M3

matemática

Horacio Itzcovich
Andrea Novembre [coordinadores]

Gustavo Carnelli
Cecilia Lamela

tinta fresca

Polimodal | Educación Secundaria Superior

Li
2

95

T
51
3Pou
M392
TF

M3

matemática

Horacio Itzcovich
Andrea Novembre [coordinadores]

Gustavo Carnelli
Cecilia Lamela

Polimodal | Educación Secundaria Superior

tinta fresca

Matemática 3
Para Polimodal | Educación Secundaria Superior

tinta fresca

Editor general
Jorge Ezequiel Sánchez
Directora editorial
Susana Pironio
Vicedirectora
Alina Baruj

Autores
Horacio Itzcovich y
Andrea Novembre [Coordinadores]
Gustavo Carnelli
Cecilia Lamela

Editoras
Silvia Altman
Claudia Comparatore
Liliana Kurzrok
Asistente de Edición
Ariel Blatman

Director de arte
Pablo Alarcón
Coordinadora gráfica
Eugenia Escamez
Diseñador de maqueta
Pablo Alarcón
Diseñadora de tapa
Mariela Vilarin
Asistente de arte
Luciano Andújar
Lucio Marquez
Diseñadoras gráficas
Patricia Baggio
Mariela Vilarin
Archivo fotográfico
Andrea Balbi
Marcela Baccarelli
Ilustraciones
DEROCALAMOLE [A. Romero]
Patricia Baggio
Mariela Vilarin

© Tinta fresca ediciones S.A.
Piedras 1743
(C1140ABK) Ciudad de Buenos Aires

Hecho el depósito que establece
la ley 11 723.
Libro de edición argentina.
Impreso en la Argentina.
Printed in Argentina.

ISBN: 987-576-081-1

Matemática 3
Horacio Itzcovich...[et.al.]. - 1a ed.
Buenos Aires : Tinta Fresca, 2006.

160 p. : il. ; 28x21 cm.

ISBN 987-576-081-1

1. Matemática-Enseñanza Media.
CDD 510.712

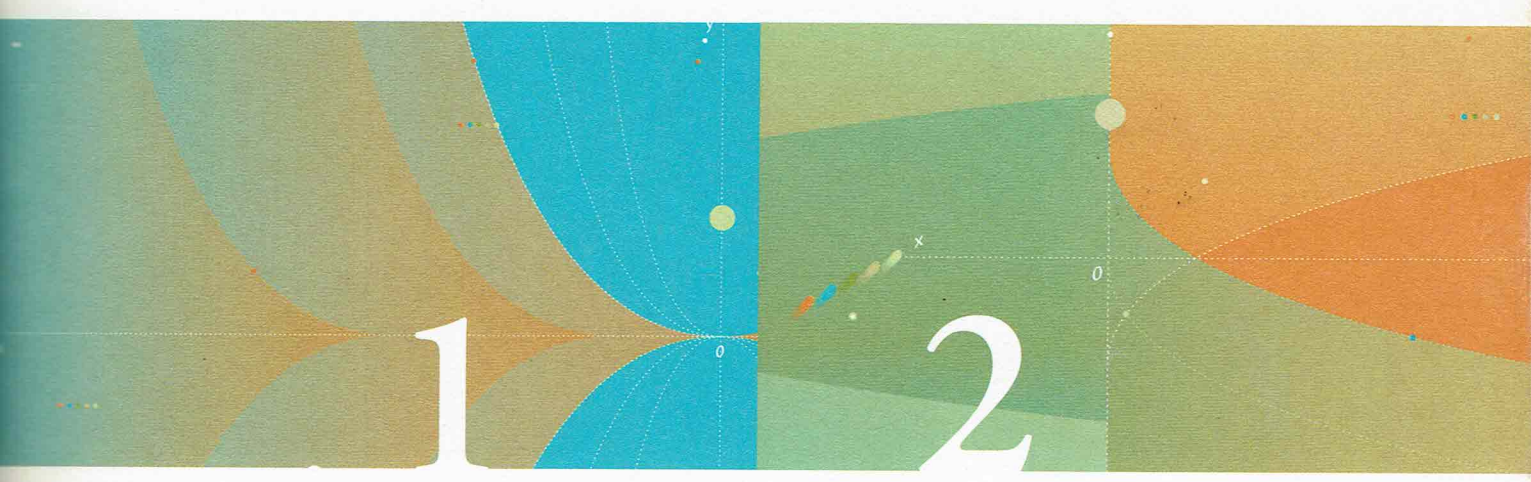
Este logo alerta al lector sobre la amenaza que fotocopiar libros representa para el futuro de la escritura. En efecto, la fotocopia de libros provoca una disminución tan importante de la venta de libros que atenta contra la posibilidad de los autores de crear nuevas obras y de las editoriales de publicarlas.

La reproducción total o parcial de este libro en cualquier forma que sea, idéntica o modificada, y por cualquier medio o procedimiento, sea mecánico, electrónico, informático o magnético y sobre cualquier tipo de soporte, no autorizada por los editores, viola derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

La editorial está a disposición de los poseedores de los derechos de eventuales fuentes iconográficas no identificadas.

En español, el género masculino en singular y plural incluye ambos géneros. Esta forma propia de la lengua oculta la mención de lo femenino. Pero, como el uso explícito de ambos géneros dificulta la lectura, los responsables de esta publicación emplean el masculino inclusor en todos los casos.

378746

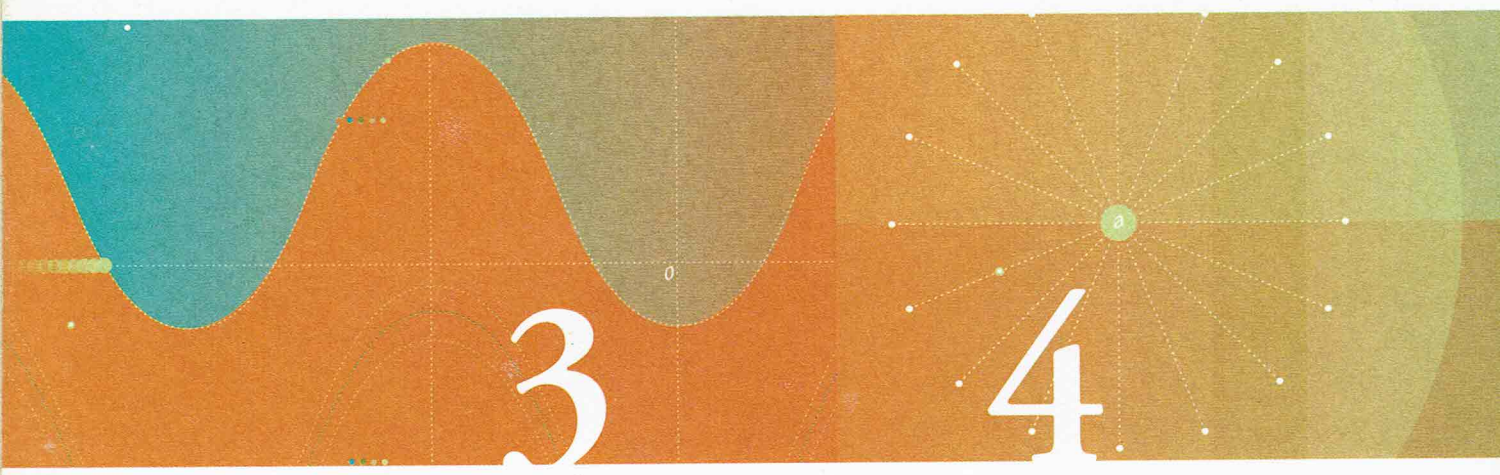


Funciones exponenciales ▮ 6
La función exponencial $f(x) = a^x$ con base mayor que 1 ▮ 8
Límite en el infinito ▮ 10
Desplazamientos de la gráfica ▮ 11
La función exponencial $f(x) = a^x$ con base entre 0 y 1 ▮ 14
Estudio de funciones exponenciales ▮ 15
Interés simple y compuesto ▮ 17
Capitalización continua. El número *e* ▮ 18
Sucesiones ▮ 20
Sucesiones geométricas ▮ 21
Suma de términos de una sucesión geométrica ▮ 21

Actividades de integración ▮ 24
Autoevaluación ▮ 25

Funciones Logarítmicas ▮ 26
Función logaritmo ▮ 28
Desplazamientos de la gráfica ▮ 30
Gráficos y propiedades de logaritmos ▮ 31
Nuevas propiedades de los logaritmos ▮ 33
Cambio de base ▮ 34
Análisis de funciones logarítmicas ▮ 37
El logaritmo natural ▮ 42
Relación entre función exponencial y función logarítmica ▮ 44
Expresión de una función exponencial conociendo puntos de su gráfico ▮ 47
Ecuaciones ▮ 49
Ecuaciones exponenciales ▮ 50
Ecuaciones logarítmicas ▮ 52

Actividades de integración ▮ 54
Autoevaluación ▮ 55



3

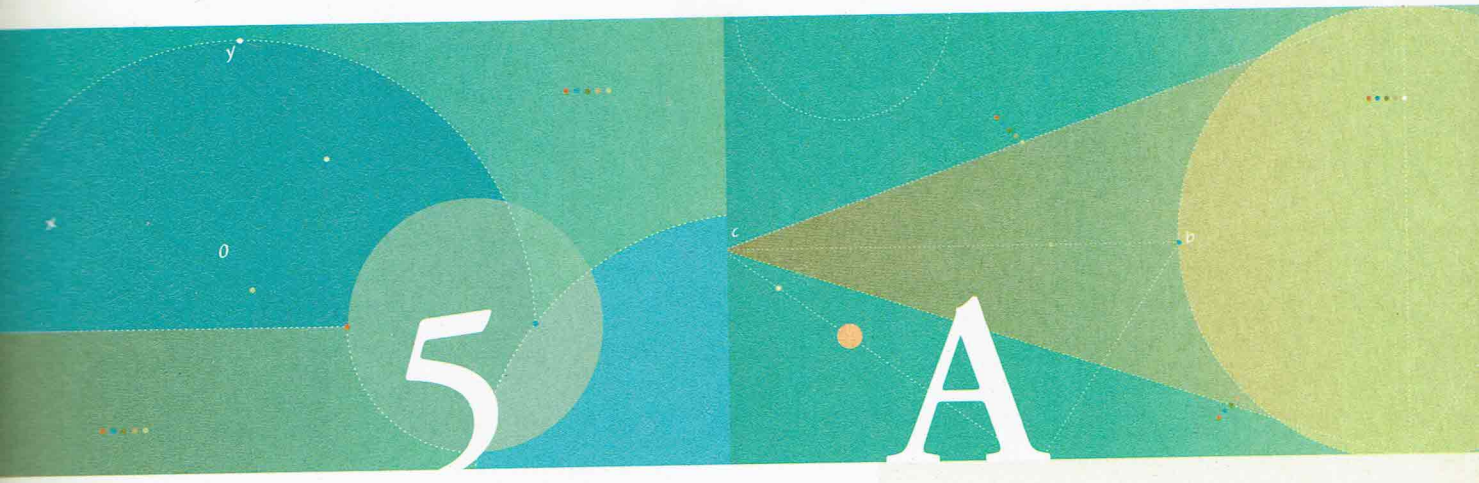
4

Funciones trigonométricas ▮ 56
Sistema de medición de ángulos ▮ 59
Las relaciones trigonométricas ▮ 60
Cálculo de senos y cosenos con calculadora ▮ 62
Relaciones entre el seno y el coseno de un ángulo ▮ 64
Definición de las funciones seno y coseno ▮ 68
Estudio de las funciones seno y coseno ▮ 69
Desplazamientos de las funciones trigonométricas ▮ 73
Estudio de las variaciones de la amplitud y del período ▮ 75
Ecuaciones trigonométricas ▮ 77
Tangente de un ángulo ▮ 79
Función tangente ▮ 80
Funciones secante, cosecante y cotangente ▮ 82
Identidades trigonométricas ▮ 83

Actividades de integración ▮ 84
Autoevaluación ▮ 85

Probabilidad y Estadística ▮ 86
Sucesos aleatorios ▮ 88
Probabilidad de un suceso ▮ 90
Sucesos independientes ▮ 91
Probabilidad condicional ▮ 93
Probabilidad total ▮ 95
Relación entre estadística y probabilidad ▮ 96
Análisis de la frecuencia relativa ▮ 98
Combinatoria ▮ 101
Variaciones sin repetición ▮ 103
Combinaciones ▮ 104
Variaciones con repetición ▮ 105
Problemas de combinatoria con probabilidades ▮ 106

Actividades de integración ▮ 107
Autoevaluación ▮ 109



Límites y derivadas ▮ **110**
Concepto y cálculo de límites ▮ **112**
Límite finito en un punto ▮ 113
Límites en funciones definidas por fórmulas ▮ 115
Otros aspectos del cálculo de límites ▮ 116
Límite y continuidad ▮ 117
Límites indeterminados ▮ 118
El concepto de derivada ▮ **120**
Interpretación física ▮ 120
Interpretación gráfica ▮ 121
Continuidad y derivabilidad ▮ 122
La función derivada ▮ 123
Cálculo de derivadas ▮ **124**
Derivada de las funciones elementales ▮ 124
Derivada de una suma ▮ 124
Derivada de una constante por una función ▮ 124
Derivada de una multiplicación ▮ 124
Derivada de una división ▮ 125
La regla de la cadena ▮ 125
Estudio de funciones ▮ **126**
Extremos de funciones. Crecimiento y decrecimiento ▮ 126
Análisis de funciones ▮ 128
Problemas de optimización ▮ **130**

Actividades de integración ▮ 132
Autoevaluación ▮ 134

Iniciación en el estudio de vectores ▮ **136**
Los vectores y las traslaciones ▮ **138**
Operaciones con vectores ▮ **139**
Módulo de un vector ▮ 142
Vectores y rectas ▮**143**
Relaciones entre la ecuación vectorial y la ecuación explícita de la recta ▮ **147**
Producto escalar entre dos vectores ▮ 148
Geometría y vectores ▮ **149**

Actividades de integración ▮ 156
Autoevaluación ▮ 157

Respuestas de autoevaluación ▮ 159

CONTENIDOS

- Las funciones exponenciales
- Límite en el infinito
- Desplazamientos horizontales y verticales
- Estudio de funciones exponenciales
- Interés simple y compuesto
- Capitalización continua. El número e
- Sucesiones

Ya son conocidas distintas situaciones de crecimiento y decrecimiento que responden a modelos como el lineal o el cuadrático. Sin embargo, hay otros tipos de variaciones que aparecen en contextos concretos, donde el crecimiento deja de responder a ese tipo de modelos. En este capítulo se estudiarán los crecimientos donde el porcentaje de variación se mantiene constante.

