^2$.

**31.** Área: 38,36 $cm^2$. Perímetro: 20,16 cm.

**32.** **a.** $x^{ab}$ **b.** $6^n$
**c.** $4^{m+2}$ **d.** p

**33.** 30

**34.** 1,25

**35.** 25

**36.** a. $x = 6$ b. $x = 5$
c. $x = 20/17$ d. $x = 10$

**37.** $x = 5$

**38.** $89^2 = 7.921$

**39.** a. 1 b. 16

**40.** a. $x^{mp/n}$ b. $x^{1/a + 1/ab}$
c. $x^d$ d. $x^{d/ac + b/a}$

**41.** a. 27 b. 8

**42.** $x = 5$

**43.** $a \cdot b$

**44.** a. 6,51 s b. 6,83 s

**45.** a. $6\sqrt{2}$ b. $2\sqrt[3]{7}$
c. $3\sqrt[4]{5}$ d. $2\sqrt[5]{3}$
e. $m^3n^5\sqrt[3]{m^2n^2}$ f. $2m^2\sqrt[5]{4m^2}$

**46.** a. $\sqrt[30]{7^{10}}$ b. $\sqrt[30]{2^6}$
c. $\sqrt[30]{2^{10}a^{20}}$ d. $\sqrt[30]{2^6p^{12}q^{30}}$

**47.** a. $\sqrt[6]{2^3}$ y $\sqrt[6]{3^2}$ b. $\sqrt[15]{6^3}$ y $\sqrt[15]{77}$
c. $\sqrt[21]{m^{12}}$ y $\sqrt[21]{x^{14}}$ d. $\sqrt[84]{a^{105}}$ y $\sqrt[84]{n^{196}}$

**48.** a. $\sqrt{2} - 8\sqrt{3}$ b. $3\sqrt[3]{5} + \sqrt[4]{2}$
c. 24 d. $-1$

**49.** a. Perímetro: $(2\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{11})$ cm.
Área: $4\sqrt{6}$ cm$^2$.
b. Perímetro: $4 \cdot (3\sqrt{3} + \sqrt{10})$ cm.
Área: $12\sqrt{30}$ cm$^2$.

**50.** a. $\frac{6}{5}\sqrt{10}$ b. $\frac{\sqrt{12}}{12}$ c. $\frac{7\sqrt[3]{2^2}}{2}$
d. $6\sqrt[4]{3}$ e. $\frac{15\sqrt[3]{4a}}{4a^2}$ f. $\frac{18\sqrt[4]{x^3y}}{x^2y^2}$

**51.** a. $\frac{13 \cdot (\sqrt{13} + \sqrt{5})}{8}$ b. $5 + 2\sqrt{6}$
c. $3 \cdot (3\sqrt{3} - 2\sqrt{5})$ d. $\frac{m}{2a} \cdot (\sqrt{3a} + \sqrt{a})$

**52.** a. $a_n = \frac{n}{n+3}$ b. $a_n = \frac{n^2}{n^2+3}$
c. $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ d. $a_n = \frac{2n-1}{4n}$

**53.** $a_n = \frac{2n}{2(n+1)+1}$ $a_{100} = \frac{200}{203}$

**54.** $a_n = \frac{n^2}{n+2}$ $a_{30} = \frac{225}{8}$

**55.** $a_n = -\frac{3n-1}{n+6}$ $a_{18} = -\frac{53}{24}$

**58.** Para 3 personas: \$800.
Para 4 personas: \$600.
Para 5 personas: \$480.
Para 6 personas: \$400.

Para n personas: $\frac{2.400}{n}$. Es decreciente.

**59.** 4,5 kg

**60.** a. 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16.
b. $a_n = 4 + 2\,(n - 1)$
c. El día 20.

**61.** a. 1, 4, 16, 64, 256, 1.024.
b. $a_n = 4^{n-1}$
c. 262.144

**62.** a. De sumas: $a_n = -7 + 5\,(n - 1)$.
b. De multiplicaciones: $a_n = 1,5 \cdot 3^{n-1}$.
c. De multiplicaciones: $a_n = 5 \cdot (-2)^{n-1}$.
d. De sumas: $a_n = 7 + 0,5\,(n - 1)$.

## REPASO TODO

**63.** Racional. Da $2^9$.

**64.** b. Es acorde.
c. Por ejemplo, 1; 1,5 y $\pi$.

**65.** El 2.º: $(-3; 6]$. El 4.º: $(-\infty; -6] \cup [-1; +\infty)$.

**66.** a. I. $(-\infty; 1]$ II. $(-3; 1)$
III. $[-1; 5/3)$ IV. $(-\infty; -2) \cup (6/5; +\infty)$
b. Unión: $(-\infty; 1]$. Intersección: $(-3; 1)$.

**67.** 4

**68.** 1

**69.** De 27 pulgadas; 110,69 cm y 62,26 cm, aproximadamente.

**70.** **a.** $\left(\frac{b}{a}\right)^n$ **b.** $-a$
**c.** $\sqrt[b]{a}$ **d.** $a^n$

**71.** **a.** $2\sqrt[7]{5}$ **b.** $3\sqrt[8]{9}$
**c.** $5\sqrt[3]{14}$ **d.** $3a^2b^3\sqrt[3]{3ab}$
**e.** $-3p^4\sqrt[5]{2p^3}$ **f.** $7^3m^4n^{10}\sqrt[4]{7m^3n^3}$

**72.** **a.** $x = 2$ **b.** $x = 8$

**73.** $-11/8$

**74.** **a.** $5\sqrt{5}$ **b.** $\frac{4}{3} + \sqrt[3]{9}$

**75.** **a.** $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$ $a_{10} = \frac{1}{\sqrt{10} + \sqrt{11}}$

**b.** $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

**c.** Es decreciente.

## ACTIVIDADES MATEMUNDO

**76.** La primera es más precisa. En 2018, $36,96.

**77.** $2,125

**78.** 8,5 Ω

**79.** 2,52 m/s

**80.** $16.843,20

**81.** $2{,}75 \cdot 10^{10}$

**82.** $6.300

# 2 Funciones

## MATEMUNDO

–4,5 m y 4,5 m.

**1.** **a.** –11 **b.** 29
**c.** –36 **d.** 5m – 1

**2.** **a.** Recta que pasa por (0; 6) y (–6; 0).
**b.** Recta que pasa por (0; 1) y (1; –1).

**3.** **a.** $R - \{-2\}$ **b.** $R - \{1\}$
**c.** $[9; +\infty)$ **d.** $[3{,}5; +\infty)$
**e.** $(-\infty; 1) \cup [2; +\infty)$ **f.** $(-8; 5]$

**4.** **a.** $R - \{-4; -3\}$ **b.** $R - \{1; 8\}$

**5.** **a.** $R - \{0\}$ **b.** $R - \{-1\}$
**c.** $[0; +\infty)$ **d.** $[-3; +\infty)$

**6.** **a.** $[0; 1) \cup [1; +\infty)$ **b.** $[0; +\infty)$
**c.** $[4; +\infty)$ **d.** $(-\infty; 1)$

**7.** Para la función f:
Puntos de corte: (–4; 0), (–2; 0), (0; 8).
$C^0 = \{-4; -2\}$
$C^+ = (-\infty; -4) \cup (-2; +\infty)$
$C^- = (-4; -2)$

Para la función g:
Puntos de corte: (0; 0).
$C^0 = \{0\}$ $C^+ = (0; +\infty)$ $C^- = (-\infty; 0)$

Para la función h:
Puntos de corte: (2; 0), (–2; 0).
$C^0 = \{2\}$ $C^+ = (2; +\infty)$ $C^- = (-\infty; 2)$

Para la función i:
Puntos de corte: (0; –4).
$C^0 = \varnothing$ $C^+ = \varnothing$ $C^- = R$

**8.** **a.** Puntos de corte: (0; 0).
$C^0 = \{0\}$ $C^+ = (0; +\infty)$ $C^- = (-\infty; 0)$

**b.** Puntos de corte: (0,75; 0), (0; 3).
$C^0 = \{0{,}75\}$ $C^+ = (-\infty; 0{,}75)$
$C^- = (0{,}75; +\infty)$

c. Puntos de corte: (–2; 0), (2; 0).
$C^0 = \{-2; 2\}$ $C^+ = (-2; 2)$
$C^- = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

d. Puntos de corte: (–2; 0), (0; 8).
$C^0 = \{-2\}$ $C^+ = (-2; +\infty)$ $C^- = (-\infty; -2)$

e. Puntos de corte: (0; 0), (5; 0).
$C^0 = \{0; 5\}$ $C^+ = (-\infty; 0) \cup (5; +\infty)$
$C^- = (0; 5)$

f. Puntos de corte: (0; –1).
$C^0 = \varnothing$ $C^+ = \varnothing$ $C^- = R$

**9.** Si b = 0, tiene solo el (0; 0). En caso contrario, tiene dos.

**10.** Uno, es el punto (0; c).

**11.** Tres.

**12.** a. f(x) = 2,10 x + 350
b. Es una recta que pasa por (0; 350) y (10; 371).
c. El dominio en el contexto del problema es $[0; +\infty)$. No tiene sentido considerar la intersección con el eje x.