1 FUNCIONES EXPONENCIALES

Problema 1

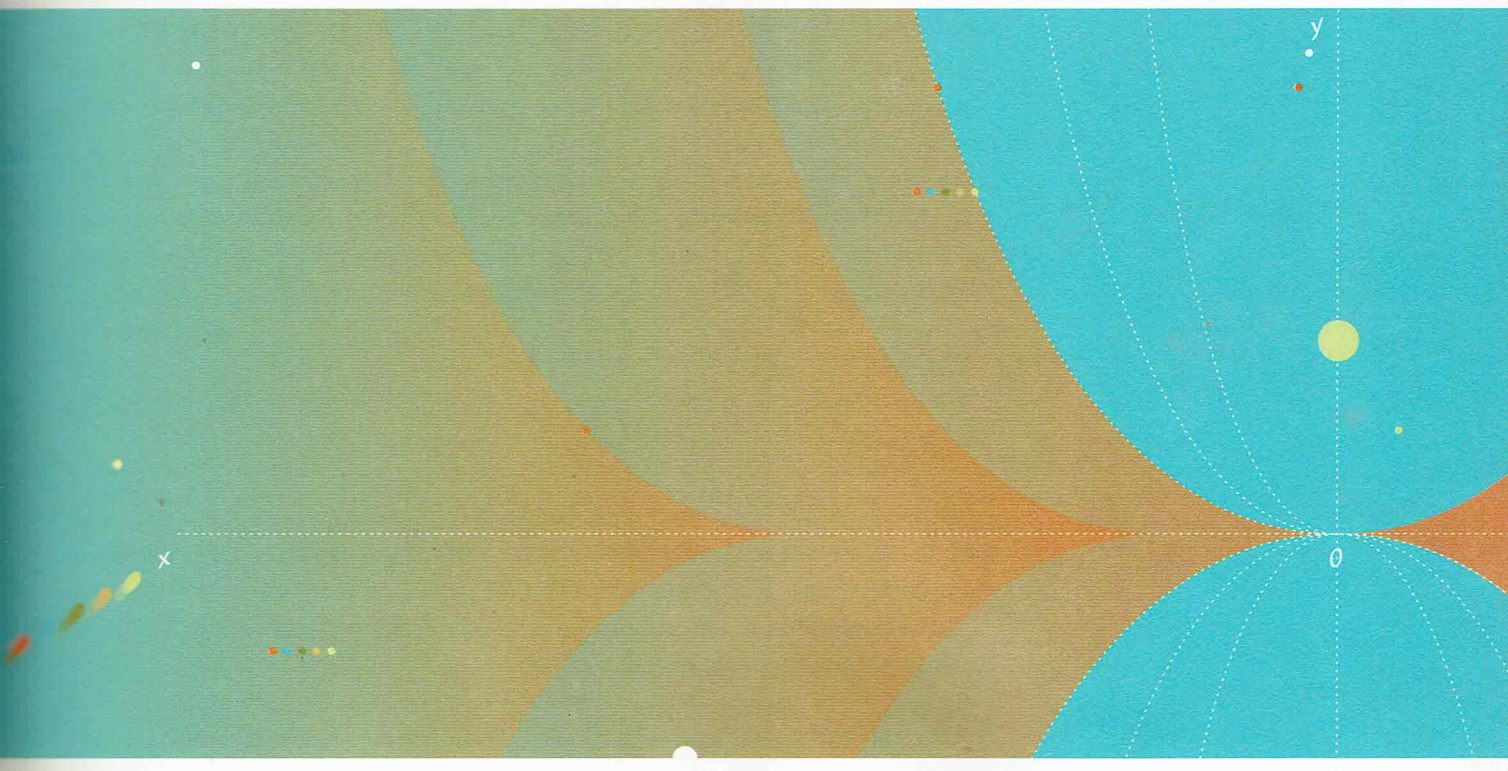
En un laboratorio de biología se está estudiando la evolución del peso de una especie animal. Un ejemplar pesa 2 kg al nacer. Un mes después, el peso se incrementa en un 10 %. Durante varios meses se observa la misma tendencia: cada mes el peso se incrementa un 10 % respecto del que tiene el mes anterior.

Suponiendo que esta tendencia sigue por un tiempo, ¿qué peso tendría el animal a los seis meses? ¿Y al año? ¿Y a los dos años?

En este problema se presenta una situación que trata sobre la variación del peso de una especie animal a lo largo del tiempo. La tabla que sigue muestra el peso del ejemplar seleccionado en los primeros meses:

Tiempo (en meses)	Peso (en kg)
0	2
1	$2 \cdot 1{,}10 = 2{,}20$
2	$2{,}20 \cdot 1{,}10 = 2{,}42$
3	$2{,}42 \cdot 1{,}10 = 2{,}662$

Es importante observar que el incremento de peso *no es lineal*. Entre los meses 1 y 2 (1 mes de incremento) el peso aumenta 0,22 kg; entre los meses 2 y 3 (también 1 mes de incremento) el peso aumenta 0,242 kg. Esto se debe a que el aumento del 10 % en el peso se aplica al peso que el animal tiene al comienzo del mes, que es mayor mes a mes.



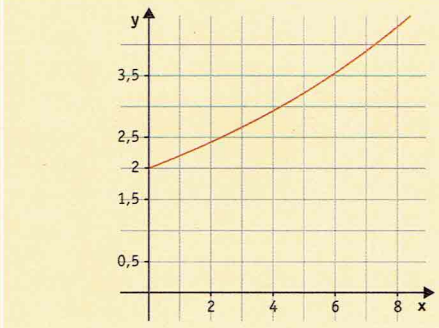
Una vez que se descartó el modelo lineal y si se observan los cálculos anteriores, *¿cómo puede expresarse en una fórmula este aumento del 10 % mensual?*

T (meses)	P (kg)
0	2
1	$2 \cdot 1{,}10$
2	$(2 \cdot 1{,}10) \cdot 1{,}10 = 2 \cdot 1{,}10^2$
3	$(2 \cdot 1{,}10)^2 \cdot 1{,}10 = 2 \cdot 1{,}10^3$

Si sigue con esta tendencia, a los 6 meses el peso será $P = 2 \cdot 1{,}10^6$, al año (12 meses) será $P = 2 \cdot 1{,}10^{12}$ y a los dos años (24 meses), $P = 2 \cdot 1{,}10^{24}$.

Después de x meses, el peso será $P = 2 \cdot 1{,}10^x$, pudiéndose expresar como una función de los meses transcurridos, x: $P(x) = 2 \cdot 1{,}10^x$. La función $P(x)$ es una función exponencial.

Si se representa gráficamente la función $P(x) = 2 \cdot 1{,}10^x$, a partir de los puntos obtenidos anteriormente, se obtiene esta curva.
Se puede observar que para $x = 0$: $P = 2 \cdot 1{,}10^0 = 2 \cdot 1 = 2$, que coincide con el peso inicial.



Para calcular el 10% de un número x debe multiplicarse este número por 0,10.
Si se quiere aumentar x en un 10 %, se multiplica ese número por 1,10, porque:
$x + 0{,}10\,x = x\,(1 + 0{,}10) = 1{,}10\,x$
El procedimiento anterior es válido para cualquier otro porcentaje.

Las funciones de la forma $f(x) = k \cdot a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$ en las que la variable figura como exponente se llaman **funciones exponenciales**.

La función exponencial $f(x) = a^x$ con base mayor que 1

Se iniciará el estudio de las funciones exponenciales con aquellas en las que la base es un número real mayor que 1.

No se consideran como funciones exponenciales $f(x) = 1^x$, porque $1^x = 1$ para cualquier valor de x (la función es constante) ni las que tienen base negativa o cero, porque no presentan regularidades destacadas: $f(x) = (-2)^x$ alterna resultados positivos con negativos si x es entero y no tiene resultado en valores como $x = \frac{1}{2}$.

Problema 2

Graficar la función $f(x) = 2^x$.

Al no conocer aún las características de este tipo de funciones, se puede construir una tabla de valores para obtener una aproximación a la forma del gráfico. Para esto hay que preguntarse primero, *¿qué valores están permitidos para x?*

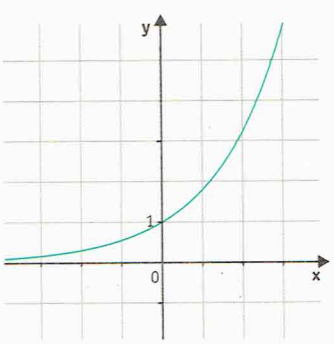
Como la operación es una potenciación con base positiva, 2^x dará un resultado para cualquier número real que se elija. Dom $(f) = \mathbb{R}$

Una tabla con algunos valores positivos y otros negativos permitirá obtener datos para realizar un gráfico aproximado de la función:

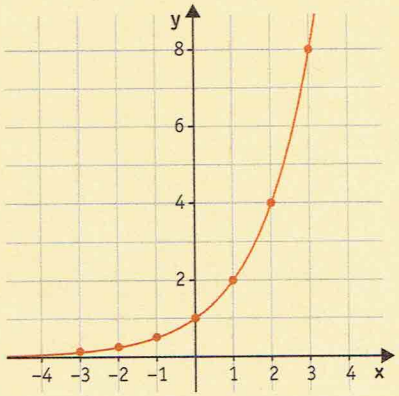
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
		$\cdot 2$	$\cdot 2$	$\cdot 2$	$\cdot 2$	$\cdot 2$	$\cdot 2$

En la tabla puede observarse que si hay diferencia de 1 entre los valores de x, cada valor de y es el doble del anterior o que, en las mismas condiciones, cada valor de y es el 200% del valor del anterior valor de y. Ese 200% está expresado en la fórmula de la exponencial, no como porcentaje sino como número racional porque: $200\ \% \Leftrightarrow \frac{200}{100} = 2$, que es la base de la exponencial.

Todas las funciones exponenciales $f(x) = a^x$, con $a > 1$ tienen por gráfico una curva con la misma forma.



Con la tabla anterior puede trazarse un gráfico aproximado de la función:



El análisis que se acaba de realizar puede hacerse también para una función exponencial cualquiera con $a > 1$.

© Tinta fresca ediciones S.A. | Prohibida su fotocopia Ley 11.723

La función $f(x) = a^x$, con $a > 1$ tiene por gráfica una curva porque su fórmula no se corresponde con la de una función lineal. Como a es un número positivo, el resultado de hacer a^x es siempre positivo y nunca vale 0, ya que la única base que puede dar 0 como resultado es 0. Luego, la función no tiene raíces. $C^+ = \mathbb{R}$, $C^- = \emptyset$, $C^0 = \emptyset$.

Además, a medida que crece x también lo hace a^x ya que las potencias de base mayor que 1 verifican que si $x > y \Rightarrow a^x > a^y$.

Como $a^0 = 1$ resulta que para toda función exponencial de la forma $f(x) = a^x$ la ordenada al origen es 1.

Problema 3

En un laboratorio se estudian tres tipos de bacterias. A continuación se dan algunos datos obtenidos de la evolución de un gramo de bacteria de cada clase. Encontrar una fórmula para calcular cuántos gramos de bacterias hay segundo a segundo.

Cultivo 1: Las bacterias se reproducen cuadruplicándose segundo a segundo.

Cultivo 2: Las bacterias se reproducen subdiviéndose de una cierta manera segundo a segundo y se sabe que a los 4 segundos hay 625 gramos.

Cultivo 3: Las bacterias se reproducen de manera tal que la cantidad en cada segundo representa un 300 % de la que había un segundo antes.

Para analizar el cultivo 1 se puede construir una tabla como la siguiente en la cual se indica la población para algunos tiempos multiplicando por 4 la cantidad de bacterias que hay en el segundo anterior:

t (seg)	0	1	2	3	4
N_1 (gramos de bacterias)	1	4	16	64	256
	4^0	4^1	4^2	4^3	4^4

De la tabla se desprende que la fórmula de la función que cuenta la cantidad de bacterias en función del tiempo medido en segundos es $N_1(t) = 4^t$.

En el cultivo 2, como la subdivisión es siempre la misma, la función que representa la situación es exponencial: $N_2(t) = a^t$.

Para $t = 4$, N_2 vale 625, por lo que el par (4 ; 625) pertenece a la gráfica de la función.

Entonces, como $N_2(t) = a^t$, $625 = a^4$, $a > 0 \Leftrightarrow \sqrt[4]{625} = a \Leftrightarrow a = 5$

Luego, la fórmula es $N_2(t) = 5^t$ y cada bacteria se divide en 5, segundo a segundo.

Para el cultivo 3 se puede armar la siguiente tabla:

t (seg)	0	1	2	3	4
N_3 (gramos de bacterias)	1	300 % de 1 = 3	300 % de 3 = 9	300 % de 9 = 27	300 % de 27 = 81
	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4

De la tabla se desprende que la función es $N_3(t) = 3^t$ y cada bacteria se triplica, en cada segundo.

En cada segundo, la cantidad de gramos de bacterias del tercer cultivo es un 300% respecto de las que había un segundo antes (o un 200 % más). Ese 300%, expresado como número racional, es la base de la función exponencial. 300 % de un número equivale a multiplicar ese número por $\frac{300}{100} = 3$.

Dicho de otro modo:

Si $(x ; b)$ y $(x+1 ; c)$ son dos pares que verifican la fórmula de una función exponencial:

- si $f(x) = 5^x$, c es el 500 % de b;
- si $f(x) = 1{,}2^x$, c es el 120 % de b;
- si $f(x) = 2{,}4^x$, c es el 240 % de b (o un 140% más).

Crecimiento lineal vs. Crecimiento exponencial

El objetivo de este apartado es comparar el crecimiento lineal con el exponencial. Las funciones lineales tienen un crecimiento constante, es decir que para dos puntos cualesquiera que pertenecen a la gráfica de la función se verifica que el resultado del cociente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es siempre el mismo. En las tablas siguientes se hace el cálculo de este cociente para una función lineal y una exponencial.

$f(x) = 3x$ (lineal)		
x	y	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
0	0	$\frac{3}{1} = 3$
1	3	
2	6	$\frac{3}{1} = 3$
3	9	
		Constante ($m = 3$)

$g(x) = 3^x$ (exponencial)			
x	y	Característica	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
0	1	3 es el 300 % de 1	$\frac{2}{1} = 2$
1	3		
2	9	27 es el 300 % de 9	$\frac{18}{1} = 18$
3	27		
		y_2 es el 300 % de y_1	No es constante

Como el cociente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ no es constante para el caso de la función exponencial, el crecimiento no lo es. Si la pendiente de la recta es positiva y la base de la exponencial es mayor que 1 se trata de dos funciones crecientes. Sin embargo sus crecimientos son diferentes.

Como la operación a^x puede realizarse para cualquier valor de x y su resultado es siempre un número positivo, si $f(x) = a^x$ se cumple que:
$Dom(f) = \mathbb{R}$;
$Im(f) = (0; +\infty)$;
$C^0 = \emptyset$, $C^+ = \mathbb{R}$ y $C^- = \emptyset$;
Además, si $a > 1$, estas funciones son crecientes en todo su dominio.

Límite en el infinito

Siguiendo con el estudio de las funciones exponenciales $f(x) = a^x$ que tienen base mayor que 1, *¿qué ocurre con las imágenes a medida que aumenta el valor de x?*

Como estas funciones son crecientes, a medida que aumenta x, su imagen $f(x)$ también aumenta y, además, lo hace sin un "tope".

La tabla de valores que sigue muestra la imagen (en valores aproximados) de algunos números "grandes" para una función exponencial como $f(x) = 1{,}2^x$:

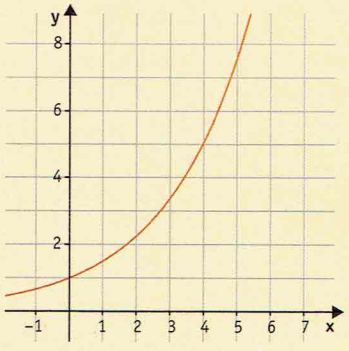
x	5	10	50	500	1000
$f(x) = 1{,}2^x$	2,49	6,19	9100,44	$3{,}89 \cdot 10^{39}$	$1{,}52 \cdot 10^{79}$

A medida que el valor de x aumenta, la función va creciendo sin límite. Se dice en estos casos que "cuando x tiende a $+\infty$, las imágenes $f(x)$ tienden también a $+\infty$", y se escribe

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Se dice que el *límite de f(x) cuando x tiende a* $+\infty$, *es* $+\infty$ y se simboliza $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
En este contexto, "$\to$" se entiende como "*tiende a*" o "*se acerca a*".

En el gráfico de este tipo de funciones puede comprobarse lo dicho: "a medida que se avanza en su lectura hacia la derecha, la curva sube cada vez más".



¿Qué ocurre cuando x toma valores cada vez menores, es decir, tendiendo a $-\infty$?

Si se construye una tabla de valores para números que respeten esta tendencia para una función exponencial como, por ejemplo, $f(x) = 3^x$ (los resultados están aproximados)

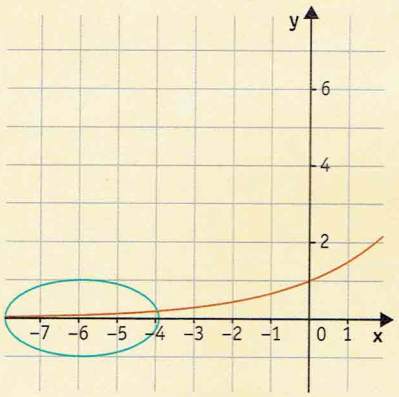
x	-1	-5	-10	-50	-100
$f(x) = 3^x$	0,33	0,004	$1{,}7 \cdot 10^{-5}$	$1{,}4 \cdot 10^{-24}$	$1{,}9 \cdot 10^{-48}$

Aquí se observa algo diferente del caso anterior: a medida que los valores de x tienden a $-\infty$, las imágenes se hacen cada vez más "chicas", pero con un "tope": el cero, valor que no alcanza nunca porque a^x siempre da positivo.

En estos casos se dice que "cuando x tiende a $-\infty$, las imágenes $f(x)$ tienden a 0", y se escribe

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

Esto puede corroborarse en los gráficos de estas funciones: a medida que se avanza en su lectura hacia la izquierda, la curva se acerca cada vez más al eje de abscisas (valor 0 de las ordenadas). Se desprende así otra característica: al acercarse a un valor (el 0) se dice que el eje x (la recta horizontal $y = 0$) es una asíntota horizontal al gráfico de la función.



En este caso, el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $-\infty$ es 0 y se simboliza $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.
Además, cuando el límite en $+\infty$ o $-\infty$ da un número real, se dice que la curva tiene una asíntota horizontal.
En la función analizada, la recta $y = 0$ es asíntota horizontal al gráfico de f (a izquierda).

Desplazamientos de la gráfica

Las funciones exponenciales no siempre aparecen como $f(x) = a^x$. Pueden contener, además, otras operaciones.

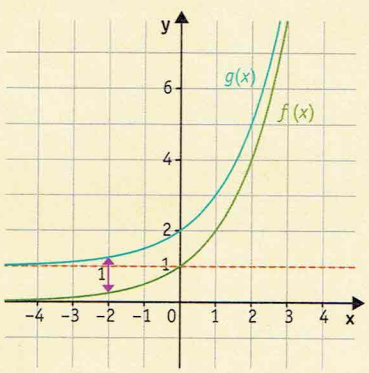
Problema 4

Graficar las funciones $g(x) = 2^x + 1$ y $h(x) = 2^{x+1}$.

Para graficar la función $g(x) = 2^x + 1$ puede armarse una tabla de valores y obtener su gráfico a partir del análisis de su relación con la función exponencial $f(x) = 2^x$:

x	-2	-1	0	1	3	
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	8	↓
$g(x) = 2^x + 1$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	3	9	+1

Como $g(x) = f(x) + 1$ para cualquier valor de x, la imagen en la función g es una unidad más que la imagen en la función f. Esto hace que los puntos de la gráfica de g estén a una unidad más de altura que los de f. La asíntota horizontal del gráfico de g es $y = 1$.

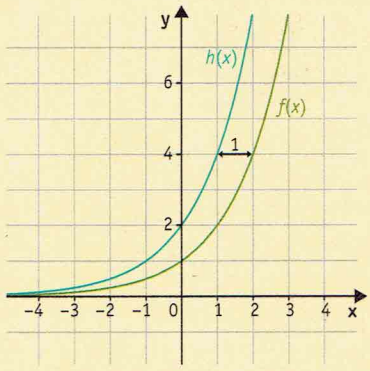


La gráfica de una función de fórmula $t(x) = a^x + c$ es como la de la función de fórmula $f(x) = a^x$, pero desplazada c unidades hacia arriba, si c es positivo, o $|c|$ unidades hacia abajo, si c es negativo.
En todos los casos la asíntota horizontal pasa a ser la recta $y = c$.

Del mismo modo, para la función h:

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$h(x)=2^{x+1}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

En la tabla se ve que los valores que toma h son los que f toma *una unidad después*. Entonces, si se traslada cada punto de la gráfica de f una unidad hacia la izquierda, se obtendrá un punto de la gráfica de h. Por esto, la gráfica de h resulta la de f "corrida 1 hacia la izquierda".



La gráfica de una función de fórmula $h(x)=a^{x+c}$ es como la de la función de fórmula $f(x)=a^{x+c}$, pero desplazada $|c|$ unidades hacia la derecha, si $c<0$, o c unidades hacia la izquierda, si $c>0$. La asíntota horizontal no cambia.

Como la traslación es horizontal, la asíntota sigue siendo la recta $y=0$.

Problema 5

Al estudiar un cultivo de cierto micro-organismo se dedujo que la reproducción se realiza de forma tal que cada uno se subdivide en tres, segundo a segundo.
Si se sabe que al iniciarse el estudio había 8 micro-organismos en el cultivo, que a los 4 segundos había 648 y se supone que no muere ninguno de ellos, ¿con qué fórmula puede conocerse la población en el cultivo en cada instante?

Como de cada uno se originan 3 o, de otra manera, la población se triplica en cada segundo t, la función será del tipo 3^t. Sin embargo, esta fórmula no contempla que su valor inicial sea 8, ya que $3^0 = 1$.

3^t representa la población de un cultivo que se triplica segundo a segundo y que inicialmente tiene *1 micro-organismo*. Pero, si de 1 micro-organismo se originan 3^t, de 8 se originarán $8 \cdot 3^t$.

La fórmula que da la población P en cada segundo t, será: $P(t) = 8 \cdot 3^t$.

Problema 6

En otro estudio, se sabe que cada micro-organismo se subdivide de manera tal que a los 4 segundos hay 648 y a los 7 segundos hay 17 496, ¿cuál es la fórmula exponencial que representa la cantidad de micro-organismos en el instante t?

En las funciones exponenciales $f(x)=k\cdot a^x$, $(k\neq 0)$ $f(0)=k$, por lo que la ordenada al origen de la curva es k.

En este caso no se dispone ni de la base de la función exponencial (el valor de a) ni la cantidad inicial (el valor de k). Se sabe que la fórmula es del tipo $P(t) = k \cdot a^t$, porque cada micro-organismo se subdivide siempre de la misma forma.

Como para $t = 4$, P vale 648 y para $t = 7$, P vale 17 496, los pares $(4 ; 648)$ y $(7 ; 17\,496)$ verifican la fórmula. Se puede plantear un sistema de dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas.

$$\begin{cases} 648 = k \cdot a^4 \\ 17\,496 = k \cdot a^7 \end{cases}$$

Se dividen miembro a miembro las ecuaciones del sistema, que no pueden valer cero.	$\frac{k \cdot a^7}{k \cdot a^4} = \frac{17\,496}{648}$
Se simplifica la expresión y se resuelve.	$a^3 = 27 \Leftrightarrow a = 3$
Se reemplaza el valor de a en una de las ecuaciones del sistema y se resuelve.	$648 = k \cdot 3^4 = 81\,k \Leftrightarrow k = 8$

La fórmula es $P(t) = 8 \cdot 3^t$ que, coincide con la obtenida en el problema 5.

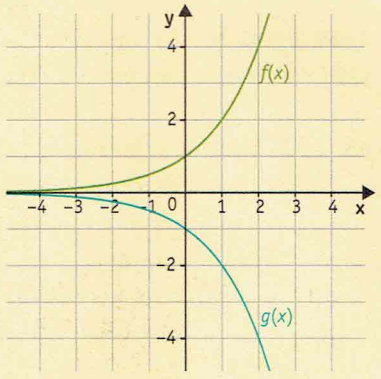
Problema 7

Dadas las funciones exponenciales $g(x) = -2^x$ y $h(x) = 2^{-x}$. Analizar qué relación tienen sus gráficos con el de $f(x) = 2^x$.

Para comparar $g(x) = -2^x$ con $f(x) = 2^x$ se pueden construir los gráficos a partir del armado de una tabla:

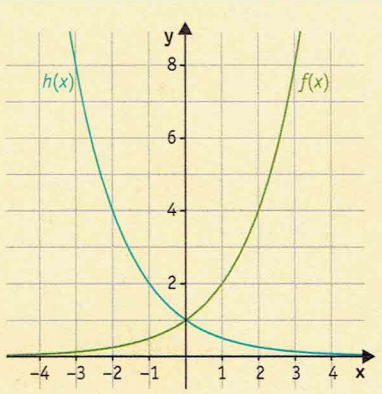
x	$f(x) = 2^x$	$g(x) = -2^x$
0	1	−1
1	2	−2
2	4	−4
−2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

La fórmula $g(x) = -2^x$ puede pensarse como $g(x) = -f(x)$. Esto quiere decir que los valores de g son los de f cambiados de signo, lo que se expresa en que el gráfico de g es el resultado de aplicarle al de f una simetría con respecto al eje de abscisas.



Si se comparan $f(x) = 2^x$ y $h(x) = 2^{-x}$:

x	$f(x) = 2^x$	$h(x) = 2^{-x}$
−2	$\frac{1}{4}$	4
−1	$\frac{1}{2}$	2
0	1	1
1	2	$\frac{1}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$



En este caso, $h(x) = 2^{-x}$ es $h(x) = f(-x)$. Esto significa que si se toman dos valores opuestos, ambas funciones dan la misma imagen. El gráfico de h es el resultado de aplicarle al de f una simetría con respecto al eje de ordenadas.

Dada una función $f(x)$, los gráficos de las funciones $g(x) = k \cdot f(x)$ y $f(kx)$, con $k \neq 0$, son "compresiones" o "expansiones" del gráfico de f, según el valor de k.

Recordar que $-2^x = -(2^x)$ o también $(-1) \cdot 2^x$ y no $(-2)^x$, por lo que su valor es siempre negativo.

Para una función f cualquiera:
- los gráficos de $f(x)$ y $-f(x)$ resultan simétricos respecto del eje de abscisas.
- los gráficos de $f(x)$ y $f(-x)$ resultan simétricos respecto del eje de ordenadas

La función exponencial $f(x) = a^x$ con base entre 0 y 1

Algunas características de la función exponencial con base mayor que 1 no se repiten en las que tienen base entre 0 y 1 y éste es el motivo por el que se estudian por separado.

Problema 8

Las sustancias radiactivas se desintegran perdiendo masa por liberación de ciertas partículas. Un científico está analizando la variación de la masa de un cierto tipo de sustancia radiactiva que inicialmente tiene 4 kg de masa.

Se supone que ha verificado que dos días después la masa es de 3,8416 kg y que esta pérdida sigue una ley exponencial, ¿qué masa tendrá la sustancia a los treinta días?

La fórmula que permite calcular la masa M (en kg) en función del tiempo t (en días) es del tipo $M(t) = k \cdot a^t$. El valor de k es 4, por ser la masa inicial, esto es $M(0)$. De la fórmula puede decirse, por ahora, que es $M(t) = 4 \cdot a^t$. Para hallar a, debe usarse el otro dato: para $t = 2$, M vale 3,8416.

$$M(t) = 4 \cdot a^t \Rightarrow 3{,}8416 = 4 \cdot a^2$$

$$3{,}8416 : 4 = a^2 \Leftrightarrow 0{,}9604 = a^2 \Leftrightarrow a = 0{,}98 \text{ o } a = -0{,}98$$

Como la base de la función exponencial debe ser positiva, solo sirve $a = 0{,}98$.

Luego, la fórmula buscada es

$$M(t) = 4 \cdot 0{,}98^t$$

Por ser una función exponencial, la variación de la masa es, en porcentaje, la misma día a día. *¿En qué porcentaje disminuye diariamente la masa?*

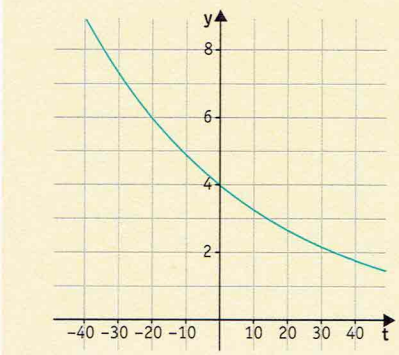
Como el primer día la masa era de $4 \cdot 0{,}98 = 3{,}92$ kg; ésta disminuyó 0,08 kg en un día, es decir, el 2 % de la masa inicial.

La masa perdida día a día es entonces, del 2 %, o lo que es lo mismo, la masa de cada día es el 98 % (100 % – 2 %) de la del día anterior.

Este porcentaje queda expresado en la base de la función exponencial: 1 – 0,02 = 0,98 (100 % – 2 %, expresados no porcentualmente).

La función $M(t) = 4 \cdot 0{,}98^t$ es decreciente porque cada día hay menos kg de masa, lo que muestra una diferencia respecto de las de base mayor que 1. Si se grafica $M(t)$ en todo su dominio armando una tabla de valores se obtiene:

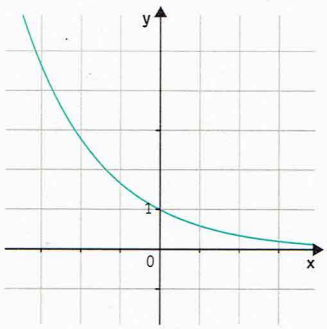
t	$M(t) = 4 \cdot 0{,}98^t$
–2	4,16
–1	4,08
0	4
1	3,92
2	3,84
3	3,76



Dom $(M) = \mathbb{R}$, Im $(M) = (0 ; +\infty)$, $C^0 = \emptyset$, $C^+ = \mathbb{R}$, $C^- = \emptyset$.

Lo que se acaba de analizar para la función de fórmula $M(t) = 4 \cdot 0{,}98^t$ vale para cualquier función exponencial de base entre 0 y 1 y $k > 0$.

Todas las funciones exponenciales $f(x) = a^x$, con $0 < a < 1$ tienen por gráfico una curva con la misma forma.



$Dom\,(f) = \mathbb{R}$;
$Im\,(f) = (0 ; +\infty)$;
$C^0 = \emptyset$, $C^+ = \mathbb{R}$ y $C^- = \emptyset$;
Estas funciones son decrecientes y se verifica $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Por este motivo, la recta $y = 0$ es asíntota horizontal a la derecha del gráfico y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Estudio de funciones exponenciales

Con todo lo trabajado hasta el momento, puede realizarse el estudio de una función que contenga varias operaciones sobre la expresión exponencial.

Problema 9

Encontrar dominio, imagen, conjuntos de ceros, positividad y negatividad, límite en $+\infty$ y $-\infty$, ecuaciones de la asíntota horizontal y construir un gráfico aproximado de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 3 \cdot 4^x - 48$ **b.** $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} - 4$

$Dom\ (f) = \mathbb{R}$, porque la operación $3 \cdot 4^x - 48$ puede realizarse para cualquier número.

¿Cuál es la imagen de f?

Como $4^x > 0$ para cualquier valor $x \in \mathbb{R}$:

$$3 \cdot 4^x > 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 4^x - 48 > -48 \Leftrightarrow f(x) > -48$$

Entonces, $Im\ (f) = (-48\ ;\ +\infty)$

¿Cuál es el límite en el infinito?

Si x tiende a $+\infty \Rightarrow 4^x$ tiende a $+\infty$ (porque las funciones exponenciales con base mayor que 1 tienden a $+\infty$ cuando la variable tiende a $+\infty$) $\Rightarrow 3 \cdot 4^x$ tiende a $+\infty \Rightarrow 3 \cdot 4^x - 48$ tiende a $+\infty$.

Entonces, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Si x tiende a $-\infty \Rightarrow 4^x$ tiende a 0 (porque las funciones exponenciales con base mayor que 1 tienden a 0 cuando la variable tiende a $-\infty$) $\Rightarrow 3 \cdot 4^x$ tiende a $0 \Rightarrow 3 \cdot 4^x - 48$ tiende a -48.

Entonces, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -48$

¿Cuál es la asíntota horizontal?

Multiplicar a 4^x por 3 no afecta a la asíntota horizontal de 4^x ($y = 0$), mientras que restar 48, la "baja" 48 unidades. Luego, la asíntota horizontal es $y = -48$.

Para hallar los ceros, hay que resolver la ecuación: $3 \cdot 4^x - 48 = 0$

$$3 \cdot 4^x - 48 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 4^x = 48 \Leftrightarrow 4^x = 48 : 3 \Leftrightarrow 4^x = 16 \Leftrightarrow x = 2$$

Por lo tanto,

$Dom\ (f) = \mathbb{R}$

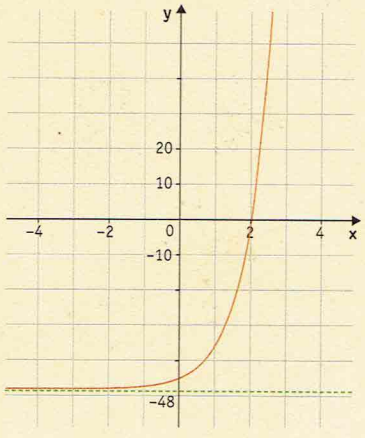
$Im\ (f) = (-48\ ;\ +\infty)$

$C^0 = \{2\}$

$C^+ = (2;\ +\infty)$

$C^- = (-\infty\ ;\ 2)$

Como la base es mayor que uno, con estos datos puede trazarse la curva.