**13.** Crece en los intervalos $(-2; 1) \cup (4; 6) \cup (8; 9]$.
Decrece en los intervalos $[-6; -2) \cup (1; 4) \cup (6; 8)$.
Máximos relativos: 4 para x = 1; 1 para x = 6; 2 para x = 9.
Máximo absoluto para x = 1.
Mínimos relativos: 2 para x = –2; –2 para x = 4; –1 para x = 8.
Mínimo absoluto para x = 4.
Imagen de g: [–2; –4].

**16.** f no es par ni impar.
g es impar.
h es par.
i no es par ni impar.

**18.** a. Es par.
b. No es par ni impar.
c. No es par ni impar.
d. Es impar.
e. Es par.
f. Es impar.

**19.** a. El período es 2.
b. No es periódica.
c. El período es 5.

**20.** a. Crece en
$(-4 + 10n; -2 + 10n) \cup (0 + 10n; 2 + 10n)$.
b. Decrece en
$(-2 + 10n; 0 + 10n) \cup (2 + 10n; 6 + 10n)$.
c. Máximo absoluto 8 para x = 2 + 10n.
Máximo relativo 2 para x = 8 + 10n.
Mínimo absoluto –1 para x = 6 + 10n.
Mínimo relativo 1 para x = 0 + 10n.
d. Imagen de f : [–1; 8].

**21.** a. No es par ni impar. El gráfico tiene vértice en (–4; 0).
Dom f = R. Im f = $[0; +\infty)$. Crece en $(-4; +\infty)$.
Decrece en $(-\infty; -4)$.
$C^+ = (-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$. $C^- = \varnothing$.
b. Es par. El gráfico tiene vértice en (0; –7).
Dom f = R.
Im f = $[-7; +\infty)$. Crece en $(0; +\infty)$.
Decrece en $(-\infty; 0)$.
$C^+ = (-\infty; -7) \cup (7; +\infty)$. $C^- = (-7; 7)$.
c. No es par ni impar. El gráfico tiene vértice en (–2; 0).
Dom f = R. Im f = $(-\infty; 0)$. Crece en $(-\infty; -2)$.
Decrece en $(-2; +\infty)$.
$C^+ = \varnothing$. $C^- = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.
d. No es par ni impar. El gráfico tiene vértice en (3; 0).
Dom f = R. Im f = $(-\infty; 0)$. Crece en $(-\infty; 3)$.
Decrece en $(3; +\infty)$.
$C^+ = \varnothing$. $C^- = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

**22.** a. (0; –7)
b. (4; 1)

**23.** a. Dom f = R. Im f = $[0; +\infty)$. Vértice en (0; 0), f es par y pasa por (1; 2).
b. Dom f = R. Im f = $[0; +\infty)$. Vértice en (0; 0), f es par y pasa por (1; 5).
c. Dom f = R. Im f = $[0; +\infty)$. Vértice en (–1/3; 0). Pasa por (0; 1) y (–1; 2).
d. Dom f = R. Im f = $[0; +\infty)$. Vértice en (–3; 0). Pasa por (0; 6) y (–6; 6).
e. Dom f = R. Im f = $[-2; +\infty)$. Vértice en (0; –2).
f. Dom f = R. Im f = $[5; +\infty)$. Vértice en (0; 5), f es par y pasa por (1; 10).

**24.** a. $(-1/4; 0)$ b. $(-3; 0)$
c. $(0; -6)$ d. $(0; 12)$
e. $(0{,}2; 0{,}2)$ f. $(-1/3; 1/3)$

## REPASO TODO

**25.** a. Dom h = R b. Dom i = R
c. Dom f = R – {11} d. Dom g = $[-2; +\infty)$

**26.** Dom h = R – {2} Dom g = R
Im f = R – {–1} Im g = $[-2; 4]$

**27.** a. Dom f = R. Im f = $[0; +\infty)$. Parábola con vértice en (0; 0), f es par y pasa por (1; 3).
b. $h(x) = -3x^2$. Dom h = R. Im h = $(-\infty; 0]$.

**28.** Crece en $(1; 2) \cup (3; 4) \cup (5; 6)$.
Decrece en $(2; 3) \cup (4; 5)$.
Máximos relativos: 4 para x = 2; 6 para x = 4 (absoluto).
Mínimos relativos: 3 para x = 3; 2 para x = 5 (absoluto).

**29.** a. Es impar.
b. Es par.
c. No es par ni impar.
d. No es par ni impar.

**30.** El primero (período 2,5) y el tercero (período 1).

**31.** Período: 5; f(6) = 1, f(8) = –1, f(10) = 2.

**32.** a. Dom f = R. Im f = R. No es par ni impar.
Crece en R.
$C^+ = (-1/2; +\infty)$. $C^- = (-\infty; -1/2)$.
b. Dom f = R. Im f = $[2; +\infty)$. No es par ni impar.
Vértice en (7; 2). Crece en $(7; +\infty)$.
Decrece en $(-\infty; 7)$.
$C^+ = R$. $C^- = \varnothing$. $C^0 = \varnothing$.
c. Dom g = R. Im g = $[0; +\infty)$. No es par ni impar.
Vértice en (–5; 0). Crece en $(-5; +\infty)$.
Decrece en $(-\infty; -5)$.
$C^+ = R - \{-5\}$. $C^- = \varnothing$. $C^0 = \{-5\}$.
d. Dom g = $[5; +\infty)$. Im g = $[0; +\infty)$. No es par ni impar.
Crece en $[5; +\infty)$.
$C^+ = (5; +\infty)$. $C^- = \varnothing$. $C^0 = \{5\}$.

**33.** a. $A(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$
b. Dom A = [0; 10].
c. $A(\sqrt{50}) = 50$ es un máximo.
d. El dominio es [–10; 10]. Es distinto porque no se contempla que las imágenes no sean negativas.

**34.** El vértice de g es (2; 0). Su ordenada es un mínimo.
El vértice de h es (–1; 0). Su ordenada es un máximo.

## ACTIVIDADES MATEMUNDO

**35.** a. 135
b. Al cabo de 1 año: 60. Al cabo de 2 años: 15.
c. 3 años.
d. f(0) = 135 (ítem a). f(3) = 0 (ítem c).
e. [0; 3]

**36.** a. N(0) = 300. N(4) = 500. N(24) = 1.500.
b. Es creciente.
c. Porque la función vale 0 para t = –6 y no tiene sentido una cantidad negativa de horas.

**37.** a. 1,2 segundos; 0,6 segundos; 0,8 segundos.
b. La 1 corresponde al que padece bradicardia; la 2, al que tiene taquicardia; la 3, al normal.

**38.** a. Se congeló.
c. $C^+ = [0; 5)$. $C^- = (5; 8]$.

# 3 Función cuadrática

## MATEMUNDO

Recta y parábola.

**1.** a. 4 y 6. b. 3 y 5.

**2.** a. Mínimo. b. Máximo.

**3.** a.

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |
| $g(x)$ | 27 | 12 | 3 | 0 | 3 | 12 | 27 |
| $h(x)$ | –27 | –12 | –3 | 0 | –3 | –12 | –27 |
| $r(x)$ | 9/4 | 1 | 1/4 | 0 | 1/4 | 1 | 9/4 |

c. Las ramas de g están más cerradas.
d. Son simétricos con respecto al eje x.
e. Por ejemplo, $s(x) = 1/5\ x^2$.
f. Por ejemplo, $t(x) = 4x^2$.
g. $u(x) = -1/4\ x^2$.

**4.** a. $f(x) = -2x^2$ b. $f(x) = 1/3\ x^2$
c. $f(x) = x^2$ d. $f(x) = 4x^2$

**5.** a.

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |
| $g(x)$ | 11 | 6 | 3 | 2 | 3 | 6 | 11 |
| $h(x)$ | 7 | 2 | –1 | –2 | –1 | 2 | 7 |
| $j(x)$ | 22 | 12 | 6 | 4 | 6 | 12 | 22 |

c. El de g es igual al de f, pero desplazado 2 unidades hacia arriba. El de h es igual al de f, pero desplazado 2 unidades hacia abajo.
d. El vértice de j está 4 unidades más arriba que el de f y sus ramas son más cerradas.

**6.** a. V = (1; 1); x = 1.
b. V = (1/4; 7/8); x = 1/4.
c. V = (0; 7); x = 0.
d. V = (1/6; –1/12); x = 1/6.

**7.** a. Mínimo: 0. Im f = [0; +∞).
b. Máximo: –7/8. Im f = (–∞; –7/8].

**8.** a. V = (3/4; 9/8); es un máximo.

**9.** a. $x_1 = -4$; $x_2 = 6$.
b. $x_1 = -2$; $x_2 = -3$.
c. $x_1 = -27/5$; $x_2 = -1$.
d. $x_1 = -2/3$; $x_2 = -1/2$.
e. $x_1 = -6$; $x_2 = 6$.
f. $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

**10.** a. $x_1 = -3$; $x_2 = 4$. b. $x_1 = -2$; $x_2 = 3$.
c. $x_1 = 4$; $x_2 = 9$. d. $x_1 = -5$; $x_2 = 7$.
e. $x_1 = -5$; $x_2 = 2$. f. $x_1 = -5$; $x_2 = 8$.