La función $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} - 4$ es una función exponencial, $Dom\ (g) = \mathbb{R}$,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} - 4 > -4 \Leftrightarrow g(x) > -4$$

Entonces, $Im\ (g) = (-4\ ;\ +\infty)$

$4^x = 16$ es una ecuación exponencial. Es claro que el valor de x que la verifica es 2. Pero para resolver ecuaciones como $4^x = 6$, se necesitarán otros recursos que se estudiarán en el próximo capítulo.

¿Cuál es el límite en el infinito?

Si x tiende a $+\infty \Rightarrow -x$ tiende a $-\infty \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ tiende a $+\infty$ (porque las funciones exponenciales con base entre 0 y 1 tienden a $+\infty$ cuando la variable tiende a $-\infty$) $\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Si x tiende a $-\infty \Rightarrow -x$ tiende a $+\infty \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ tiende a 0 (porque las funciones exponenciales con base entre 0 y 1 tienden a 0 cuando la variable tiende a $+\infty$) $\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} g(x) = -4$

De lo anterior, puede decirse que la curva tendrá asíntota horizontal "a izquierda" $y = -4$.

¿Tiene ceros? ¿Cuándo es positiva y cuándo negativa?

Para hallar los ceros, hay que resolver la ecuación:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} - 4 = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

Por lo tanto, $C^0 = \{2\}$.

Para hallar el C^+ y el C^- puede calcularse la imagen de algún número de cada uno de los dos intervalos en que queda dividido el dominio a partir de la única raíz.

La tabla que sigue muestra estos resultados:

x	$(-\infty ; 2)$	2	$(2 ; +\infty)$
$g(x)$	−	0	+

porque, $g(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 - 4 = -3$ y $g(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} - 4 = 4$.

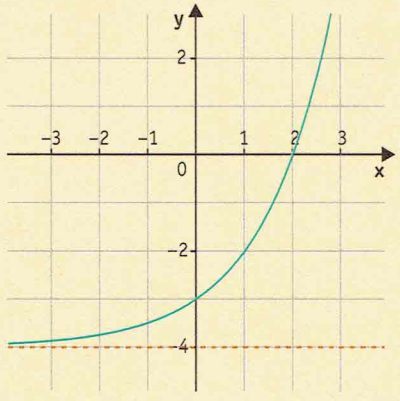
Entonces: $C^+ = (2 ; +\infty)$ y $C^- = (-\infty ; 2)$.

Otra manera de pensar esta función para su estudio es a partir de rescribir su fórmula:

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} - 4 = 2^x - 4$$

Así, la función resulta una exponencial con base mayor que 1 y un exponente más simple. En este caso, se trata de la curva $y = 2^x$, corrida 4 unidades para abajo.

Dom $(g) = \mathbb{R}$
Im $(g) = (-4 ; +\infty)$
$y = -4$ asíntota horizontal
$C^0 = \{2\}$
$C^+ = (2 ; +\infty)$
$C^- = (-\infty ; 2)$
Como la base es mayor que uno, con estos datos puede trazarse la curva.



ACTIVIDADES

1. Hallen dominio, imagen, conjuntos de ceros, positividad y negatividad, límite en $+\infty$ y $-\infty$, ecuaciones de la asíntota horizontal y realicen un gráfico aproximado de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 4 \cdot 2^x - 32$ **b.** $g(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x - 5$ **c.** $h(x) = -4 \cdot 3^x + 36$ **d.** $i(x) = -2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3$ **e.** $k(x) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 3$ **f.** $l(x) = -4 \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^x - 2$

Interés simple y compuesto

Problema 10

Una persona realiza un plazo fijo en un banco depositando la suma de $ 1500 durante 3 meses a una tasa anual del 16 %.

a. ¿A cuánto asciende el monto de la operación?

b. Si decide renovar el plazo fijo por otros tres meses y así sucesivamente hasta completar 12 meses. ¿Cuánto dinero tendrá al final de esta nueva operación?

Una tasa anual del 16 % aplicada a $ 1500 da una ganancia **anual** de $1500 \cdot \frac{16}{100} = \$\ 240$, que es lo mismo que calcular el 16 % de $ 1500. Como el tiempo de la inversión es de 3 meses, y en un año hay 4 períodos de 3 meses, la ganancia será 240 : 4 = $ 60.

Una forma menos "artesanal" de calcular el interés es multiplicar el capital por la tasa (expresada como número racional) y por el tiempo (expresado en la misma unidad que la tasa).

Para expresar 3 meses en años, hay que dividirlo por 12.

Entonces, el interés es: $I = 1500 \cdot \frac{16}{100} \cdot \frac{3}{12} = \$\ 60$

El monto de la operación es $M = C + I = 1500 + 60 = \$\ 1560$

Si decide renovar el plazo fijo por otros tres meses y así sucesivamente hasta completar 12 meses, podría pensarse que, si en un trimestre gana $ 60, en 4 trimestres (12 meses) ganará 60 · 4 = $ 240.

Pero este razonamiento es incorrecto, porque al final de cada trimestre lo ganado se incorpora al capital. Esto quiere decir que no son $ 1500 los que en cada trimestre se invierten sino los $ 1500 iniciales más los intereses ganados en los trimestres anteriores. Como es más la plata que está generando intereses trimestre a trimestre, es esperable que el interés total ganado sea más que $ 240.

En la tabla que sigue se muestra el proceso de incremento de dinero, trimestre a trimestre:

	Capital	Interés	Monto
Trimestre 1	1500	$1500 \cdot \frac{16}{100} \cdot \frac{1}{4} = 60$	1560
Trimestre 2	1560	$1560 \cdot \frac{16}{100} \cdot \frac{1}{4} = 62{,}4$	1622,4
Trimestre 3	1622,4	$1622{,}4 \cdot \frac{16}{100} \cdot \frac{1}{4} = 64{,}9$	1687,3
Trimestre 4	1687,3	$1687{,}3 \cdot \frac{16}{100} \cdot \frac{1}{4} = 67{,}5$	1754,8

En la tabla se ve que el interés ganado por período va creciendo y esto es debido a que los intereses se van sumando al capital, generando más intereses.

Los $ 1500 iniciales se transformaron mediante la inversión en $ 1754,8, lo que representa una ganancia de $ 254,8.

Se llama **capital** al dinero que se deposita al efectuar una inversión financiera. La ganancia obtenida se llama **interés**, la suma del capital y el interés es el **monto** y el porcentaje de ganancia que ofrece el banco es la **tasa de interés**.

El interés simple que se obtiene al invertir un cierto capital C a un interés del i % anual durante t meses es:

$$I = C \cdot \frac{i}{100} \cdot \frac{t}{12}$$

El monto de la operación es entonces:

$$M = C + I$$

Las operaciones en las que el capital no se retira y se reinvierte por períodos regulares, se llaman de **interés compuesto**. En estas operaciones, la acción de reinvertir el dinero por otros períodos regulares se llama **capitalización**.

Las operaciones que no tienen reinversiones intermedias, como el primer ejemplo, se llaman de **interés simple**.

Si se busca una forma más económica de calcular estos intereses compuestos:

Capital	Monto
	PrimerTrimestre
1500	$1500+(1500\cdot\frac{16}{100}\cdot\frac{1}{4})=1500\cdot(1+\frac{16}{100}\cdot\frac{1}{4})$
	Segundo Trimestre
$1500\cdot(1+\frac{16}{100}\cdot\frac{1}{4})$	$1500\cdot(1+\frac{16}{100}\cdot\frac{1}{4})+1500\cdot(1+\frac{16}{100}\cdot\frac{1}{4})\cdot\frac{16}{100}\cdot\frac{1}{4}=$ $1500\cdot(1+\frac{16}{100}\cdot\frac{1}{4})\cdot(1+\frac{16}{100}\cdot\frac{1}{4})=1500\cdot(1+\frac{16}{100}\cdot\frac{1}{4})^2$
	TercerTrimestre
$1500\cdot(1+\frac{16}{100}\cdot\frac{1}{4})^2$	$1500\cdot(1+\frac{16}{100}\cdot\frac{1}{4})^2+1500\cdot(1+\frac{16}{100}\cdot\frac{1}{4})^2\cdot\frac{16}{100}\cdot\frac{1}{4}=$ $1500\cdot(1+\frac{16}{100}\cdot\frac{1}{4})^2\cdot(1+\frac{16}{100}\cdot\frac{1}{4})=1500\cdot(1+\frac{16}{100}\cdot\frac{1}{4})^3$
	Cuarto Trimestre
$1500\cdot(1+\frac{16}{100}\cdot\frac{1}{4})^3$	$1500\cdot(1+\frac{16}{100}\cdot\frac{1}{4})^3+1500\cdot(1+\frac{16}{100}\cdot\frac{1}{4})^3\cdot\frac{16}{100}\cdot\frac{1}{4}=$ $1500\cdot(1+\frac{16}{100}\cdot\frac{1}{4})^3\cdot(1+\frac{16}{100}\cdot\frac{1}{4})=1500\cdot(1+\frac{16}{100}\cdot\frac{1}{4})^4$

Por lo tanto, \$ 1500 depositados durante 12 meses a una tasa anual del 16 % capitalizados trimestralmente dan un monto de \$ $1500\cdot(1+\frac{16}{100}\cdot\frac{1}{4})^4$ = \$ 1754,8.

Con un capital de \$ C, colocados a una tasa del r % capitalizados en una cierta unidad de tiempo durante N períodos, se obtiene un monto de $M=C\cdot(1+i)^N$ donde i es la tasa expresada como número racional en la unidad de la capitalización.

Capitalización continua. El número e

Problema 11

Un inversor deposita en el banco \$ 1 durante un año a una tasa del 100 % anual.
¿Cuál es el monto obtenido al final de la operación según si el dinero se reinvierte semestralmente, cuatrimestralmente, mensualmente, etc.?

Como se trata de un interés compuesto, puede aplicarse la fórmula obtenida para el monto, variando la capitalización.

La tabla que sigue muestra los resultados:

Capitalización	Cantidad de períodos en un año	Monto (en \$)	
Anual	1	$(1+1)^1$	2
Semestral	2	$(1+\frac{1}{2})^2$	2,25
Cuatrimestral	3	$(1+\frac{1}{3})^3$	2,3703703...
Trimestral	4	$(1+\frac{1}{4})^4$	2,44140625...
Bimestral	6	$(1+\frac{1}{6})^6$	2,521626372...

Capitalización	Cantidad de períodos en un año	Monto (en $)	
Mensual	12	$(1+\frac{1}{12})^{12}$	2,613035...
Quincenal	24	$(1+\frac{1}{24})^{24}$	2,66373...
Semanal	52	$(1+\frac{1}{52})^{52}$	2,692596...
Diaria	365	$(1+\frac{1}{365})^{365}$	2,7145674...
Por hora	8760	$(1+\frac{1}{8760})^{8760}$	2,718126664...
Por minuto	525 600	$(1+\frac{1}{525\,600})^{525\,600}$	2,71827924257...
Por segundo	31 536 000	$(1+\frac{1}{31\,536\,000})^{31\,536\,000}$	2,718281785360...

En la tabla puede verse que, a medida que aumenta la cantidad de períodos, el monto obtenido a partir de $ 1 es cada vez mayor. La función $f(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es creciente.

La tabla muestra, además, que el crecimiento es cada vez menor. Esto se aprecia en que a medida que aumenta n, las cifras del monto se van "estabilizando", aumentando en cifras decimales más alejadas.

Si se pudiese seguir agrandando la cantidad de períodos, esto es, renovando la inversión en tiempos más y más chicos, el monto obtenido sería cada vez mayor, aunque aumentando cada vez menos.

Suponiendo que la cantidad de períodos tendiera a infinito, lo que equivale a capitalizar instante a instante, ¿qué pasará con el monto?

Puede demostrarse con herramientas del Análisis Matemático que la función crece siempre, pero con un "tope" y que es un número irracional cuyas primeras cifras son 2,7182818...

La importancia de este valor hizo que se lo simbolice con una letra, de la misma manera que se hizo con π. A este número se lo llama e.

En términos de límite, cuando n tiende a más infinito, la función tiende a e.

Esto significa que si se deposita $ 1 al 100 % anual y la cantidad de períodos de capitalización se hace tender a infinito, lo que equivale a que se renueve la inversión "continuamente", instante a instante, el monto obtenido será $ $e \approx$ $ 2,72.

Presentado el número e, que es un número real mayor que 1 y que aparece en situaciones concretas que involucran procesos exponenciales, puede pensarse en la función exponencial $f(x) = e^x$. Por tener base mayor que 1, esta función responde a todas las características estudiadas para ellas.

Con la ayuda de una calculadora científica pueden hallarse algunas imágenes para completar una tabla de valores y graficar aproximadamente la función.

Con una tasa constante, el interés aumenta a medida que se achica el período de capitalización. Esto explica que, en situaciones reales, las tasas que ofrecen los bancos también sean menores para lapsos más chicos.

El nombre de e para el número 2,718... se debe al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783).

Con una calculadora científica puede hallarse un valor aproximado de, por ejemplo, e^4. La tecla adecuada suele ser como la que se muestra sobre ln
Si es así, debe activarse con SHIFT.
Para calcular e^4 se sigue este procedimiento:
Shift ln 4 =
4 Shift ln =
según el modelo de la calculadora, obteniéndose aproximadamente 54,6.

ACTIVIDADES

2. a. Si se depositan $ 15 000 a una tasa del 4 % mensual con capitalización trimestral, durante 3 meses, ¿cuál es la ganancia obtenida?
b. ¿Qué diferencia habría en las ganancias si la inversión anterior se realizara con capitalización mensual?
3. *¿Cuántos meses de depósito a interés simple son necesarios para que un* capital de $ 1500 se transforme en $ 3200 a una tasa del 10 % mensual?
4. Una persona realiza un plazo fijo por un valor de $ 500, renovable mensualmente, por un lapso de 10 meses. Si la tasa ofrecida por el banco es del 2 % anual, ¿a cuánto ascenderá la suma depositada al final de la operación?
5. a. ¿Cuál es el monto que producen $ 800 depositados a una tasa de interés del 3 % anual, capitalizados bimestralmente, si el tiempo de la *operación es de 14 meses?*
b. Suponiendo que una persona realiza una inversión como la anterior pero decide retirar los intereses al final de cada bimestre, ¿cuál será la diferencia de dinero en las ganancias entre una operación y la otra?

Sucesiones

Problema 12

Dos empresas atraviesan un difícil momento económico, por lo que desde hace algún tiempo, la deuda de la primera empresa se incrementa en 2 millones de pesos por año, mientras que la de la segunda se duplica en igual lapso. Si debían 4 millones de pesos el año en que se inició la crisis de ambas, ¿cuántos años después cada una de las empresas debe 32 millones?

En la tabla siguiente se analiza la evolución de la deuda de cada empresa (expresada en millones de pesos) en los primeros años

T (años)	1	2	3	4
Deuda Empresa 1	4	6	8	10
Deuda Empresa 2	4	8	16	32

Por lo tanto, la segunda empresa debe 32 millones 4 años después de iniciada la crisis.

Si se continúa el estudio de la evolución de la deuda de la primera empresa, los valores son: 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, etc. Entonces, a 15 años de iniciada la crisis, esta empresa llega a una deuda de 32 millones.

Toda función $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se denomina **sucesión**.
A la imagen correspondiente a un valor n se la simboliza a_n.
Si cada término de la sucesión se obtiene sumando un valor fijo r al término anterior, la **sucesión** es **aritmética**.
Si en cambio, cada término de la sucesión se obtiene multiplicando por un valor fijo q el término anterior la **sucesión** se denomina **geométrica**.