**11.** a. a = –4,9; b = 58,8; c = 0.
b. En t = 0 y t = 12.

**12.** A 40,2 m, aproximadamente.

**13.**

| Ecuación | Δ | N.º de raíces |
|---|---|---|
| $5x^2 - 10x = 0$ | 100 | 2 |
| $18x^2 + 24x + 8 = 0$ | 0 | 1 |
| $3x^2 + 18x + 27 = 0$ | 0 | 1 |
| $7x^2 + 14x - 7 = 0$ | 392 | 2 |
| $6x^2 = 0$ | 0 | 1 |

**14.** a. m = 5
b. m = 3
c. m = –3/2

**15.** a. Dom f = R. Im f = [0; +∞).
V = (–2; 0). Eje de simetría: x = –2.
Mínimo: 0. Crece en (–2; +∞).
Decrece en (–∞; –2).
Cortes con los ejes: (–2; 0) y (0; 4).
$C^0 = \{-2\}$. $C^+ = R - \{-2\}$. $C^- = \varnothing$.

b. Dom g = R. Im g = (–∞; 9].
V = (2; 9). Eje de simetría: x = 2.
Máximo: 9. Crece en (–∞; 2).
Decrece en (2; +∞).
Cortes con los ejes: (–1; 0), (5; 0) y (0; 5).
$C^0 = \{-1; 5\}$. $C^+ = (-1; 5)$.
$C^- = (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

**16.** a. La parábola es cóncava.
Dom f = R. Im f = [–25/4; +∞).
V = (–1/2; –25/4). Eje de simetría: x = –1/2.

Mínimo: $-25/4$, para $x = -1/2$.
Crece en $(-1/2; +\infty)$. Decrece en $(-\infty; -1/2)$.
Cortes con los ejes: $(-3; 0)$, $(2; 0)$ y $(0; -6)$.
$C^0 = \{-3; 2\}$. $C^+ = (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.
$C^- = (-3; 2)$.

**b.** La parábola es cóncava.
Dom $g = R$. Im $g = [-64; +\infty)$.
$V = (-6; -64)$. Eje de simetría: $x = -6$.
Mínimo: $-64$, para $x = -6$.
Crece en $(-6; +\infty)$. Decrece en $(-\infty; -6)$.
Cortes con los ejes: $(-14; 0)$, $(2; 0)$ y $(0; -28)$.
$C^0 = \{-14; 2\}$. $C^+ = (-\infty; -14) \cup (2; +\infty)$.
$C^- = (-14; 2)$.

**17.** El de f es el de la derecha; el de g es el de la izquierda.

**18.** 2,5 m; al cabo de 0,4 s.

**19.** 2; 20.

**20. a.** \$500 **b.** \$1.000.000

**21. a.** 219,5 m **b.** 39,1 m

**22. a.** \$1.900 **b.** \$1.805.000

**23. a.** $x^2 + 4x + 4y + 12 = 0$
**b.** $y^2 - 4y - 4x + 12 = 0$

**24.** Hay infinitas. Ejemplo: $y^2 - 4x - 16 = 0$.

**25.** Hay infinitas. Ejemplo: $y^2 - 4x - 12 = 0$.

**26.** $x^2 - 8x - 24y - 200 = 0$. El vértice sería $(4; -9)$.

**27.** $x^2 - 14x + 20y + 29 = 0$

**28.** $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$

**29.** $V = (0; -1)$. $F = (-2; -1)$. Directriz: $x = 2$.

## REPASO TODO

**30.** La del ítem a, porque tiene la forma $ax^2 + bx + c$, con $a = 4$, $b = 5$ y $c = 0$.
La del ítem c, con $a = 1/4$, $b = 0$ y $c = -1/4$.

**31. a.** $L = 10 - x$.
**b.** $A(x) = x \cdot (10 - x)$
**c.**

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| 0 | 9 | 16 | 21 | 24 | 25 | 24 | 21 | 16 | 9 | 0 |

**d.** Es una parábola convexa con vértice en $(5; 25)$ y área máxima 25.

**32.** $g(x) = 0{,}2\ x^2$; $j(x) = 12\ x^2$; $h(x) = 0{,}4\ x^2$; $i(x) = 2{,}5\ x^2$.

**33. a.** g(x) es f(x) trasladada 2 unidades hacia la derecha.
h(x) es f(x) trasladada 2 unidades hacia abajo.
i(x) es f(x) trasladada 3 unidades hacia la izquierda.
j(x) es f(x) trasladada 3 unidades hacia arriba.
**b.** Horizontal en i y iii. Vertical en ii y iv.

**34. a.** Por ejemplo, $g(x) = 2x^2$.
**b.** $h(x) = -4x^2$.

**35. a.** g(x) es f(x) trasladada 2 unidades hacia la derecha.
h(x) es f(x) trasladada 1 unidad hacia la izquierda.
**b.** Todos tienen ordenada $-1$ y las abscisas están trasladadas con respecto a las de f según lo descripto en el ítem a.

**36. i.** $(-8; 0)$
**ii.** $(0; 5)$
**iii.** $(1; 0)$
**iv.** $(0; -6)$

**37. i.** $V = (1; 1)$. Corte: $(0; 2)$.
**ii.** $V = (0; 5)$. Corte: $(0; 5)$.
**iii.** $V = (1; 0)$. Cortes: $(1; 0)$ y $(0; 1)$.
**iv.** $V = (1/3; 4/3)$. Cortes: $(-1/3; 0)$, $(1; 0)$ y $(0; 1)$.

**38. i.** La parábola es cóncava.
Dom $f = R$.
Im $f = [-5; +\infty)$.
$V = (-2; -5)$. Eje de simetría: $x = -2$.
Mínimo: $-5$, para $x = -2$.
Crece en $(-2; +\infty)$. Decrece en $(-\infty; -2)$.

Cortes con los ejes: $(-\sqrt{5}-2;0)$; $(\sqrt{5}-2;0)$ y $(0; -1)$.

$C^0 = \left\{-\sqrt{5}-2; \sqrt{5}-2\right\}$.

$C^+ = (-\infty; -\sqrt{5}-2) \cup (\sqrt{5}-2; +\infty)$.

$C^- = (-\sqrt{5}-2; \sqrt{5}-2)$.

**ii.** La parábola es convexa.
Dom f = R.
Im g = $(-\infty; 1/3]$.
V = (1/3; 1/3). Eje de simetría: x = 1/3.
Máximo: 1/3, para x = 1/3.
Crece en $(-\infty; 1/3)$. Decrece en $(1/3; +\infty)$.
Cortes con los ejes: (0; 0) y (2/3; 0).
$C^0 = \{0; 2/3\}$. $C^+ = (0; 2/3)$.
$C^- = (-\infty; 0) \cup (2/3; +\infty)$.

**39. i.** La parábola es cóncava.
Dom f = R.
Im f = $[-1; +\infty)$.
V = (2; –1). Eje de simetría: x = 2.
Mínimo: –1, para x = 2.
Crece en $(2; +\infty)$. Decrece en $(-\infty; 2)$.
Cortes con los ejes: (1; 0), (3; 0) y (0; 3).
$C^0 = \{1; 3\}$. $C^+ = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.
$C^- = (1; 3)$.

**ii.** La parábola es convexa.
Dom f = R.
Im g = $(-\infty; 7]$.
V = (1; 7). Eje de simetría: x = 1.
Máximo: 7, para x = 1.
Crece en $(-\infty; 1)$. Decrece en $(1; +\infty)$.

Cortes con los ejes: (0; 2), $(1-\frac{\sqrt{60}}{10};0)$ y $(1+\frac{\sqrt{60}}{10};0)$.

$C^0 = \left\{1-\frac{\sqrt{60}}{10}; 1+\frac{\sqrt{60}}{10}\right\}$.

$C^+ = (1-\frac{\sqrt{60}}{10}; 1+\frac{\sqrt{60}}{10})$.

$C^- = (-\infty; 1-\frac{\sqrt{60}}{10}) \cup (1+\frac{\sqrt{60}}{10}; +\infty)$.

**40.** 320 m a los 8 s.

**41. a.** $y^2 = x - 9$; $y^2 - x + 9 = 0$.
**b.** No, porque no hay una única imagen para cada elemento del dominio.
**c.** El gráfico de f(x) coincide con la rama de la parábola que tiene imágenes mayores o iguales que 0.

## ACTIVIDADES MATEMUNDO

**42.** Sí, a los 37 días, aproximadamente.

**43.** |p| = 5. La profundidad es de 5 cm.

**44.** 0,6 m cada una.

**45.** El día 6.

# 4 Polinomios I

## MATEMUNDO

En 4 horas.

**1.** a. 39 b. 2

**2.** a. $y^3, -8y^3, -11y^3$. 1 y 27.
b. $11x^2y, -37x^2y$. $-8xy^2, 23xy^2, -26xy^2$. $-4x, 9x$.

**3.** a. $2x^3$
b. $6x^2$
c. $100x + 12.000$
d. $x(x + 2)(x + 4)$

**4.** a. 894
b. 243
c. –8
d. 14/5
e. 3
f. 551/4

**5.** a. $\sqrt{xy}$
b. $11{,}2y\sqrt{xy} - 3{,}1x^2y$
c. $7{,}1x^3y^2 - 0{,}4x^2y^3$

**6.** Las expresiones de a y c. Las otras no tienen exponentes enteros no negativos.

**7.** a. 1
b. 285
c. –9

**8.** a. $b = -7$

**9.** –79

**10.** $n = -1$

**11.** $b = -12$

**12.** a.

| x (mg) | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| D (x) | 0 | 15/16 | 5 | 135/16 | 0 |

b. No es efectivo en ninguno de los dos extremos, ya que $D(x) = 0$ en ambos.
c. Sí, por ejemplo, $D(1{,}5) = 8{,}4375$.

**13.** a. $576\ cm^4$
b. $5.000\ cm^4$

**14.** a. F
b. V
c. F
d. F

**15.** $n = 6$

**16.** 12

**17.** No, porque al igualar los exponentes, resulta $m = 32$, y estos quedan con valores no enteros.

**18.** Se muestra un ejemplo de cada caso.
a. $B(x) = 2 + 3x$
b. $P(y) = 3y^4 + 2y^3 - 5y^2 - 4y + 1$
c. $Q(y) = y^6 - 8y + 7$
d. $P(x) = 8x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 4x - 2$
e. Es imposible, ya que los cuatrinomios no pueden tener cinco términos.

**19.** $a = 10$, $b = 7$ y $c = 4$.

**20.** a. 3 y 1 o 1 y 3.
b. 6 y 1 o 1 y 6.
c. 2 y 1 o 1 y 2.
d. 5 y 3 o 3 y 5.

**21.** a. $S(x) = \sqrt{7}\ x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x$
b. $T(y) = y^7 - 2y^6 + 5y^3 - y^2 + 8$
c. $U(z) = 6z^7 - 8z^5 + 6z^4 + 0{,}5z^3 + 3z$

**22.** a. $x^6 + 9x^5 + 8x^4 - 5x^2 + 2x + 9$
b. $2x^6 + x^5 - 9x^4 - 2{,}6x^3 + 3x^2 + 8x + 9$
c. $-8x^6 + 5x^5 + 15x^4 - 4{,}5x^3 - 5x^2 + 6x + 1$
d. $7x^6 - 12x^5 - 15x^4 - 0{,}5x^3 + 7x^2 - 2x - 9$

**23.** a. $24x + 52$
b. $6x^2 + 36x + 48$
c. $16x^2 + 64x + 60$
d. $6x^3 + 45x^2 + 102x + 72$

**24.** **a.** $x^3 - 5,5x^2 - 17,5x - 20$
**b.** $6x^4 + 13x^3 + 32x^2 + 50x + 55$
**c.** $1,5x^3 - 12,5x^2 + 18,5x - 44$
**d.** $6x^4 + 14,5x^3 + 38,5x^2 + 59,5x + 11$

**25.** **a.** $-2x^3 + 4x^2 - 5x + 3$
**b.** $7y^6 + 2y^3 - 3y^2 - y$

**26.** **a.** Cociente: $3x + 1$. Resto: $-7$.
**b.** Cociente: $2y^2 + 8y + 2$. Resto: $y - 10$.

**27.** **a.** Cociente: $x^3 + 3x^2 - x + 1$. Resto: 0.
**b.** Cociente: $x^2 - x + 2$. Resto: $-11x^2 + 5x - 10$.

**28.** $Q(t) = 4t^3 + 6t^2 + 5t + 1$

**29.** $m = -3$ $\quad$ $n = -14$
$C(x) = x - 3$ $\quad$ $R(x) = 22x^2 - 14x - 2$

**30.** $P(x) = 12x^5 + 11x^4 + 9x^3 - 4x^2 + x + 7$

## REPASO TODO

**31.** **a.** 1.068
**b.** 1.828/7
**c.** 1/54 – 23.328
**d.** –5/3
**e.** $2.617/180 + 3 \cdot 6^4$

**32.** $a^2b^2$

**33.** –5

**34.** **a.** Para el 1.º de la izquierda, los coeficientes son 5, 2 y 2; las partes literales son $x^3$ y $x^{-1}$.

Para el 2.º de la izquierda, los coeficientes son 9, 6,1 y 2; las partes literales son $z^x$ y z.

Para el 3.º de la izquierda, los coeficientes son 1 y 1; las partes literales son $\sqrt{y}$ e y.

Para el 1.º de la derecha, los coeficientes son 1, 4,5 y –1; las partes literales son x, $x^3$ y $x^2$.

Para el 2.º de la derecha, los coeficientes son $\sqrt{5}$ , –8 y 1,2; las partes literales son $x^5$ y x.

Para el 3.º de la derecha, los coeficientes son 1 y 4; las partes literales son $x^{\sqrt{3}}$ y x.

**b.** Solo la primera y la segunda de la derecha.

**35.** $m = 6$

**36.** 11

**37.** 34

**38.** **a.** $P(x) = 4 + 4x + 0x^2 + 5x^3 + 9,2x^4 + 0x^5 - 2x^6$
**b.** $Q(x) = 8 + 5x + x^2 - 3x^3 + 0x^4 + 6x^5$
**c.** $R(y) = -1/2 + 9y + 0y^2 + 0y^3 + 0y^4 + 5y^5$

**39.** **a.** $2 \le n \le 5$
**b.** 1, 2, 3, 5, 7, 8 o 9.

**40.** $a = 3$; $b = -5$; $c = 1$; $d = -6$.

**41.** **a.** Cociente: $-m^{23} + 3m^6 + 2m^2$. Resto: 0.
**b.** Cociente: $3x^2 - 5x + 40/3$. Resto: 0.
**c.** Cociente: $x + 1$. Resto: 0.
**d.** Cociente: $2a^3 - 2a^2 - 5$.
Resto: $6a^3 + 9a^2 + 7a - 22$.

**42.** **a.** $-x + 5$
**b.** $x + 2$
**c.** $3m^2 + 2$
**d.** $-9a - 10$

**43.** **a.** $x^{2m+1} - 2x^{m+1} - 4x^{2m} + 8x^m$
**b.** $3x^{2n-2} + x^{2n-1} + 5x^n + 11x^{n-1} - 20$

**44.** $-3x^3 + 2x^2 - 4x - 5$
$6x^3 - 4x^2 + 8x + 10$
$9x^4 + 6x^3 - 10x^2 - 15x$

**45.** **a.** No, porque 12 no es entero.
**b.** No, en forma decreciente.
**c.** $a = 1$; $b = 3$; $c = 7$.
**d.** Porque no tiene dos términos.

**46.** **a.** $8a^2 + 141a - 80$
**b.** $4x^3 - 4x^2 + 2x$

**47.** **a.** $x^2 + 3x + 4$
**b.** $8x^2 + 2x - 8$
**c.** $3x + 2$

**48.** $a = 3$

**49.** a. $2nxz + 10xz$
b. $nyz + yz$

**50.** \$120

**51.** $30x^2 - 2x + 30$

## ACTIVIDADES MATEMUNDO

**52.** a. 1,85 m
b. 1,69 m
c. 34,52 cm
d. $9{,}116 - 0{,}141t$. Sí, depende de t.

**53.** a. 1.697,68 kcal/día
b. 1.818,95 kcal/día

**54.** a. $T = s + 10k$
b. 177 °C

# 5 Polinomios II

## MATEMUNDO

- $V_1(x) = (x - 3)(x + 3)\,x$
  $V_2(x) = (x - 2)^2\,(x + 4)$
  $V_3(x) = (x + 2)^2\,(x - 4)$
  $V_4(x) = x^3$
- $V_1(20) = 7.820\ cm^3$
  $V_2(20) = 5.184\ cm^3$
  $V_3(20) = 7.744\ cm^3$
  $V_4(20) = 8.000\ cm^3$

**1.** Cero, porque el grado del resto siempre es menor que el del divisor.

**2.** Son iguales.

**3.** a. $C(x) = 8x^2 + 22x + 12$ $R(x) = 0$
b. $C(x) = 3x^3 + 2x^2 + 7x + 8$ $R(x) = 37$

**4.** a. $m = -42$
b. $m = 2$; $n = 1$.

**5.** $m = 4$

**6.** $a = 35$

**7.** a. $C(x) = x^3 + 7x^2 + 8x - 6$ $R(x) = 0$
b. $C(x) = 10x^2 - 50x + 250$ $R(x) = -1.265$
c. $C(x) = 3x^2 + 5x - 6$ $R(x) = 0$

**8.** a. $-55$
b. $-48\sqrt{2}$

**9.** a. $C(x) = 3x^4 - 4x^2 + 10$ $R(x) = -31$
b. $C(x) = y^{15} - y^{10} + 3y^5 - 5$ $R(x) = -1$

**10.** a. 0
b. $a = 2$; $b = 1$.
c. $-x + 3/2$
d. $2x$
e. 29/98
f. $-8x$
g. 4
h. $C(x) = 2x^2 + 3x - 2$ $R(x) = -11/2$.

**11.** a. $5x\,(3 + 10x)$
b. $m^5\,(m^5 + 3)$

c. $16m^2 (16 + 9m^2)$
d. $4x (9x – 6x^2 – 1)$
e. $3x (8x – 4y + 3x^4y^2)$
f. $a^3b^2 (16a^7 – 8a^2b^2 + b^4)$
g. $6xy (4x – 2 + x^2y^3)$
h. $(a – 2) x (x – 1)$
i. $(a – 1)(a^4 + 1)$
j. $(m + x)(m + y)$
k. $(x + y)^2 (x + y + 1)$
l. $–(m – n)[1 – (m – n)^2]$

**12.** a. Hay que extraer 4xy como factor común y queda $4xy (x + 4x^2y^2 + 8y^2)$.
b. Hay que extraer 4 como factor común y queda $4 (x^2 + 1)$.