Situaciones como la anterior pueden interpretarse como funciones cuyo dominio es el conjunto de los números naturales ya que la información de la deuda se da año a año. Así, los valores de la deuda pueden considerarse "numerados": la imagen de 1 es el primer elemento de la sucesión, la imagen de 2, el segundo y así siguiendo.

Así, a las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ se las llama sucesiones de números reales. Es común que en las sucesiones no se muestren los pares de valores (x ; y) sino que solo se listen las imágenes.

Por ejemplo; la sucesión a_n correspondiente a la deuda de la primera empresa es: $\{a_n\} = \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, \ldots\}$, mientras que la de la segunda, $\{b_n\}$ es: $\{b_n\} = \{4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots\}$

En la primera de las sucesiones, cada término se obtiene sumando un mismo número (2 en este caso) al término anterior. A este tipo de sucesiones se las llama aritméticas.

Por su parte, en la segunda sucesión, cada término se obtiene multiplicando por un número (2 en este caso) al término anterior. Estas sucesiones se llaman geométricas.

Se ha dicho que toda sucesión es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, la sucesión $\{r_n\} = \{3, 9, 27, 81, 243, 729, \ldots\}$ es una forma de expresar la función con dominio $\mathbb{N}$ cuya tabla de valores se muestra parcialmente:

n	1	2	3	4	5	6
r_n	3	9	27	81	243	729

y cuya fórmula es $r_n = 3^n$. En este caso, el número del término coincide con el exponente al que hay que elevar al número 3. El término número n o enésimo se obtiene reemplazando a n en la fórmula $r_n = 3^n$.

Otras veces, las sucesiones se definen a través de una fórmula que vincula solo a las imágenes, prescindiendo de los valores del dominio.

Así, en la sucesión anterior, puede verse que cada término es el resultado de multiplicar por 3 al anterior. Esto se expresa así: $r_{n+1} = 3r_n$ y es necesario indicar además el valor del primer término.

La sucesión $\{a_n\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...\}$ es un ejemplo de **sucesiones aritméticas**.

Cada término se obtiene sumando 2 al término anterior. Este valor se llama razón de la sucesión.

$a_n = 2n + 1$ es la fórmula del n–ésimo término;

$a_1 = 1$ y $a_{n+1} = a_n + 2$ es la fórmula por recurrencia.

Las fórmulas como $a_n = r^n$, que son las que se usan habitualmente para las funciones, son llamadas **fórmulas del n–ésimo término**, cuando se habla de sucesiones.

$r_n = 3^n$ es la fórmula del n–ésimo término de una sucesión geométrica; $r_1 = 3$ y $r_{n+1} = 3 \cdot r_n$ es la fórmula por recurrencia.

La fórmula del n–ésimo término de la sucesión $\{r_n\}$ corresponde a una función exponencial.

Sucesiones geométricas

Problema 13

¿Es cierto que si se conoce el primer término y la razón de una sucesión geométrica se puede hallar cualquiera de sus términos?

La función correspondiente a una sucesión geométrica tiene la fórmula de una función exponencial; en cambio, la correspondiente a una sucesión aritmética representa una función lineal.

En una sucesión geométrica, cada término se obtiene multiplicando al anterior por la razón q.

Si el primer término es x_1, el segundo será $x_1 \cdot q$, y así sucesivamente. Luego:

$$x_1 = x_1$$
$$x_2 = x_1 \cdot q$$
$$x_3 = x_2 \cdot q = (x_1 \cdot q) \cdot q = x_1 \cdot q^2$$
$$x_4 = x_3 \cdot q = (x_1 \cdot q^2) \cdot q = x_1 \cdot q^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = x_1 \cdot q^{n-1}$$

Entonces, cada término puede obtenerse a partir del primero y la razón.

La fórmula $x_n = x_1 \cdot q^{n-1}$ es la fórmula de una sucesión geométrica cualquiera. Como se supuso, conociendo x_1 y q puede hallarse cualquiera de sus términos.

Suma de términos de una sucesión geométrica

Problema 14

¿Cuál es el 10° término de la sucesión $\{x_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...\}$?

¿Cuál es la suma de los 26 primeros términos?

Dada una sucesión geométrica $\{x_n\}$ y siendo q su razón, un término x_n cualquiera, los términos se obtiene de la siguiente manera: $x_n = x_1 \cdot q^{n-1}$

$\{x_n\}$ es una sucesión geométrica de razón $\frac{1}{2}$ (cada término es el anterior multiplicado por $\frac{1}{2}$) y el primer término es 1. Entonces:

$$x_{10} = x_1 \cdot q^9 \Rightarrow x_{10} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}$$

BIBLIOTECA PUBLICA MUNICIPAL
"GENERAL MANUEL BELGRANO"
SISTEMA MUNICIPAL DE BIBLIOTECAS PUBLICAS
MUNICIPALIDAD DE GENERAL PUEYRREDON

Una manera de encontrar la suma de los primeros 26 términos de la sucesión es calcular cada uno de ellos y sumarlos. Pero si bien este método es correcto, puede ser largo si la cantidad de términos a sumar es grande.

Es posible encontrar una fórmula que permita hallar la suma de los n primeros términos de una sucesión geométrica.

Si se llama S_n a la suma de los primeros n términos, resulta que:

$S_1 = x_1$

$S_2 = x_1 + x_2 = x_1 + x_1 \cdot q = x_1 \cdot (1 + q)$

$S_3 = x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + x_1 \cdot q + x_1 \cdot q^2 = x_1 \cdot (1 + q + q^2)$

$S_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + x_1 \cdot q + x_1 \cdot q^2 + x_1 \cdot q^3 = x_1 \cdot (1 + q + q^2 + q^3)$

.....

$S_n = x_1 \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1})$

Se multiplica y se divide por $q - 1$ (con $q \neq 1$) con el propósito de obtener una expresión más sencilla:

$$S_n = \frac{x_1 \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1})(q - 1)}{q - 1}$$

Como $q^n - 1$ vale 0 cuando $q = 1$, $q^n - 1$ es divisible por $q - 1$. El cociente de esta división es $(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1})$. Entonces $q^n - 1 = (q - 1) \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1})$.

Luego: $S_n = x_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Si la razón es 1, la suma de los n primeros términos es $S_n = n \cdot x_1$

Para calcular la suma de los 26 primeros términos

$$S_{26} = x_1 \cdot \frac{q^{26} - 1}{q - 1} \Rightarrow S_{26} = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{26} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \approx 1{,}99999997$$

La suma de los primeros *n* términos de una sucesión geométrica se obtiene, conociendo el primer término y la razón, como:
$S_n = x_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, con $q \neq 1$.
Si $q = 1$, $S_n = n \cdot x_1$

Problema 15

El primer término de una sucesión geométrica es 4 y su razón es $\frac{1}{2}$. ¿Qué valor se obtiene al sumar los primeros 10 términos? ¿Y los primeros treinta?
¿Qué sucede con la suma de los n primeros términos cuando n tiende a infinito?

Una fórmula que permite calcular la suma de los n primeros términos de una sucesión geométrica es $S_n = x_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Para contestar las dos primeras preguntas basta con reemplazar los valores dados en dicha fórmula.

En ambos casos $x_1 = 4$ y $q = \frac{1}{2}$. Entonces:

$$S_{10} = 4 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \approx 7{,}9921875$$

$$S_{30} = 4 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{30} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \approx 7{,}999999993$$

Aparentemente, a medida que aumenta la cantidad de términos que se suman, el resultado se acerca más a 8. Sin embargo, en Matemática no alcanza con dos ejemplos para arribar a ninguna conclusión. Es posible plantear una hipótesis, pero es necesario corroborarla o no a partir de propiedades.

Para el caso que se está analizando, la suma de los n primeros términos es

$$S_n = 4 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 4 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2}} = -8 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]$$

Cuando n tiende a infinito, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tiende a cero, ya que puede pensarse en una función exponencial de base menor que 1, aunque el valor de n sea un número natural. Entonces, $\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$ tiende a -1, con lo cual S_n tiende a $-8 \cdot (-1) = 8$.

A partir de lo anterior es posible verificar que, para esta sucesión, las sumas S_n se acercan a 8 a medida que n tiende a infinito.

¿Pero qué sucede en una sucesión geométrica cualquiera? ¿Siempre es posible determinar a qué valor tiende la suma de sus términos?

A partir del análisis de la fórmula $S_n = x_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ se puede hallar una respuesta.

Los valores de x_1 y $q - 1$ son fijos y no dependen de la suma que se esté tratando de calcular. Lo que depende del valor de n es $q^n - 1$. Luego, habrá que analizar qué sucede con esta diferencia a medida que n tiende a infinito.

Las conclusiones obtenidas para funciones exponenciales serán un insumo para lo que se está intentando determinar.

Si la base de la función es un número entre 0 y 1, la función decrece y tiende a 0 cuando el exponente tiende a $+\infty$. En cambio, si la base es mayor que 1, la función crece y tiende a $+\infty$ cuando el exponente tiende a $+\infty$.

En este caso, si $0 < q < 1$, q^n tiende a 0 cuando n tiende a $+\infty$ y $q^n - 1$ tiende a -1. Entonces, S_n tiende a $x_1 \cdot \frac{-1}{q - 1}$.

La suma de los n primeros términos tiende entonces a $x_1 \cdot \frac{1}{1 - q}$ cuando $0 < q < 1$.

Si la base de la función es un número mayor que 1, la función crece y tiende a $+\infty$ cuando el exponente tiende a $+\infty$.

Si $q > 1$, q^n tiende a $+\infty$ cuando n tiende a $+\infty$ y $q^n - 1$ también, ya que al restar 1 a un número muy grande sigue siendo muy grande.

Entonces, S_n tiende a $+\infty$ cuando n tiende a infinito. Esto significa que las sumas crecen sin un tope.

Si q es un valor entre -1 y 0 sucede lo mismo que cuando es un número entre 0 y 1. De la misma manera, si $q < -1$ las sumas se comportan de la misma manera que cuando $q > 1$.

Puede decirse entonces que:

$$\lim_{x \to +\infty} S_n = \begin{cases} x_1 \cdot \frac{1}{1 - q} & \text{si} \quad -1 < q < 1 \\ \infty & \text{si} \quad q < -1 \text{ o } q > 1 \end{cases}$$

Para una sucesión geométrica en la cual $-1 < q < 1$, la suma de sus términos cuando n tiende a infinito es $S_\infty = x_1 \cdot \frac{1}{1 - q}$
En este caso se dice que la serie es **convergente**, pues su suma se acerca a un valor determinado.
En cambio si $q < -1$ o $q > 1$, S_n tiende a infinito cuando n tiende a infinito.
La serie es, por lo tanto, **divergente**.

6. Determinen el valor de la suma en el infinito para cada una de las siguientes secesiones geométricas:

a. $x_1 = 3, q = -\frac{1}{3}$ **b.** $x_1 = 3, q = -2$ **c.** $x_1 = -5, q = \frac{2}{3}$

7. Las siguientes son sucesiones geométricas. ¿Para qué valores de x son convergentes?

a. $\{a_n\} = \{1; \frac{1}{x^2}; \frac{1}{x^4}; \frac{1}{x^6}; \ldots\}$ **b.** $\{a_n\} = \{1; \frac{x+1}{x-2}; \frac{(x+1)^2}{(x-2)^2}; \frac{(x+1)^3}{(x-2)^3}; \ldots\}$

8. La suma de los dos primeros términos de una sucesión geométrica es $\frac{8}{3}$ y la suma en el infinito es 3. Hallen los valores posibles del primer término y la razón de esta sucesión.

ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN

9. Escriban la fórmula de una función exponencial $f(x) = k \cdot a^x$ que cumpla que:

a. $f(0) = 2$ y $f(-3) = \frac{1}{32}$ **b.** $f(-3) = 128$ y $f(0) = 2$

10. Dados un par $(x; y)$ que verifica una función exponencial $f(x) = a^x$, escriban una fórmula que cumpla que por cada unidad que aumenta x, el nuevo valor de y ...

a. representa el 600% del anterior.

b. representa el 80% del anterior.

11. Un cierto micro-organismo es estudiado en un laboratorio. En uno de los cultivos preparados se observó que a los 5 segundos había 3072 gramos de bacterias, que a los 9 segundos había 786 432 gramos y que el crecimiento es exponencial.

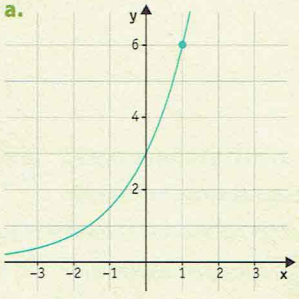
a. ¿Con cuántos gramos de bacterias se inició el estudio de este cultivo?

b. ¿Cuántos gramos de bacterias había a los 15 segundos?

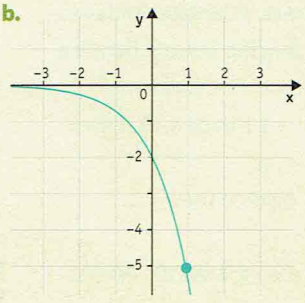
c. ¿En qué porcentaje aumenta la población de estas bacterias por segundo?

12. Los siguientes gráficos corresponden a funciones de la forma $f(x) = k \cdot a^x$. Indiquen cuánto valen a y k en cada caso.

a.

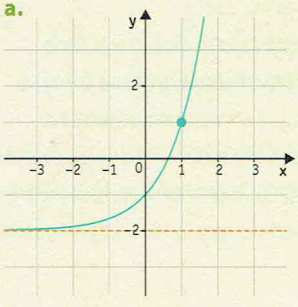


b.

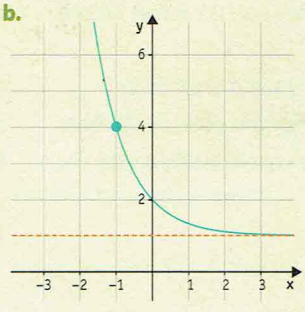


14. Los siguientes gráficos corresponden a funciones de la forma $f(x) = a^x + b$. Indiquen cuánto valen a y b en cada caso.

a.



b.



14. ¿Cuál es el capital que en 8 meses produce un interés de $ 13 200 si se coloca a interés simple al 24 % semestral?

15. Una persona tiene una deuda y para cancelarla le proponen dos opciones: pagar $ 20 000 dentro de tres años o $ 12 000 ahora. ¿Cuál es la opción más conveniente para él, si los bancos ofrecen una tasa del 2 % mensual capitalizable mensualmente?

16. Hallen la razón, escriban la fórmula del n–ésimo término y hallen el valor del 9º término de las siguientes sucesiones geométricas:

a. $\{x_N\} = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, ...\}$

b. $\{x_N\}$ es la sucesión de potencias de 4

17. De una sucesión geométrica se sabe que ...

a. el primer término es 3 y la razón $\frac{2}{3}$. Hallen el 10º término.

b. el sexto término es 100 y la razón es 2. Hallen el primer término.

c. el primer término es 8 y el quinto es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la razón?

d. el primer término es $\frac{1}{2}$ y la razón 2. Hallen S_{12}.

18. La suma de los primeros cinco términos de una sucesión geométrica es 170. ¿Cuál es el primer término si se sabe que la razón es 4?

19. Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifiquen.

a. Las funciones $f(x) = 4 \cdot 3^x$ y $g(x) = 12^x$ son iguales.

b. La función $f(x) = 6^x + 1$ no interseca al eje de las abscisas.

20. Una pelota se deja caer desde una altura de 2 m. Cada vez que toca el piso, rebota a $\frac{4}{5}$ de la distancia de la que cayó. ¿Qué distancia total recorre la pelota hasta que toca el piso por cuarta vez?

21. La población de una pequeña ciudad disminuye año a año, en un porcentaje constante. En 1968 la población era de 50 000 y al año siguiente era de 45 000.

a. ¿Cuál era la población en el año 1971?

b. ¿Cuántos años deben transcurrir para que la población sea menor que 2995?

22. Un atleta decide retomar su entrenamiento. La primera semana corre 5 km y cada semana aumenta la distancia en 7%. ¿Cuántas semanas tardará en recorrer al menos 10 km?

23. La magnitud de un incendio forestal es tal que la cantidad de hectáreas quemadas al cabo de t horas de iniciado es $f(t) = 20 \cdot 1{,}55^t$. ¿Qué porcentaje del bosque se quema desde una hora t hasta la hora siguiente, $t + 1$?