**13.** a. $(0,4)^2 (64 – 7 + 43) = 16$
b. $(42 – 1) (42 – 1 – 1) = 1.640$

**14.** $(a – b)^2 = a^2 – (ab – b^2) – b^2 – (ab – b^2) =$
$= a^2 – ab + b^2 – b^2 – ab + b^2 =$
$= a^2 – 2ab + b^2$

**15.** a. $x^2 + 16x + 64$
b. $x^2 – 4x + 4$

**16.** a. $x^2 + 6x + 9$
b. $9x^2 – 12x + 4$
c. $16x^2 + 40xy + 25y^2$
d. $m^6n^8 – 3/2\ m^5n^5 + 9/16\ m^4n^2$
e. $4m^2 – 16mn + 16n^2$
f. $45a^2 – 60ab^3 + 20b^6$

**17.** La 1.ª de la izquierda con la 2.ª de la derecha; la 2.ª de la izquierda con la 3.ª de la derecha; la 3.ª de la izquierda con la 1.ª de la derecha.

**18.** a. $16x^2 – 49$
b. $4a^{10} – b^4$
c. $2x – 4$
d. $9/4\ x^{2n} – 25$

**19.** a. 3
b. 5
c. 1

**20.** a. $(100 – 2)(100 + 2) = 100^2 – 2^2 = 9.996$
b. $(20 – 2)(20 + 2) = 20^2 – 2^2 = 396$
c. $(200 – 30)(200 + 30) = 200^2 – 30^2 = 39.100$
d. $(1.000 – 3)(1.000 + 3) = 1.000^2 – 3^2 =$
$= 999.991$

**21.** a. $4(x – 1)(x + 1)$
b. $a^2 – 12$

**22.** $V_1(x) = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$
$V_2(x) = 8x^3$
$V_3(x) = 8x^3 – 6x^2 + 6x – 1$

**23.** a. $216m^{12} + 108m^9 + 18m^6 + m^3$
b. $8a^6b^9c^3 + 36a^4b^6c^2 + 54a^2b^3c + 27$
c. $1/8\ x^{12} – 3/2\ x^8y^2 + 6x^4y^4 – 8y^6$
d. $8/27\ a^{15} – 4a^{10}b^4 + 18a^5b^8 – 27b^{12}$

**24.** a. $P(x) = 4x (2x^3 + 4x^2 + 1)$
$Q(x) = –3x (x^4 – 6x + 3)$
b. $P(x) = (x + 2)(x^3 + 4)$
$Q(x) = (x^2 + 3)(3x^3 – 2)$
c. $P(x) = (5x – 9)(5x + 9)$
$Q(x) = (8x^3 – 1)(8x^3 + 1)$
d. $P(x) = (x – 12)^2$
$Q(x) = (3x + 4)^2$
e. $P(x) = (x + 5)^3$
$Q(x) = (2x + 1)^3$
f. $P(x) = 2(x – 6)(x – 5)$
$Q(x) = –4(x + 2)(x – 1)$

**25.** a. $2x^2 (x – 6)(x + 6)$
b. $–(x – 1)(x + 1)(x + 3)$
c. $–5x(x – 7)(x + 2)$
d. $(x – 5)(x + 5)(x^2 + 25)$
e. $3x(x + 1)^3$

**26.** $P(x) = (x + 4)(x^2 – 4x + 16)$
$Q(x) = (x – 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

**27.** a. $x_1 = –2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3.$
b. $x_1 = –5,\ x_2 = –1,\ x_3 = 6.$
c. $x_1 = –2,\ x_2 = 1/3,\ x_3 = 4.$
d. $x_1 = –3,\ x_2 = –1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 4.$

**28.** a. $P(x) = (x + 2)(x – 1)(x – 3)$
b. $P(x) = (x + 5)(x + 1)(x – 6)$
c. $P(x) = 3(x + 2)(x – 1/3)(x – 4)$
d. $P(x) = 2(x + 3)(x + 1)(x – 2)(x – 4)$

**29.** $P(x) = 20(x + 1/2)(x – 1/2)(x – 1)(x^2 + 4/5x + 1/5)$

## REPASO TODO

**30. a.** $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 3$
$Q(x) = x + 2$
$C(x) = x^2 - 4x + 12$
$R(x) = -27$
**b.** $P(x) = -3x^4 + x^3 - 4x$
$Q(x) = x - 1$
$C(x) = -3x^3 - 2x^2 - 2x - 6$
$R(x) = -6$

**31. a.** No, porque ninguno de los restos es cero.
**b.** Sí, aplicando el teorema del resto.

**32. a.** 4 **b.** 3
**c.** Iguales. **d.** 6 y 1; 3 y 2; 2 y 3; 1 y 6.

**32. a.** A la de $(x - 1)^3$.
**b.** $(x - 1)^3 = (x - 1)(x - 1)(x - 1)$

**34.** $2(a - 3)$
$3a^2 + 23a + 14$
$4a - 1$

**35. a.** $1/3\ (x^2 + 2x + 4)$
**b.** $1/3\ (x^2 + x + 1)$

**36. a.** $9x^2 - 25y^4$ $9x^2 + 30xy^2 + 25y^4$
$-9x^2 + 30xy^2 - 25y^4$ $25y^4 - 9x^2$
**b.** $x^3 - 21x^2 + 147x - 343$ $x^3 - 343$

**37. a.** $(4 + y)^2 = 16 + 8y + y^2$
**b.** $(a - 3)^2 = a^2 - 6a + 9$
**c.** $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
**d.** $(x + 8)(x + 3) = x^2 + 11x + 24$
**e.** $2(x + 3/2)(x + 3) = 2x^2 + 9x + 9$
**f.** $4x(x + 2y) = 4x^2 + 8xy$

**38. a.** F **b.** V **c.** V
**d.** V **e.** F **f.** F

**39.** $4a^2 - 1/2\ ab$

**40. a.** $4x^2 - 64$
**b.** $9a^{10} - 25$
**c.** $3x^2 - 1$
**d.** $1/4\ x^{4n} - 16$

**41. a.** Con la 4.ª de la derecha.
**b.** Con la 2.ª de la derecha.
**c.** Con la 5.ª de la derecha.
**d.** Con la 1.ª de la derecha.
**e.** Con la 3.ª de la derecha.

**42. a.** –7 y 2 o 2 y –7.
**b.** –4 y 8 u 8 y –4.
**c.** 1 y 9 o 9 y 1.
**d.** –8 y 5 o 5 y –8.

**43. a.** 40 **b.** 29 **c.** 3

**44. a.** $2y^3$
**b.** $8m^3 + 4m^2 - 10m - 6$
**c.** $3x^2 + y^2$

**45. a.** –4 **b.** 10 **c.** 2m
**d.** x **e.** $2x^3$ **f.** 2.786

**46. a.** 324
**b.** 7
**c.** 16 (tienen 9 y 7 años).

**47. a.** –22
**b.** $16/3\ x^3$
**c.** $-2y^{4b} + 2x^{2a}y^{2b}$
**d.** $-3xy - 3x - x^2$
**e.** $x^4 + 3x^2y^2$

**48.** $72(x^2 - x + 1)$

**49. a.** Con la 3.ª de la derecha.
**b.** Con la 4.ª de la derecha.
**c.** Con la 1.ª de la derecha.
**d.** Con la 2.ª de la derecha.

**50. a.** Se completa con $16a^2$ y 1.
**b.** Se completa con 5m, n y 5mn.
**c.** Se completa con 2y y $4y^2$.
**d.** Se completa con $x^2$, $x^4$, $y^6$ e $y^9$.

**51. a.** $8x^3 - 4x^2y - 2xy^2 + y^3$
**b.** $27x^3y^6 + 108x^2y^4 + 144xy^2 + 64$
**c.** $6x^3 + 2\sqrt[3]{36}\ x^4 + 2\sqrt[3]{6}\ x^5 + x^6$

**52. a.** $x + 6$
**b.** $x + 3$
**c.** $4(x^n - 3)(x^n + 3)$

**53.** **a.** **i.** $x_1 = -3, x_2 = 1, x_3 = 5.$
**ii.** $x_1 = -2, x_2 = 1/3, x_3 = 5.$
**iii.** $x_1 = -7, x_2 = -1, x_3 = -1/2, x_4 = 0.$
**iv.** $x_1 = -4, x_2 = -3, x_3 = -2, x_4 = -1.$
**v.** $x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 1/3, x_4 = 1/2.$
**vi.** $x_1 = -4, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = 3, x_5 = 5.$

**b.** **i.** $P(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 5)$
**ii.** $P(x) = 3(x + 2)(x - 1/3)(x - 5)$
**iii.** $P(x) = 4x\,(x + 7)(x + 1)(x + 1/2)$
**iv.** $P(x) = (x + 4)(x + 3)(x + 2)(x + 1)$
**v.** $P(x) = 6(x + 3)(x + 1)(x - 1/3)(x - 1/2)$
**vi.** $P(x) = -2(x + 4)(x + 2)(x - 1)(x - 3)(x - 5)$

**54.** **i.** $P(x) = 4(x + 1)(x - 1)(x + 9)$
**ii.** $P(x) = (x - 3)(x + 3)^2$
**iii.** $P(x) = 2(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$
**iv.** $P(x) = (x + 2)(x - 2)(x + 6)(x - 6)$
**v.** $P(x) = -2(x - 2)(x + 2)^2$
**vi.** $P(x) = (x - 1)^2\,(x + 1)^3$

**55.** $P(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

**56.** Porque no tiene raíces reales.

**57.** 13

## ACTIVIDADES MATEMUNDO

**58.** **a.** 48 y 24.
**b.** $p(x) = 1/10.000\ (700 + x)\ (700 - x)$
Se anula para $x = 700$ y para $x = -700$.
El valor negativo no tiene sentido, por tratarse de una cantidad de artículos a vender.
**c.** $I(x) = 1/10.000\ x\ (700 + x)\ (700 - x)$
**d.** El ingreso se anula para $x = 700$, $x = -700$ y $x = 0$. Para estos últimos dos valores carece de sentido.