AUTOEVALUACIÓN

Marquen la o las opciones correctas en cada caso.

1. En la función exponencial $f(x) = 0{,}8^x$, por cada unidad que aumenta x, y disminuye un ...

a 80 %

b 180%

c 20%

d 120%

2. Un ejemplo de crecimiento exponencial es cuando por cada unidad que aumenta x ...

a y también aumenta una unidad.

b y aumenta siempre el mismo valor.

c y aumenta siempre el mismo porcentaje.

d y se mantiene constante.

3. Una función exponencial que tiene por asíntota horizontal a la recta $y = 4$ es ...

a $f(x) = 2^x + 4$

b $f(x) = 4^x$

c $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

d $f(x) = 2^x - 4$

4. En la sucesión geométrica $x_1 = 2$ y $x_{n+1} = -2 \cdot x_n$ ...

a el sexto término es 32.

b la suma de los ocho primeros términos es –170.

c el vigésimo término es positivo.

d la razón es 2.

5. Si para calcular el monto de un cierto capital colocado durante 4 meses con capitalización mensual se utilizó la cuenta $M = C \cdot (1 + 0{,}12)^4$ entonces la tasa anual es ...

a 1 %

b 144 %

c 1,44 %

d 12 %

6. La función exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x - 5$ tiene por C^0 y C^+, respectivamente, a ...

a $\{-1\}$ y $(-1\,;+\infty)$

b $\{-1\}$ y $(-\infty\,;-1)$

c $\{1\}$ y $(1\,;+\infty)$

d $\{1\}$ y $(-\infty\,;1)$

7. Una sustancia radiactiva se desintegra de forma tal que cada día queda un 90 % de la masa del día anterior. Si una muestra de ella tiene hoy un peso de 10 kg, su peso en 12 días será, aproximadamente, de ...

a 10^{-12} kg

b 9,718 kg

c 9 kg

d 2,824 kg

8. En una sucesión geométrica el primer término es 15 y la razón es –2. Luego,

a Todos los términos son negativos.

b El décimo término vale 15 360.

c La suma de los 20 primeros términos es negativa.

d La diferencia entre dos términos consecutivos es de 2 unidades.

9. En una sucesión geométrica, $x_3 = 32$ y $x_7 = 4$. Entonces,

a El primer término es 128.

b La razón es 2.

c La razón debe ser un número menor que 1.

d La suma de los 10 primeros términos es 255,75.

10. Si $\{x_n\}$ es una sucesión geométrica, entonces,

a La sucesión $\{x_n^2\}$ también es geométrica.

b La suma de los n primeros términos de la sucesión $\{x_n{}^2\}$ se obtiene elevando al cuadrado la suma de los n primeros términos de la sucesión $\{x_n\}$.

c La suma de los n primeros términos de la sucesión $\{x_n\}$ es siempre menor que la suma de los n primeros términos de la sucesión $\{x_n{}^2\}$.

d Si la razón de la sucesión $\{x_n\}$ es r, entonces la razón de la sucesión $\{x_n{}^2\}$ es r^2.

11. Si $\{x_n\}$ es una sucesión geométrica, entonces,

a La sucesión $\{x_n + k\}$, con k un número real, también es geométrica.

b La sucesión $\{k \cdot x_n\}$, con k un número real distinto de cero, también es geométrica.

CONTENIDOS

- Logaritmos
- Función Logaritmo
- Gráficos y propiedades de los logaritmos
- Nuevas propiedades de los logaritmos
- Análisis de funciones logarítmicas
- El logaritmo natural
- Relación entre función exponencial y función logarítmica
- Expresión de una función exponencial conociendo puntos de su gráfico
- Ecuaciones exponenciales y logarítmicas
- Otros tipos de ecuaciones exponenciales
- Ecuaciones con logaritmos

En el capítulo anterior se ha estudiado el comportamiento de procesos que crecían o decrecían de manera exponencial. Estos modelos matemáticos resultan fértiles para resolver varios tipos de situaciones. Pero a su vez, hay algunos aspectos que precisan ser estudiados con mayor profundidad pues, los tratados hasta aquí, resultan insuficientes para resolver algunas cuestiones.

2 FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Problema 1

Si un cierto día, la temperatura es de 28°, y hay mucha humedad, es frecuente escuchar que la sensación térmica es de, por ejemplo, 32°. La sensación térmica depende de muchas variables y resulta muy complejo tratar con todas ellas simultáneamente. Por eso, en este caso, se considerarán como variables que se relacionan la sensación térmica en función únicamente de la humedad. Es decir, existe una fórmula que relaciona la sensación térmica en función de la humedad, para la temperatura de 28° centígrados y la velocidad del viento de 10 km/h. Dicha fórmula es: $ST(h) = 22{,}86 \cdot 1{,}004^h$ donde h es el porcentaje de la humedad (que deberá ser mayor o igual a 60%) y ST es la sensación térmica en grados centígrados.

Si un día la temperatura es 28° y la velocidad del viento de 10km/h:

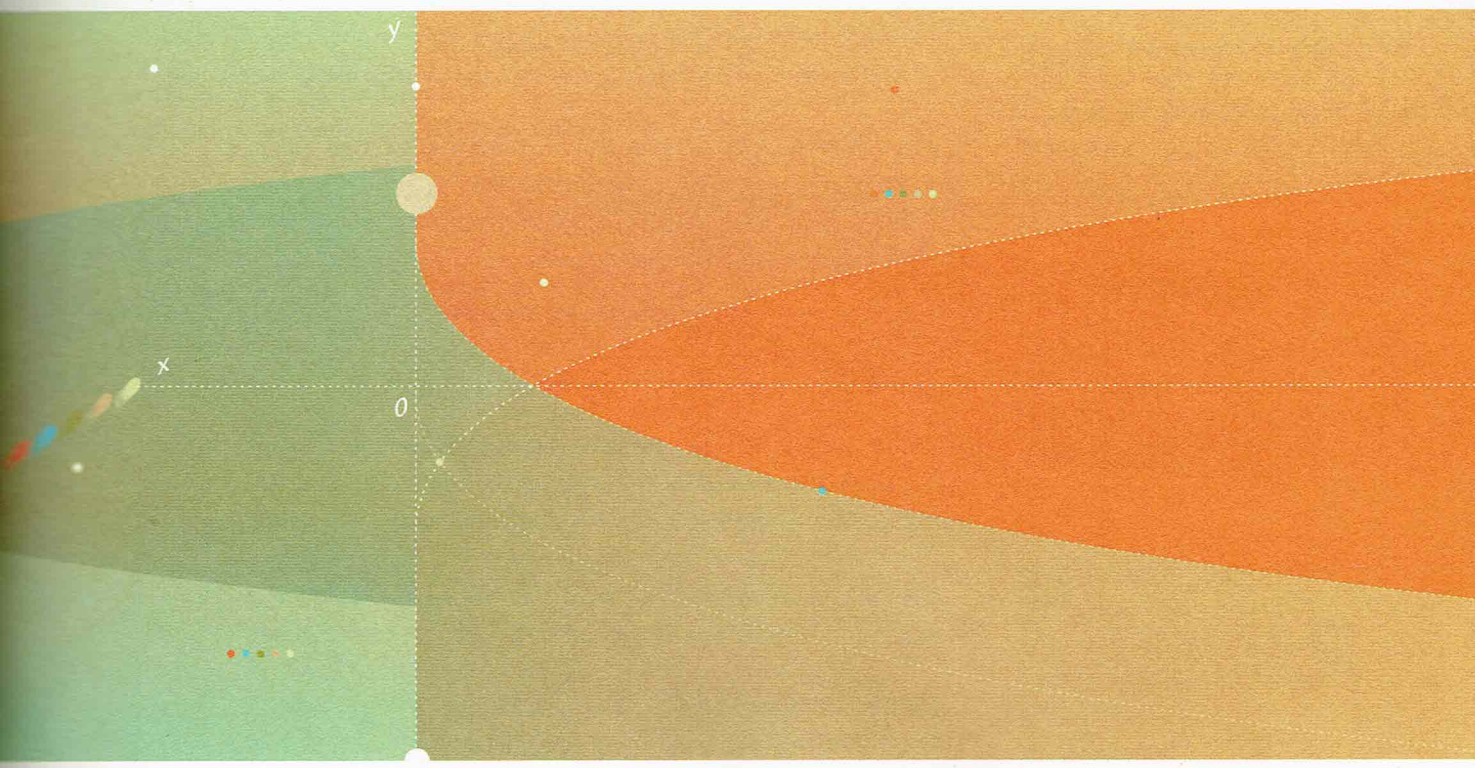
a. ¿Cuál es la sensación térmica si la humedad es de 60%? ¿Y de 80%? ¿Y de 100%?

b. ¿Cuál será la humedad si se sabe que la sensación térmica es de 30,4°?

Para determinar la sensación térmica para un día con 60% de humedad se reemplaza en la fórmula y se obtiene:

$$ST(60) = 22{,}86 \cdot 1{,}004^{60} \approx 22{,}86.1{,}27 = 29{,}03$$

Es decir, la sensación térmica será aproximadamente de 29,03°.



Si la humedad es de 80% o 100% se repite el procedimiento anterior y se obtiene:

Porcentaje de humedad	Sensación térmica
80%	$22{,}86 \cdot 1{,}004^{80} \approx 22{,}86.1{,}376 \approx 31{,}46°$
100%	$22{,}86 \cdot 1{,}004^{100} \approx 22{,}86.1{,}49 \approx 34{,}06°$

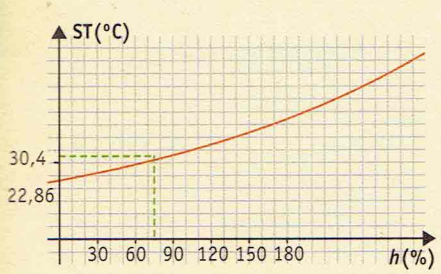
Las funciones exponenciales son de la forma:

$f(x) = k \cdot a^x$ con $a > 0$, $a \neq 1$ y $k \neq 0$

a se denomina base y x exponente.

En este caso, $f(x) = 22{,}86 \cdot 1{,}004^x$

Determinar la humedad, sabiendo que la sensación térmica es de 30,4°, no parece ser tan sencillo. Por los datos que se obtuvieron antes, como la sensación térmica para 60% de humedad es de 29,03° y para 80% de humedad es de 31,4°, se puede anticipar que si la sensación térmica es de 30,4° la humedad está entre 60% y 80%. Pero es posible hacer un gráfico de la sensación térmica, en función de la humedad, que permitirá saber, con mayor aproximación el porcentaje de humedad.



Gracias al gráfico es posible anticipar que, si la sensación térmica es de 30,4°, la humedad estará entre 70 % y 80 %.

¿Cómo se podrá hacer para saber con mayor exactitud el porcentaje de humedad?
Para ello habrá que encontrar el valor de h que sea solución de la ecuación:

$$ST(h) = 22{,}86 \cdot 1{,}004^h = 30{,}4 \Leftrightarrow 1{,}004^h = 30{,}4 : 22{,}86 \Leftrightarrow 1{,}004^h \approx 1{,}33$$

Hasta el momento no se ha estudiado un método para resolver la ecuación anterior, pero puede hacerse una tabla teniendo en cuenta que h debe estar entre 70 y 80.

h	70	71	72	73	74
$1{,}004^h$	1,32239	1,32768	1,33299	1,3383	1,3437

Puede decirse, entonces, que la humedad tendrá que ser un valor entre 72% y 73%. Se podría seguir de esta manera aproximando con decimales pero se analizará una herramienta que permitirá hallar el valor de h de manera exacta. Para encontrarlo se usan los logaritmos.

El logaritmo en base a de un número b es la potencia c, a la que hay que elevar el número a para que dé por resultado el número b. Simbólicamente se escribe:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

y se lee logaritmo en base a de b es igual a c.
Esta definición es válida para $a > 0$ pero diferente de 1 y $b > 0$.

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ donde $a > 0; a \neq 1$ y $b > 0$.

Por ejemplo:

$\log_2 8 = 3$	pues	$2^3 = 8$
$\log_3 729 = 6$	pues	$3^6 = 729$
$\log_{10} 0{,}001 = -3$	pues	$10^{-3} = 0{,}001$

Una cuestión de escritura: $\log_{10} b$ se nota $\log b$
Es decir, si no se escribe la base, se asume que el logaritmo es en base 10.

Se pueden analizar las restricciones que propone la definición:

- a debe ser positivo porque hace referencia a la base de una función exponencial y en el capítulo anterior se analizó que para que el dominio de esta función sean todos los números reales es necesario que dicha base sea positiva.
- $a \neq 1$ porque $\log_1 x$ solo podría calcularse cuando x = 1 ya que $1^c = 1$ para cualquier valor de c. No tiene sentido analizar esta función ya que su dominio es un solo número y su gráfica es un punto.
- $b > 0$ porque resulta de una potencia de a (que es positivo).

Función logaritmo

A partir de la definición de logaritmo en base a, es posible definir una función, la función logaritmo, de la siguiente manera: $f(x) = \log_a x$

En esta función, a es un número positivo, distinto de 1 y $x > 0$.

Problema 2

Trazar el gráfico de la función $g(x) = \log x$.

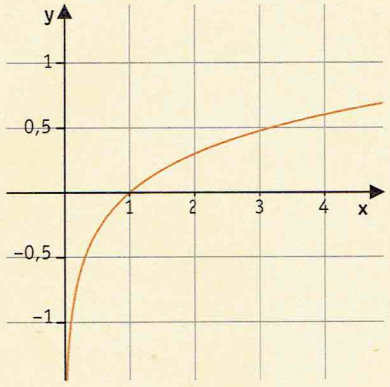
Una tabla de valores ayudará a imaginar el gráfico. Para ello es oportuno utilizar la calculadora científica y aproximar resultados.

Algunos de los valores pueden calcularse sin necesidad de usar la calculadora, por ejemplo:

$\log 1 = 0$ porque $10^0 = 1$	$\log 10 = 1$ porque $10^1 = 10$
$\log 100 = 2$ porque $10^2 = 100$	$\log 0{,}1 = -1$ porque $10^{-1} = 0{,}1$
$\log 0{,}01 = -2$ porque $10^{-2} = 0{,}01$	$\log 1000 = 3$ porque $10^3 = 1000$

Al volcar estos valores, y otros obtenidos con la calculadora, en un gráfico, se obtiene un dibujo como el siguiente:

x	$\log x$
1	0
2	0,3
4	0,6
10	1
30	1,48
50	1,7
100	2
0,01	−2
0,001	−3



En el gráfico, se puede observar que la variable x solo puede adquirir valores positivos, tal como se proponía en la definición, pues toda potencia de 10 es positiva.

Esto se debe a que:

$g(x) = \log x$	$\Leftrightarrow$	$10^{g(x)} = x$

De la última igualdad se deduce que $g(x)$ puede tomar cualquier valor, mientras que x debe ser positiva, ya que ninguna potencia de 10 es negativa o nula. Por lo tanto, se obtiene que:

$$Dom(g) = (0\,;+\infty),\ Im(g) = \mathbb{R}$$

Por otro lado es posible notar que, a medida que el valor de x es más cercano a 0, los valores que toma el logaritmo son negativos y cada vez más grandes en valor absoluto. Si se analiza la siguiente tabla:

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,000001
$\log x$	−1	−2	−3	−4	−6

Se observa que: $\lim_{x \to 0^+} (\log x) = -\infty$

Por lo tanto hay una asíntota vertical en el eje y, es decir, en la recta $x = 0$.

También se verifica que $\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$

Esto ocurre pues:

- $A = \log_a x \Rightarrow a^A = x$
- $B = \log_a y \Rightarrow a^B = y$

} Como $A = B \Rightarrow x = y$

Para determinar el valor del logaritmo en base 10 usando la calculadora se procede de la siguiente manera:

Por ejemplo, para conocer el valor de log 4, en algunas calculadoras hay que oprimir las siguientes teclas: **4** **log** **=**

y se obtiene 0,6020599...

En otro tipo de calculadoras, hay que oprimir:

log **4** **=**

Del mismo modo en que se ha definido la función $g(x) = \log x$ se podrían definir otras funciones modificando el valor de la base, como :

$t(x) = \log_3 x$

$m(x) = \log_5 x$

Es decir, para cada valor de la base, se define una nueva función logarítmica.

Si $g(x) = \log_a x$
$Dom(g) = (0\,;+\infty)$
$Im(g) = \mathbb{R}$

Si $g(x) = \log_a x$, entonces $x = 0$ es asíntota vertical de $g(x)$.

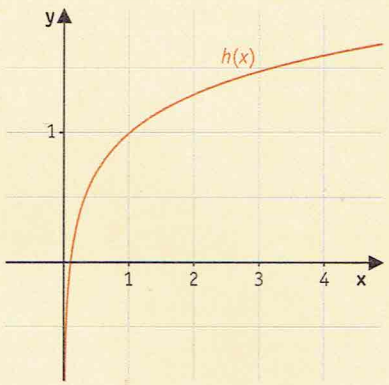
$\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$

Desplazamientos de la gráfica

Problema 3

Graficar la función: $h(x) = \log x + 1$

La función $h(x)$ proviene de sumar 1 a cada imagen de la función $\log x$, graficada en el problema 2. Por lo tanto, es posible suponer que su gráfico tendrá la misma forma, pero desplazado una unidad hacia arriba:



Como la definición de logaritmo es para valores positivos de x, se tiene:

$\text{Dom}(h) = (0 ; +\infty)$

La asíntota vertical permanece en el eje y porque esta función es un desplazamiento hacia arriba de la anterior.

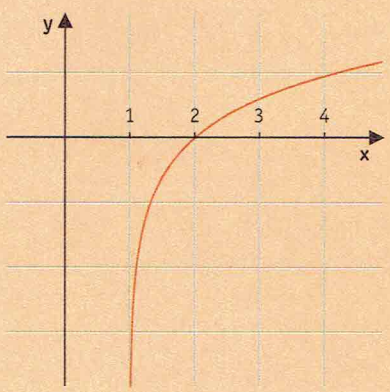
Hay dos propiedades que provienen de la definición de logaritmo:

- $\log_a a = 1$ pues $a^1 = a$
- $\log_a a^x = x$ pues $a^x = a^x$

Problema 4

¿Cómo será la expresión de una función $h(x)$ que sea un desplazamiento de $g(x) = \log x$, tenga el siguiente gráfico y responda a la tabla de valores presentada?

x	$h(x)$
2	0
3	0,3
5	0,6
11	1
101	1
1,1	−1
1,01	−2



Si se analiza con detenimiento la tabla y el gráfico, es posible reconocer que es un desplazamiento de la función $g(x) = \log x$ una unidad hacia la derecha. Por lo tanto, si la asíntota vertical de g se encontraba en $x = 0$, en esta función se corre a $x = 1$.

Por otro lado, $h(11) = g(10)$ así como $h(101) = g(100)$. Por lo tanto es posible determinar que $h(x) = g(x - 1) = \log(x - 1)$

En esta función, como el logaritmo solo puede calcularse para valores positivos, $x - 1$ deberá ser positivo, por lo tanto $\text{Dom}(h) = (1 ; +\infty)$

Se puede resumir en la siguiente tabla las transformaciones de g(x) = log(x), para valores de m y k positivos:

	Dominio	Desplazamiento	Asíntota
$h(x) = \log x + m$	$(0; +\infty)$	m unidades hacia arriba	$x = 0$
$t(x) = \log x - m$	$(0; +\infty)$	m unidades hacia abajo	$x = 0$
$s(x) = \log (x + k)$	$(-k; +\infty)$	k unidades a la izquierda	$x = -k$
$n(x) = \log (x - k)$	$(k; +\infty)$	k unidades a la derecha	$x = k$

Gráficos y propiedades de logaritmos

La siguiente situación propone estudiar el gráfico de otra función logarítmica que permitirá identificar una nueva propiedad.

Problema 5

Graficar la función $t(x) = \log_2 (2x)$ y relacionarla con la función $g(x) = \log_2 x$.

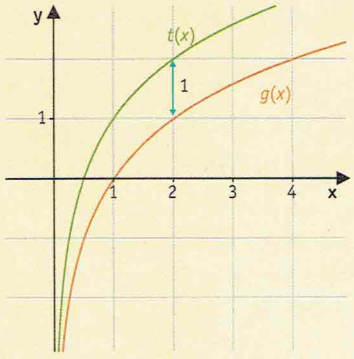
Una tabla puede ayudar a construir el gráfico. Para ello es conveniente elegir algunos valores para x de manera tal que los cálculos resulten más sencillos:

x	$2x$	$\log_2 (2x)$	Porque...
$\frac{1}{2}$	1	0	$2^0 = 1$
2	4	2	$2^2 = 4$
4	8	3	$2^3 = 8$
8	16	4	$2^4 = 16$

Si se grafican en el mismo sistema $t(x) = \log_2(2x)$ y $g(x) = \log_2 x$, se tiene que:

el gráfico de $t(x)$ está desplazado una unidad hacia arriba respecto del de $g(x)$.

$t(x) = \log_2(2x)$
$g(x) = \log_2 x$



Al observar los gráficos podría llegarse a la conclusión de que

$$t(x) = \log_2(2x) = \log_2 x + 1 = s(x)$$

¿Cómo será posible que los gráficos de t(x) y de s(x) sean iguales?
¿Será cierto que $\log_2 (2x) = \log_2 x + 1$*?*

Si $y = \log_2 x$ se verifica que $x = 2^y$, además:

$\log_2 (2x) = \log_2 (2^1 \cdot 2^y)$	Porque $2 = 2^1$ y $x = 2^y$.
$\log_2 (2x) = \log_2 (2^{y+1})$	Por multiplicación de potencias de igual base.
$\log_2 (2x) = y + 1$	Por propiedad de logaritmos $\log_a a^x = x$.
$\log_2 (2x) = \log_2 x + 1$	Porque $y = \log_2 x$.
$\log_2 (2x) = \log_2 x + \log_2 2$	Porque $1 = \log_2 2$.

Se verifica que:

$\log_2 (2x) = \log_2 x + \log_2 2 = \log_2 x + 1$
donde x es un número real positivo.

Es posible pensar entonces que son válidas las siguientes propiedades:

- Si m, n y a son números reales positivos, con $a \neq 1$, entonces

$$\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$$

Esto es cierto dado que:

$$\log_a m = t \iff a^t = m \quad (1)$$
$$\log_a n = y \iff a^y = n \quad (2)$$

Luego:

$\log_a (m \cdot n) = \log_a (a^t \cdot a^y)$	Reemplazando por (1) y (2).
$\log_a (m \cdot n) = \log_a (a^{t+y})$	Por multiplicación de potencias de igual base.
$\log_a (m \cdot n) = t + y$	Por propiedad de logaritmos $\log_a a^x = x$.
$\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$	por (1) y (2).

En consecuencia, $\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$

Se verifican las siguientes propiedades:

- Si $x > 0$, $y > 0 \Rightarrow$
$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- Si $m > 0, n > 0 \Rightarrow$
$\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

- De manera similar se puede probar que:

$$\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$$

Es interesante analizar que las dos últimas igualdades, así como toda igualdad, puede leerse de izquierda a derecha y de derecha a izquierda.

Así, el logaritmo de un producto puede escribirse como suma de logaritmos y también una suma de logaritmos puede escribirse como el logaritmo de un producto, según resulte conveniente y si los números involucrados son positivos.

Estas propiedades son útiles para determinar los valores de algunos logaritmos a partir de otros. Por ejemplo, si se conoce que $\log 2 \approx 0{,}3$

$$\log 50 = \log \left(\frac{100}{2}\right) = \log 100 - \log 2 = 2 - \log 2 \approx 2 - 0{,}3 = 1{,}7$$

$$\log 2000 = \log (2 \cdot 1000) = \log 2 + \log 1000 \approx 0{,}3 + 3 = 3{,}3$$

ACTIVIDADES

1. ¿Es cierto que los gráficos de $f(x) = \log (10x)$ y de $h(x) = \log x + 1$ son iguales? Expliquen por qué.

2. Calculen

a. $\log_6 81 + \log_6 16$
b. $\log 6000 - \log 6$
c. $\log_3 54 - \log_3 162$
d. $\log 550 - \log 55$
e. $\log_5 250 + \log_5 0{,}1$
f. $\log_2 24 - \log_2 6$

Nuevas propiedades de los logaritmos

Problema 6

Graficar las funciones $f(x) = \log_2 x^3$ y $h(x) = 3 \cdot \log_2 x$. Analizar las diferencias y similitudes entre ellas.

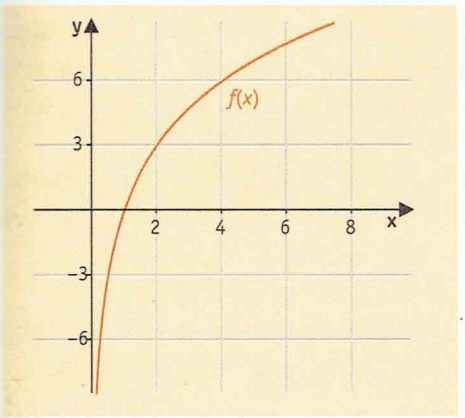
Para la función $f(x)$, como el logaritmo solo puede aplicarse a números positivos, es necesario que x^3 lo sea, por lo tanto x debe ser positivo. Se obtiene que $\text{Dom}(f) = (0 ; +\infty)$.

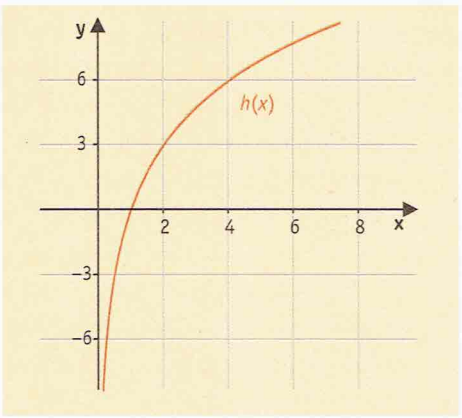
Si se realiza el mismo análisis para la función $h(x)$, también se obtiene que $\text{Dom}(h) = (0 ; +\infty)$.

En una tabla con valores se obtiene:

x	x^3	$\log_2 x$	$f(x) = \log_2 x^3$	$h(x) = 3 \cdot \log_2 x$
1	1	0	0	0
2	8	1	3	3
4	64	2	6	6
8	512	3	9	9
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	−1	−3	−3
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{64}$	−2	−6	−6

Si se realizan los gráficos de ambas funciones, es posible advertir que las funciones son iguales.





¿Cuáles serán los motivos por los cuales los gráficos de $f(x) = \log_2 x^3$ *y de* $h(x) = 3 \cdot \log_2 x$ *son iguales?*

$$\log_2 x^3 = \log_2 (x \cdot x \cdot x) = \log_2 x + \log_2 x + \log_2 x = 3 \cdot \log_2 x$$

↓ por la propiedad del logaritmo del producto

Esta demostración permite afirmar que $\log_2 x^3 = 3 \cdot \log_2 x$ para cualquier valor positivo de x.

A partir de esto, se podría pensar que, si $a > 0$, $a \neq 1$; $m > 0$ y n es un número natural:

$$\log_a m^n = \log_a \underbrace{(m \cdot m \cdot m \ldots m)}_{n \text{ veces}} = \underbrace{\log_a m + \log_a m + \ldots\ldots + \log_a m}_{n \text{ veces}} = n \cdot \log_a m$$

Es decir que $\log_a m^n = n \cdot \log_a m$

¿Qué sucede si n no es un número natural?

Si se toma:

$$\log_a m^n = x \text{ y } \log_a m = t \quad \Rightarrow \quad a^x = m^n \text{ y } a^t = m$$

Luego:

$a^x = m^n$	$\Leftrightarrow$	$a^x = (a^t)^n$	$\Leftrightarrow$	$a^x = a^{n \cdot t}$

La única manera de que dos potencias de la misma base sean iguales es si sus exponentes lo son $\Rightarrow$ $x = n \cdot t$ $\Leftrightarrow$ $\log_a m^n = n \cdot \log_a m$

La demostración anterior indica que la propiedad vale para cualquier exponente n.

Si $a > 0, a \neq 1$ y $m > 0$ es válido que:
$\log_a m^n = n \cdot \log_a m$

Cambio de base

Problema 7

Resolver con calculadora los siguientes logarítmos:

$\log_2 16$ $\log_2 25$ $\log_3 15$

En las calculadoras científicas aparecen dos logaritmos representados con las siguientes teclas: log y ln.

Por el momento solo se usará la tecla log que, como ya se ha comentado, permite calcular el logaritmo en base 10. Más adelante se explicará qué significa la otra tecla.

¿Cómo se podrá hacer para determinar el $\log_2 16$ usando la calculadora?

Para ello se puede pensar de la siguiente manera: calcular $\log_2 16$ significa encontrar un número x, tal que el resultado de 2 elevado a ese número x dé 16. Esto quiere decir:

$$\log_2 16 = x \Leftrightarrow 2^x = 16$$

Fácilmente se verifica que $x = 4$, es decir, $\log_2 16 = 4$. En este caso el uso de la calculadora es innecesario, porque 16 es una potencia entera de 2. Sin embargo esto no sucede con 25.

$\log_2 25 = x$	
$2^x = 25$	Se aplica la definición de logaritmos.
$\log(2^x) = \log 25$	Se toma log en ambos miembros de la igualdad.
$x \cdot \log 2 = \log 25$	Se usa la propiedad de logaritmo de la potencia.
$x = \frac{\log 25}{\log 2} = \frac{1,3979}{0,301} \approx 4,64$	Se opera.

Por lo tanto para calcular el logaritmo en cualquier base de un número puede hacerse el cociente entre el logaritmo en base 10 de ese número dividido el logaritmo en base 10 de la base: $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$.

¿Será siempre cierta esta igualdad aunque no se quiera usar base 10?

Si se quiere calcular $\log_a m$ utilizando $\log_b$:

$$\log_a m = r \iff a^r = m$$
$$\log_b m = t \iff b^t = m$$

Luego se verifica que $a^r = b^t$.

$\log_b a^r = \log_b b^t$	Se toma $\log_b$ en ambos miembros de la igualdad.
$r \cdot \log_b a = t \cdot \log_b b$	Se usa la propiedad de logaritmo de la potencia.
$r \cdot \log_b a = t$	Se usa la propiedad $\log_b b = 1$.
$r = \frac{t}{\log_b a}$	Se despeja r.
$\log_a m = \frac{\log_b m}{\log_b a}$	Se reemplaza r y t.

En definitiva, para calcular $\log_3 15$, se puede hacer $\frac{\log 15}{\log 3} = 2{,}464973521\ldots$. Para verificar el resultado es necesario considerar que 3 elevado a esa potencia da 15 como resultado: $3^{2{,}464973521\ldots} = 15$.

Esta propiedad se conoce con el nombre de *cambio de base*.

Problema 8

¿Es cierto que las funciones $f(x) = \log\left(\frac{x}{x-1}\right) + \log\left(\frac{x+1}{x}\right) - \log(x^2 - 1)$ y $g(x) = -2 \cdot \log(x - 1)$ son iguales?

Dos funciones son iguales si para cada elemento del dominio se obtienen imágenes iguales a través de las dos funciones. La idea es que si $f(x)$ y $g(x)$ son iguales, da lo mismo aplicar una u otra para hallar la imagen de un número porque se obtienen los mismos resultados.

Ahora bien, en este capítulo se desarrollaron propiedades de los logaritmos que permiten obtener expresiones equivalentes a una dada. Si se usan, es posible transformar la fórmula de la función $f(x)$:

$$f(x) = \log\left(\frac{x}{x-1}\right) + \log\left(\frac{x+1}{x}\right) - \log(x^2 - 1) =$$
$$= \log x - \log(x-1) + \log(x+1) - \log x - \log[(x-1)(x+1)] =$$
$$= -\log(x-1) + \log(x+1) - \log(x-1) - \log(x+1) = -2 \cdot \log(x-1)$$

Por lo tanto, $f(x) = -2 \cdot \log(x - 1)$.