**59.** **a.** $A(x) = (x + 80)(x + 50)$
**b.** $A(x) = x^2 + 130x + 4.000$. Es de grado 2.
**c.** Deberían agregarse 70 m al largo y también al ancho.

**60.** 12 m y 5 m.

# 6 Ecuaciones e inecuaciones. Sistemas

## MATEMUNDO

Para 500 g del A, requiere 200 g del alimento B.

**1.** $x = 4$ con $(x - 1)(x + 1) > 0$.
$x = 0$ con $16 \div 2 = 4x + 8$.
$x = -1$ con $2x + 3 < 5$.

**2.** $x = -1$ y $x = 4$.

**3.** **a.** $x = -1$ **b.** $x = 0$
**c.** $x = 7/8$ **d.** $x = -23/9$
**e.** $x = -43/7$ **f.** Infinitas soluciones.

**4.** **a.** $y = 2x + 1$ **b.** $y = 4/3x$
**c.** $y = 4x + 3/2$ **d.** $y = 0$
**e.** $y = -1/3x + 1/3$ **f.** Todos los pares $(x; y)$.

**5.** **a.** Es la recta $x = 5$.
**b.** Es la recta $y = -1$.

**6.** **a.** Es el punto $(-5/3; 0)$.
**b.** Es la recta vertical $x = -5/3$.

**7.** **a.** $x > -1$ **b.** $x < 5$
**c.** $x \leq 1/2$ **d.** $x \leq -1$
**e.** $x > 0$ **f.** $\varnothing$

**8.** $x \in [-2; 4]$

**9.** **a.** $y \geq -x + 1$ **b.** $y < -1/3x - 8/3$
**c.** $y > x - 3$ **d.** $y \geq 3/8x$
**e.** $x < -1/2\ \forall\ y$ **f.** Todos los pares $(x; y)$.

**10.** De la c.

**11.** $180

**12.** 6.000 populares y 2.000 plateas.

**13.** 80 conejos y 40 gallinas.

**14.** **a.** Compatible determinado.
**b.** Figura 1: $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = x + 2 \end{cases}$ Figura 2: $\begin{cases} y = 1 \\ y = 1/2x - 2 \end{cases}$

**15.** Es la intersección de las regiones $y \le x + 2$ e $y \le -1/2x + 2$.

**16.** Son los puntos $(-5; -21)$ y $(1; 3)$.

**17.** D B
A C

**18.** $\begin{cases} y = x - 3 \\ y = x^2 - 3x \end{cases}$

**19.** $\begin{cases} x > 0 \\ x < 5 \\ y > 0 \\ y < 3 \end{cases}$

**20.** $\begin{cases} y > x^2 \\ y = 3 \end{cases}$ La solución es el segmento de extremos $(-\sqrt{3};\ 3)$ y $(\sqrt{3};\ 3)$.

**21.** $x^2 + x - 6 < 0$ $C^- = (-3; 2)$

**22.** Tiene dos lados de 4 cm y otros dos de 5 cm.

**23.**
a. 4 DVD y 10 CD u 8 DVD y 5 CD.
b. No, porque daría 60/13 de DVD, lo que no es posible.
c. 1 CD y de 5 a 9 DVD; 2 CD y de 4 a 8 DVD; 3 CD y de 3 a 7 DVD; 4 CD y de 2 a 6 DVD; 5 CD y de 2 a 5 DVD; 6 CD y de 1 a 5 DVD; 7 CD y de 1 a 4 DVD; 8 CD y de 1 a 3 DVD; 8 CD y de 1 a 2 DVD; 10 CD y 1 DVD; 11 CD y 1 DVD.

## REPASO TODO

**24.**
i. Por ejemplo, $a = 2$, $b = 3$.
ii. $a = 0$, $b = 0$.
iii. Por ejemplo, $a = 0$, $b = 1$.

**25.**
a. Se trata del intervalo $[-1; +\infty)$ del eje x.
b. Se trata del intervalo $(-\infty; -2/3)$ del eje x.

**26.**
a. $x < -1/3$ $S = (-\infty; -1/3)$
b. $x > 5$ $S = (5; +\infty)$
c. $x \le 1$ $S = (-\infty; 1]$
d. $x > 41/17$ $S = (41/17; +\infty)$

**27.** Dos valores: $x = 1$ y $x = 2$.

**28.** $S = [4; +\infty)$

**29.**
a. $S = R - \{2\}$
b. $S = [-5; 1]$
c. $S = (-\infty; -1/2] \cup [3; +\infty)$
d. $S = (0; 5)$

**30.** $S = (-\infty; +\infty)$

**31.** 16

**32.** Ancho: 8 m. Largo: 48 m.

**33.** a. F b. V c. V

**34.** a. Solución única. b. No tiene solución.

**35.** 8 m de largo y 3 m de ancho.

**36.** Base: 6 cm. Altura: 9 cm.

**37.** $\begin{cases} 30 \le 40 - 2x \le 36 \\ 50 \le 60 - 2x \le 56 \end{cases}$

**38.** La C.

## ACTIVIDADES MATEMUNDO

**39.** $\begin{cases} 500x + 100y = 11.000 \\ x = 2y \end{cases}$
$S = (20; 10)$.
Vendieron 20 camisas y 10 corbatas.

**40.** En todos los casos, x e y son enteros no negativos.
a. $200x + 500y = 900.000$
b. $x + y \le 3.000$
d. $0 \le x \le 2.000$

**41.**
a. Sí (gastarían \$16.800).
b. Sí (sobrarían \$2.800).
c. $\begin{cases} 80L + 120J \le 16.800 \\ L \le 2J \end{cases}$

**42.** Fabricaron 100 mesas de 2 $m^2$ y 600 de 1 $m^2$.
La ganancia fue de \$380.000.

**43.** $\begin{cases} A + B = 12.000 \\ A \le 2B \\ B \ge 3.000 \end{cases}$

**44.**
a. Las posibles combinaciones de dosis de Z y W que proveen los 60 mg diarios de vitamina A.
b. $15Z + 10W = 80$
c. 4 dosis de Z y 2 de W.

# 7 Trigonometría

## MATEMUNDO

- 1,75 m
- No, porque la imagen no mantiene la forma con respecto a la realidad.

**1.** 5 cm

**2.** 39 cm

**3.** **a.** $x = 9$; $y = 32/3$. **b.** $y = 10$
**c.** $x = 20/7$ **d.** $x = 23/3$
**e.** $x = 12$ **f.** $x = 5$

**4.** $MN = 15/4$

**5.** 1,5 cm, 3,5 cm y 4 cm.

**6.** 17 m

**7.** 23,4 m

**8.** $a + b = 9$

**9.** $OD = 10/3$; $DC = 20/3$.

**10.** 36 cm

**11.** $\text{sen}\,\alpha = \frac{5}{29}\sqrt{29} = \cos\beta$

**12.** **a.**
$\text{sen}\,\alpha = 0,5$
$\cos\alpha = \sqrt{3}\,/\,2$
$\text{tg}\,\alpha = \sqrt{3}\,/\,3$
$\text{cotg}\,\alpha = \sqrt{3}$
$\sec\alpha = 2\sqrt{3}\,/\,3$
$\text{cosec}\,\alpha = 2.$

**b.**
$\text{sen}\,\alpha = 30/16$
$\cos\alpha = 16/34$
$\text{tg}\,\alpha = 30/16$
$\text{cotg}\,\alpha = 8/15$
$\sec\alpha = 17/8$
$\text{cosec}\,\alpha = 8/15$

**13.** **a.** $2\sqrt{13}\,/\,13$ **b.** 3/2
**c.** 2/3 **d.** 3/2
**e.** 1 **f.** 1

**14.** $\text{sen}\,\alpha = \sqrt{11}\,/\,6$
$\cos\alpha = 5/6$
$\text{tg}\,\alpha = \sqrt{11}\,/\,5$
$\text{cotg}\,\alpha = 5\sqrt{11}\,/\,11$
$\sec\alpha = 6/5$
$\text{cosec}\,\alpha = 6\sqrt{11}\,/\,11$

**15.** 18/5

**16.** 16/137

**17.** **a.**
$\cos\alpha = 15/17$
$\text{tg}\,\alpha = 8/15$
$\text{cotg}\,\alpha = 15/8$
$\sec\alpha = 17/15$
$\text{cosec}\,\alpha = 17/8$

**b.**
$\text{sen}\,\alpha = \sqrt{56}\,/\,15$
$\text{tg}\,\alpha = \sqrt{56}\,/\,13$
$\text{cotg}\,\alpha = 13\sqrt{56}\,/\,56$
$\sec\alpha = 15\sqrt{56}\,/\,56$
$\text{cosec}\,\alpha = 15/13$

**c.**
$\text{sen}\,\alpha = 40/41$
$\cos\alpha = 9/41$
$\text{cotg}\,\alpha = 9/40$
$\sec\alpha = 41/9$
$\text{cosec}\,\alpha = 41/40$

**d.**
$\text{sen}\,\alpha = 12/13$
$\cos\alpha = 5/13$
$\text{tg}\,\alpha = 12/5$
$\sec\alpha = 13/5$
$\text{cosec}\,\alpha = 13/12$

**e.**
$\text{sen}\,\alpha = 3\sqrt{5}\,/\,7$
$\cos\alpha = 2/7$
$\text{tg}\,\alpha = 3\sqrt{5}\,/\,2$
$\text{cotg}\,\alpha = 2\sqrt{5}\,/\,15$
$\text{cosec}\,\alpha = 7\sqrt{5}\,/\,15$

**f.**
$\text{sen}\,\alpha = 60/61$
$\cos\alpha = 11/61$
$\text{tg}\,\alpha = 60/11$
$\text{cotg}\,\alpha = 11/60$
$\sec\alpha = 61/11$

**18.** **a.** $\text{sen}\,\beta + \frac{1}{\text{sen}\,\beta}$ **b.** 3 sen x

**c.** $\frac{1}{\text{sen}\,\theta}$

**19. a.** $\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=1$

**b.** $\frac{1-\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\cos\alpha$

**20.** $\frac{1}{\cos\theta}=\operatorname{sen}\theta\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)$

$\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta}$

$\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}$

**21.** 3,92 m, aproximadamente.

**22.** 29,28 m, aproximadamente.

**23.** 1,7 m, aproximadamente.

**24.** sen 37° = cos 53°
cos 67° = sen 23°
sen 48° = cos 42°
cos 27° = sen 63°
sen 38° = cos 52°
cos 58° = sen 32°

**25. a.** cos 65,5° **b.** sen 35,74°
**c.** cotg 11,5° **d.** tg 8,68°
**e.** cosec 57,79° **f.** sec 77,52°

**26. a.** 24°
**b.** 8°
**c.** 29°

**27.** cos 30° = $\sqrt{3}/2$
tg 30° = $\sqrt{3}/3$
cos 60° = 1 / 2
tg 60° = $\sqrt{3}$

**28.** $\alpha = 18°$; $\beta = 15°$.

**29.** A = 35°; B = 5°.

**30. a.** sen 55°
**b.** –tg 88°
**c.** –sec 10°
**d.** –cos 77,5°
**e.** –cotg 80,1°
**f.** cosec 0,9°

**31.** sen 145° = sen 35° cos 100° = –cos 80°
sen 123° = sen 57° cos 132° = –cos 48°
sen 107° = sen 73° cos 168° = –cos 12°

**32.** +
–
–
–
–
+

**33. a.** F **b.** F
**c.** F **d.** V
**e.** V **f.** V
**g.** V **h.** F

**34. a.** 50° **b.** 10° **c.** 6,6°

**35.** A = 50°; B = 30°.

**36. a.** F **b.** V
**c.** V **d.** F
**e.** V

**37.** 3,586 m, aproximadamente.

**38.** 288,45 m, aproximadamente.

**39. a.** $\widehat{B}=\operatorname{arcsen}\left(b\cdot\frac{\operatorname{sen}\,A}{a}\right)$; $\widehat{C}=180°-\widehat{A}-\widehat{B}$.

**b.** $b=a\cdot\frac{\operatorname{sen}\,B}{\operatorname{sen}\,A}$; $c=a\cdot\frac{\operatorname{sen}\,(180°-\widehat{A}-\widehat{B})}{\operatorname{sen}\,A}$.

**40.** $r\approx 15{,}56$ cm; $q\approx 10{,}15$ cm.

**41.** 2.807 m, aproximadamente.

**42.** sen A = a/c; sen B = b/c; sen c = sen 90° = 1.

$\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{a}{a/c}=c$

$\frac{b}{\operatorname{sen}B}=\frac{b}{b/c}=c$

$\frac{c}{\operatorname{sen}C}=\frac{c}{1}=c$

Luego: $\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B}=\frac{c}{\operatorname{sen}C}$

**43. a.** a **b.** a · c; B.
**c.** c; a; b. **d.** b; a; c; a · c.
**e.** b; c; A. **f.** a; c; a · b.

**44.** $\sqrt{75}$ m

**45.** Aproximadamente: 101,54°; 44,42° y 34,04°.

**46.** $\sqrt{19}$ cm

**47.** $A \approx 44°$; $B \approx 86°$.

**48.** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 90° = a^2 + b^2$

## REPASO TODO

**49.** a. F  b. F
c. V  d. F
e. V

**50.** a. $\sqrt{87{,}04}$  b. $\dfrac{5\sqrt{34}}{34}$
c. $\dfrac{8}{\sqrt{87{,}04}}$  d. $1{,}\widehat{6}$
e. $\dfrac{\sqrt{34}}{5}$  f. 30°

**51.** El 1.º y el 2.º son semejantes, ya que: $\dfrac{3}{5} = \dfrac{4{,}8}{8}$.

**52.** a. 3 cm, 4 cm y 5 cm.
b. 36,87°; 53,13° y 90°.
Son triángulos rectángulos.

**53.** a. $CB = \sqrt{415}$ cm; $A \approx 27{,}58°$; $C \approx 62{,}42°$.
b. $AC = \sqrt{1.537}$ cm; $A \approx 37{,}75°$; $C \approx 52{,}25°$.

**54.** 720/169

**55.** 1/4

**56.** 1

**57.** sec β

**58.** Aproximadamente, a 16,21 m del edificio y a 24,22 m de la persona.

**59.** 694,32 m, aproximadamente.

**60.** a. $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{sen}\alpha$

$$\cos\alpha \cdot \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\alpha$$

b. $\dfrac{1}{\cos^2\delta} = 1 + \operatorname{tg}^2\delta$

$$\frac{1}{\cos^2\delta} = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2\delta}{\cos^2\delta}$$

$$\frac{1}{\cos^2\delta} = \frac{\cos^2\delta + \operatorname{sen}^2\delta}{\cos^2\delta}$$

$$\frac{1}{\cos^2\delta} = \frac{1}{\cos^2\delta}$$

**61.** a. $\alpha = 105°$; $x \approx 15{,}45$ cm; $y \approx 11{,}31$ cm.
b. $\theta = 120°$; $\sigma = 30°$; $\alpha = 30°$; $\omega = 30°$;
$x \approx 10{,}39$ cm; $y = 3$ cm; $z \approx 5{,}2$ cm.

**62.** $h \approx 129{,}97$ m
Se lo observa desde unos 178,54 m con un ángulo de 36°, aproximadamente.

## ACTIVIDADES MATEMUNDO

**63.** 1,40 m

**64.** 146 m

**65.** $\theta_1 + \theta_2 = (45° + a) + (45° - a) = 90°$
O sea, $\theta_1$ y $\theta_2$ son complementarios.
Luego, $2\theta_1 + 2\theta_2 = 2 \cdot 90° = 180°$.
Es decir, $2\theta_1$ y $2\theta_2$ son suplementarios.
En consecuencia, $\operatorname{sen} 2\theta_1 = \operatorname{sen} 2\theta_2$.
Por lo tanto, ambos alcances son iguales.

**66.** 2.411,2 m, aproximadamente.

**67.** 51 km

**68.** a. 75,16°, aproximadamente.
b. 8,02 m; 28,83° y 76,01°, aproximadamente.

# 8 Combinatoria y probabilidad

## MATEMUNDO

- Porque para cada letra que representaba a una provincia, la numeración iba desde 000.000 a 999.999.
- Porque agrega una letra más y hay 26 opciones para ella.

**1.** **a.** AEV, AVE, EAV, EVA, VAE, VEA.
**b.** Sería igualmente probable, pues la mitad de esas palabras tienen sentido en español.

**2.** **a.** Porque hay más opciones para ocupar el lugar de cada letra.
**b.** $3^3 = 27$

**3.** Sin repetición: $V_{7,\,4} = 840$.
Con repetición: $V'_{7,\,4} = 2.401$.

**4.** Hotel diferente: $V_{7,\,4} = 840$.
Mismo hotel: $V'_{7,\,4} = 2.401$.

**5.** Sin repetición: $C_{10,\,6} = 210$.
Con repetición: $C'_{10,\,6} = 5.005$.

**6.** $P'_{22,\,4,\,2,\,2,\,4,\,2,\,2} = 121.961.884.524.480.000$

**7.** En línea recta: $P_5 = 120$.
En círculo:
- Si importa dónde comienza: $P_5 = 120$.
- Si no importa dónde comienza: $P_4 = 24$.

**8.** $P'_{6,\,3,\,2} = 60$

**9.** $V_{6,\,3} = 120$

**10.** $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$

**11.** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^9 = 19.683$

**12.** $5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

**13.** $9 \cdot 10 \cdot 4 = 360$

**14.** $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1.470$

**15.** $3 \cdot 7 \cdot 5 = 105$

**16.** **a.** $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
**b.** $a^4 - 8a^3 + 24a^2 - 32a + 16$
**c.** $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$

**17.** $x^8y^{12} - 4x^9y^{11} + 6x^{10}y^{10} - 4x^{11}y^9 + x^{12}y^8$

**18.** **a.** $(a - c)^4$ **b.** $(2 + x)^5$
**c.** $(y^2 + y)^6$

**19.** **a.** $\{c_1c_2,\ c_1s_2,\ s_1c_2,\ s_1s_2\}$
**b.** {cc, cs, sc, ss}

**20.** Seguro: "En la última tirada sale cara o sello".
Imposible: "En total se obtienen 6 caras".

**21.** **a.** 3/52 **b.** 21/52
**c.** 39/52

**22.** **a.** {2}
**b.** {1, 2, 3, 4, 6}
**c.** No.
**d.** A' = {1, 3, 5}
B' = {4, 5, 6}
$(A \cap B)' = \{1, 3, 4, 5, 6\}$
$(A \cup B)' = \{5\}$

**23.** P(roja) · P(as) = 26/52 · 4/52 = 1/26

**24.** P(as) · P(as) = 4/52 · 4/52 = 1/169

**25.** P(< 10) · P(< 10/< 10) = 36/52 · 35/51 = 105/221

**26.** P(T) · P(T/T) = 13/52 · 12/51 = 1/17

**27.** P(R) · P(A/R) = 3/11 · 8/10 = 12/55

**28.** P(B) · P(B/B) = 6/15 · 5/14 = 1/7

**29.** P(R) · P(R'/R) = 3/10 · 7/9 = 7/30

**30.** $P(R) \cdot P(A/R) \cdot P(V/R \wedge A) =$
$= 5/20 \cdot 4/19 \cdot 6/18 = 1/57$

## REPASO TODO

**31.** **a.** 9 **b.** 600
**c.** 5 **d.** 25.200
**e.** 4.320 **f.** 576

**32.** **a.** 200 **b.** 9.999

**33.** **a.** 3 **b.** 1.680
**c.** 720 **d.** 216
**e.** 9 **f.** 28

**34.** $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9.000$

**35.** $P'_{8,\,3,\,4} = 280$

**36.** $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 45.000$

**37.** $6^2 = 36$

**38.** $P_6 = 720$

**39.** $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$

**40.** $V_{6,\,2} = 30$

**41.** $5 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

**42.** $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 72$

**43.** $C_{12,\,3} + C_{20,\,3} + C_{4,\,3} = 220 + 1.140 + 4 = 1.364$

**44.** **a.** {(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (2; 6), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (3; 4), (3; 5), (3; 6), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (4; 4), (4; 5), (4; 6), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (5; 5), (5; 6), (6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5), (6; 6)}

En cada uno de los siguientes ítems se menciona un ejemplo.
**b.** “Ambos impares” y “Ambos iguales”.
**c.** “Ambos impares” y “Ambos pares”.
**d.** “Ambos impares” y “Al menos, uno par”.

**45.** **a.** A veces.
**b.** Nunca.
**c.** Siempre.

**46.** 7/50

**47.** **a.** 2/3
**b.** 7/12
**c.** 0

**48.** **a.** 1/2
**b.** 1/4

**49.** **a.** 1/4
**b.** 8/9
**c.** 7/12

**50.** $P(A) \cdot P(A/A) = 11/18 \cdot 10/17 = 55/153$

**51.** $x^8 + 16x^7 + 112x^6 + 448x^5 + 1.120x^4 + 1.792x^3 +$
$+ 1.792x^2 + 1.024x + 256$

## ACTIVIDADES MATEMUNDO

**52.** **a.** $24 \cdot 36 = 864$
**b.** $C_{36,\,2} = 630$

**53.** **a.** $C'_{6,\,5} = 252$
**b.** 6
**c.** 1/42

**54.** **a.** $P = 1/C_{42,\,6} = 0{,}00000019$

**b.** $P = (36 \cdot C_{6,\,5})/C_{42,\,6} = 0{,}000041175$

**c.** $P = C_{36,\,6}/C_{42,\,6} \approx 0{,}37$

**55.** **a.** 1/10
**b.** 9/10
**c.** 6/13

**56.** Si la población es numerosa, la elección de la primera persona prácticamente no influye en la probabilidad de elegir la segunda. En el enunciado puede inferirse eso, pues la población no está acotada a un número limitado de personas. Por lo tanto, ambas elecciones se considerarán sucesos independientes.
**a.** P(sane) · P(sane) = 0,75 · 0,75 = 0,5625
**b.** P(sane’) · P(sane’) = 0,25 · 0,25 = 0,0625
**c.** P = 1 – 0,5625 – 0,0625 = 0,375

**57.** Si solo una de las piezas es defectuosa, hay dos casos posibles (y mutuamente excluyentes): que la 1.ª pieza sea defectuosa ($D_1$) y la 2.ª no lo sea ($D'_2$), y viceversa ($D'_1$ y $D_2$). Entonces:
$P(D_1 \wedge D'_2) + P(D'_1 \wedge D_2) =$
$= P(D_1) \cdot P(D'_2/D_1) + P(D'_1) \cdot P(D_2/D'_1) =$
$= 25/1.000 \cdot 975/999 + 975/1.000 \cdot 25/999 =$
$= 65/1.332$

# SOLUCIONES DE LAS AUTOEVALUACIONES

## Capítulo 1

1. a. No, porque $\frac{168}{196}$ es racional.

2. a. $112 : \pi$
   b. I, R.

3. a. Mario: $a_n = 168\ n$.
   Rita: $a_n = 196\ n$.
   Saúl: $a_n = 224\ n$.
   b. $a_{28} = 4.704$ cm
   $a_{24} = 4.704$ cm
   $a_{21} = 4.704$ cm
   Es el m.c.m.(168; 196; 224).

4. $r \approx 98 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})$

## Capítulo 2

1. Dom = [1; 31]. Im = [36; 100].

2. Máximos relativos: 88 para el día 9; 100 para el día 22 (este último es absoluto).
   Mínimos relativos: 55 para el día 15; 36 para el día 30 (este último es absoluto).

3. Crece en $(1; 9) \cup (15; 22) \cup (30; 31)$.
   Decrece en $(9; 15) \cup (22; 30)$.

4. $C^0 = \varnothing$. $C^+ = [1; 31]$. $C^- = \varnothing$.

5. No es par ni impar porque no es simétrica respecto del eje *y* ni del origen de coordenadas.
   No es periódica porque no hay un comportamiento que se repita.

## Capítulo 3

1. 7 m

2. 3 m

3. (3; 7)

4. Inicio: $(0; \frac{35}{32})$. Altura máxima: (3; 2,5).
   Fin: (7; 0).

5. $y + \frac{5}{32}x^2 - \frac{15}{16}x - \frac{35}{32} = 0$

## Capítulo 4

1. Luego de 1 año valdrá \$144.000; luego de 2 años, \$129.600; luego de 3 años, \$116.640 y luego de 4 años, \$104.976.

2. La c, porque el factor 0,9 aparece n –1 veces.

3. $0{,}8 \cdot 0{,}9^{(n-1)} \cdot x$

4. Representa el precio de venta del auto en función de los años transcurridos desde que era 0 km.

## Capítulo 5

1. La base medirá $(2x - 4)$ por $(x - 4)$ y la altura será 2 cm.

2. $V(x) = 4(x - 2)(x - 4)$. Es de grado 2.

3. $(x - 2) = 14$ y $(x - 4) = 12 \Rightarrow x = 16$

4. $x_1 = -10$, $x_2 = 16$. Se descarta el valor negativo.

5. $W(x) = 4(x - 16)(x + 10)$

## Capítulo 6

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 600 \\ 4x + 8y = 1.520 \end{cases}$

   S = (60; 160).
   Fabricaron 60 cintos y 160 carteras.

2. La 1.ª ecuación queda representada por la recta que interseca al eje de abscisas en $x = 300$ y al de ordenadas en $y = 200$.
   La 2.ª ecuación queda representada por la recta que interseca al eje de abscisas en $x = 380$ y al de ordenadas en $y = 190$.
   Ambas rectas se cruzan en el punto (60; 160), que representa la solución del sistema de ecuaciones.

3. \$29.400

4. Es un sistema compatible determinado.
   Por ejemplo, para obtener un sistema compatible indeterminado se podría modificar a 6 las horas de trabajo diarias que requiere una cartera y cambiar a 1.200 las horas para toda la producción.
   Como otro ejemplo, para obtener un sistema incompatible se podría modificar a 6 las horas de trabajo diarias pero mantener las 1.520 horas para toda la producción.

5. $\begin{cases} 2x + 3y \leq 600 \\ 4x + 8y \leq 1.520 \end{cases}$

El gráfico del sistema de inecuaciones está integrado por las siguientes regiones, limitadas al primer cuadrante:

Región I: comprendida por la recta

$y = -\frac{2}{3}x + 200$ y los puntos del semiplano ubicado

debajo de ella.

Región II: comprendida por la recta

$y = -\frac{1}{2}x + 190$ y los puntos del semiplano ubicado

debajo de ella.

## Capítulo 7

1. El esquema podría ser: de izquierda a derecha, E y P sobre la horizontal; H estaría más arriba y a la derecha de P.
Distancia PH: 250 m.
Ángulo HPE: 115°.
Ángulo EHP: 40°.
Ángulo PEH: 25°.
2. 380,24 m, aproximadamente.
3. 536,13 m, aproximadamente.
4. 226,58 m, aproximadamente.
5. No es semejante, pues dos de sus ángulos (65° y 90°) no coinciden con ninguno de los ángulos de EHP.

## Capítulo 8

1. $P = \frac{1}{5}$
2. $P = \frac{7}{30}$
3. $P = \frac{5}{6}$
4. Sí, porque el hecho de que el primer caramelo fuera rosado no influyó en que el segundo también lo fuese, dado que hubo reposición.
5. $P = \frac{3}{29}$
6. El tercero.

Entre números IV

Actividades de Matemática

SANTILLANA

ISBN 978-950-46-5533-6