Al aplicar las propiedades se estaría indicando que $f(x) = g(x)$. Sin embargo, si se quiere hallar la imagen de -2 a través de ambas funciones, resulta:

$$f(-2) = \log\frac{-2}{-2-1} + \log\frac{-2+1}{-2} - \log\left((-2)^2 - 1\right) = \log\left(\frac{2}{3}\right) + \log\left(\frac{1}{2}\right) - \log 3$$
$$g(-2) = -2\log(-2)$$

Pero $g(-2)$ no se puede calcular debido a que el logaritmo de un número negativo no existe. -2 no pertenece al dominio de la función $g(x)$, aunque sí pertenece al dominio de $f(x)$. Luego, las funciones no pueden ser iguales.

¿Por qué al aplicar las propiedades se obtuvo una información "falsa"?

En realidad, el problema consistía en aplicar las propiedades de los logaritmos sin tener en cuenta en qué condiciones pueden usarse.

Se presentan a continuación todas las propiedades tratadas hasta el momento que verifican los logaritmos:

En todos los casos $a > 0, a \neq 1$, $b > 0, x > 0, y > 0, c > 0$

1. $\log_a b = c \iff a^c = b$
2. $x = y \iff \log_a x = \log_a y$
3. $\log_a a = 1$
4. $\log_a a^t = t$
5. $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$,
6. $\log_a (b : c) = \log_a b - \log_a c$
7. $\log_a b^t = t \cdot \log_a b$
8. Si además $b \neq 1$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Problema 11

Hallar ceros, conjuntos de positividad y negatividad y dominio de las funciones:

$t(x) = \log_2 (2x - 1)$ $\quad h(x) = \log_{\frac{1}{3}} (-4x)$ $\quad f(x) = \log_4 (3x + 1) - 2$

Para determinar el dominio de $t(x)$ es necesario tener en cuenta que el logaritmo se aplica solo a números positivos, por lo tanto:

$$2x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

Se tiene que $\text{Dom}(t) = (\frac{1}{2} ; +\infty)$

Sin hacer un gráfico de la función se puede saber que, como la base del logaritmo es mayor que 1, la función será creciente.

Además, para encontrar el cero es necesario resolver:

$$t(x) = \log_2 (2x - 1) = 0 \Leftrightarrow 2^0 = 2x - 1$$

Por lo tanto, $1 = 2x - 1 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$. Luego $C^0 = \{1\}$.

Para hallar los conjuntos de positividad y negatividad puede realizarse lo siguiente:

$t(x) > 0$	$\Leftrightarrow$	$2x - 1 > 1$	$\Leftrightarrow$	$x > 1$
$t(x) < 0$	$\Leftrightarrow$	$0 < 2x - 1 < 1$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{2} < x < 1$

Luego $C^+ = (1 ; +\infty)$ y $C^- = (\frac{1}{2} ; 1)$.

Con una tabla de valores se podrán determinar otras particularidades del gráfico:

x	0,50001	0,5001	0,501	0,51	1	2	3	4
$t(x)$	−15,61	−12,29	−8,97	−5,64	0	1,585	2,32	2,81

Es decir, a medida que x se acerca a $\frac{1}{2}$, la función tiende a $-\infty$.

En consecuencia:

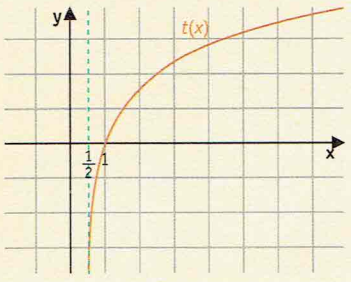
Dom $(t) = (\frac{1}{2} ; +\infty)$

$C^0 = \{1\}$

$C^+ = (1 ; +\infty)$

$C^- = (\frac{1}{2} ; 1)$

$x = \frac{1}{2}$ es asíntota vertical de t.



Para estudiar el comportamiento de la función $h(x) = \log_{\frac{1}{3}} (-4x)$ se puede proceder de manera similar al caso anterior.

Para analizar el dominio es necesario que la expresión a la que se le tomará logaritmo sea positiva, es decir:

$$-4x > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

O sea, esta función está definida únicamente para los números reales menores que 0.

$$\text{Dom}(h) = (-\infty ; 0)$$

La gráfica de $g(x) = \log_a(-x)$ es simétrica de $h(x) = \log_a x$ respecto del eje de ordenadas. Entonces si h crece, g decrece y si h decrece, g crece.
$g(x) = \log_a(-x)$ crece si $0 < a < 1$.
$g(x) = \log_a(-x)$ decrece si $a > 1$.

El *Corolario del Teorema de Bolzano* afirma que si para una función continua, x_1 y x_2 son dos raíces consecutivas (no hay otras raíces entre ellas), entonces la función no cambia de signo entre x_1 y x_2.
$f(x)$ es toda positiva o toda negativa para los valores de x en el intervalo $(x_1 ; x_2)$.

Debido a esto, si se conocen las raíces de $f(x)$, alcanza con saber el signo de un solo elemento en cada intervalo que ellas determinan para saber el signo de la función en todo su dominio.

Para determinar el valor de x donde la función se hace 0 habrá que resolver la siguiente ecuación:

$$\log_{\frac{1}{3}}(-4x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^0 = -4x \Leftrightarrow 1 = -4x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$$

Es decir, $h(x) = 0$ si $x = -\frac{1}{4}$. $C^0 = \{-\frac{1}{4}\}$.

El paso siguiente es determinar dónde es positiva y dónde negativa.

Como ya se ha visto, x solo puede tomar valores negativos, y en $x = -\frac{1}{4}$ la función se hace 0. Entonces, habrá que ver qué ocurre con los valores de x menores que $-\frac{1}{4}$ y con los que se encuentran entre $-\frac{1}{4}$ y 0.

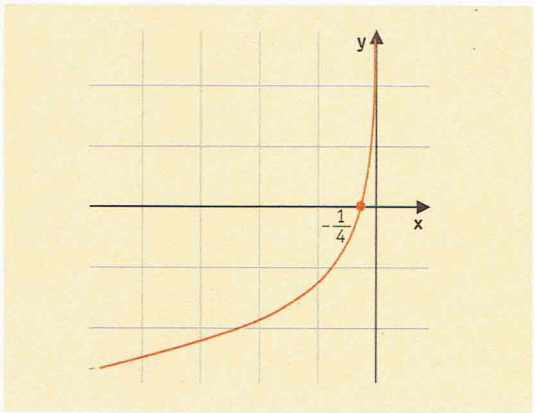
Pero $h(x)$ es una función que se puede dibujar sin levantar el lápiz de la hoja, es decir, es una función continua. Es posible aplicar para ella el corolario del Teorema de Bolzano. Esto permite afirmar que debe ocurrir una de las siguientes posibilidades:
en todos los valores de x menores que $-\frac{1}{4}$ es negativa o bien en todos los valores de x menores que $-\frac{1}{4}$ es positiva.

Por ejemplo, $h(-\frac{9}{4}) = \log_{\frac{1}{4}}(9) \approx -1{,}58$; la función es negativa, y es posible asegurar:

$h(x) < 0$	$h(x) = 0$	$h(x) > 0$
$x < -\frac{1}{4}$	$x = -\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4} < x < 0$

Su gráfico es aproximadamente:

Dom $(h) = (-\infty ; 0)$
$C^0 = \{-\frac{1}{4}\}$
$C^+ = (-\frac{1}{4} ; 0)$
$C^- = (-\infty ; -\frac{1}{4})$
$x = 0$ es asíntota vertical de h.



Es necesario estudiar ahora el comportamiento de la función:

$$f(x) = \log_4(3x + 1) - 2$$

En primer lugar hay que determinar para qué valores de x tiene sentido estudiar esta función, es decir, establecer su dominio. Para ello se deberá verificar que $3x + 1 > 0$,

$$3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$$

Luego,

$$\text{Dom}(f) = (-\frac{1}{3} ; +\infty)$$

Ya se sabe entonces que $x = -\frac{1}{3}$ es asíntota vertical de $f(x)$.

Para saber dónde la función se hace 0 habrá que resolver la siguiente ecuación:

$$\log_4 (3x + 1) - 2 = 0 \iff \log_4 (3x + 1) = 2 \iff 4^2 = 3x + 1$$

por definición de logaritmo

Entonces:

$$16 = 3x + 1 \iff x = 5$$

Es decir, $f(5) = 0$. Con lo cual, $C^0 = \{5\}$.

Una vez más, se trata de determinar los valores de x para los cuales $f(x) > 0$ y aquellos donde $f(x) < 0$ a partir del dato de que en $x = 5$ la función corta al eje de las x.

Si se considera $x = 21$, es decir, un número mayor que 5, es posible establecer que $f(21) = \log_4 (64) - 2 = 1 > 0$, por lo tanto, para todos los valores de $x > 5$, $f(x) > 0$ y en los restantes valores del dominio, $(-\frac{1}{3} ; 5)$, $f(x) < 0$.

Este mismo análisis puede hacerse apoyándose en lo que se sabe de las gráficas de las funciones logarítmicas. Si $f(x) = \log_a (c\,x + b)$ con $c > 0$ y la base es mayor que 1, la función es creciente. Es negativa hasta la raíz y positiva para los valores de x mayores que la raíz.

Esta información permite además saber que la función será creciente, y su gráfico será como el siguiente:

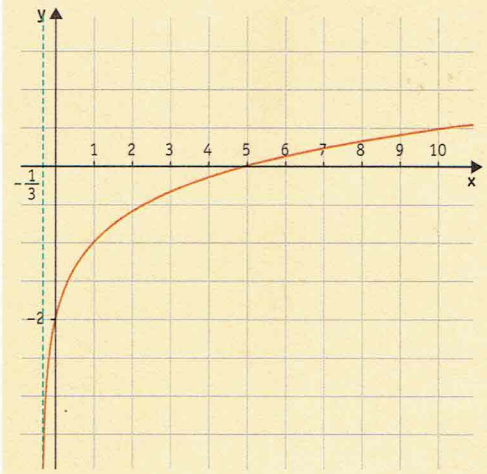
Dom $(f) = (-\frac{1}{3} ; +\infty)$

$C^0 = \{5\}$

$C^- = (-\frac{1}{3} ; 5)$

$C^- = (5 ; +\infty)$

$x = -\frac{1}{3}$ es asíntota vertical de f.



3. Realicen los gráficos de las siguientes funciones:

$f(x) = \log_2 x + 1$ $\quad h(x) = \log_2 (x - 1) + 2$

$g(x) = \log_3 (x + 4)$ $\quad t(x) = \log x - 1$

4. Hallen conjuntos de positividad, negatividad y ceros de las siguientes funciones:

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (-3x)$ $\quad h(x) = \log_3 (2x - 1)$

5. Encuentren un valor para k de manera tal que la función $t(x) = \log (kx)$ verifique la siguiente condición: $t(-\frac{1}{30}) = -1$

6. Tracen el gráfico de la función $m(x) = \log_2 (4x + 1) - 1$.

7. ¿Es cierto que las funciones $h(x) = \log \left|\frac{2x-1}{x+2}\right|^2$ y $j(x) = 2 \log \left|\frac{2x-1}{x+2}\right|$ son iguales?

8. ¿Cuáles son los valores de x para los que las funciones $f(x) = \log (x^2 - 4) - \log(x + 2)$ y $g(x) = \log (x - 2)$ sean iguales?

9. Hallen la fórmula de la función cuya gráfica es simétrica con respecto al eje x de $f(x) = \log_3(-x) + 1$. Grafiquen ambas en un mismo sistema de coordenadas.

10. ¿Cuáles son los valores de x para los cuales se verifica que $\log_2 (x^2 - x - 2) = \log_{\frac{1}{2}} [(x - 2) \cdot (x + 1)]$?

ACTIVIDADES

El logaritmo natural

En el capítulo anterior se ha presentado un número que posee ciertas características particulares y se lo ha designado con la letra *e*.

Es posible entonces considerar la función logarítmica que tenga por base dicho número:

$$f(x) = \log_e x$$

El logaritmo en base *e* se denomina **logaritmo natural** o **logaritmo neperiano** pues fue un matemático escocés de nombre John Neper (1550-1617) a quien se le atribuye haberlo descubierto.

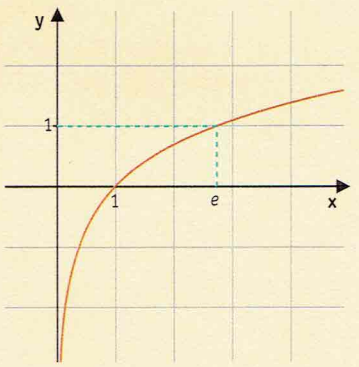
Al logaritmo con base *e* se lo denomina *logaritmo natural* o *logaritmo neperiano* y se lo escribe de la siguiente manera: $f(x) = \ln x$

Como se ha visto, el número *e* es irracional, por lo tanto tiene infinitas cifras decimales no periódicas,

$$e = 2{,}7182818228459045235360 2...$$

El siguiente será su gráfico construido a partir de una tabla de valores aproximados utilizando en la calculadora la tecla [ln] :

x	$\ln x$
1	0
2	0,69
3	1,09
$\frac{1}{2}$	– 0,69
$\frac{1}{5}$	–1,61



La función $f(x) = \ln x$ tiene como dominio el conjunto de todos los números reales mayores que 0 y por imagen, todos los reales. Es decir:

$$Dom\,(f) = (0\,;+\infty)$$
$$Im\,(f) = \mathbb{R}$$

Como puede notarse, $\ln x = 0$ cuando $x = 1$ pues $e^0 = 1$. $C^0 = \{1\}$

Para calcular e^3 con calculadora se debe presionar, según el modelo:

[3] [e^x] [=] o [e^x] [3] [=]

En general, la tecla e^x se encuentra sobre a tecla [ln], por lo tanto para que funcione habrá que apretar previamente (según el modelo) la tecla [INV] o [SHIFT] o [2NDF].

Si se pretende saber para qué valor de x la función vale, por ejemplo, 3, será necesario resolver la siguiente ecuación:

$$f(x) = \ln x = 3$$

Para determinar el valor de x se puede recurrir a la definición de logaritmo. Por lo tanto:

$$\ln x = 3 \iff e^3 = x$$

Un valor aproximado de e^3 se obtiene mediante el uso de la calculadora:

$$x \approx 20{,}09$$

Para estudiar el comportamiento de cualquier función que involucre el logaritmo natural, se puede recurrir a las mismas propiedades que se cumplen para todos los logaritmos.

Problema 12

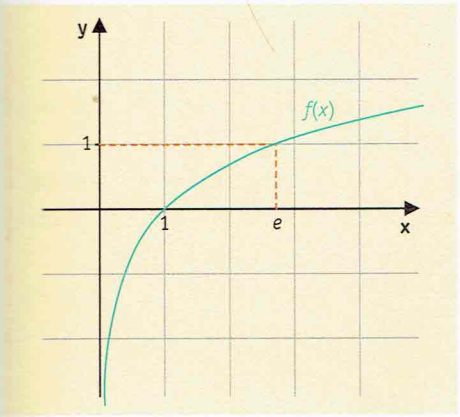
Determinar si los gráficos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ que se presentan a continuación coinciden.

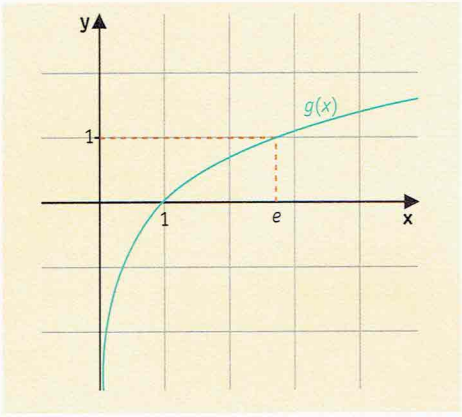
$$f:(0\,;+\infty) \to \mathbb{R}/\, f(x) = \ln x \qquad g:(0\,;+\infty) \to \mathbb{R}/g(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

En el siguiente cuadro se presentan las dos funciones propuestas por medio de una tabla de valores aproximados.

x	1	2	3,5	4	10	100	1000
$f(x)$	0	0,693	1,253	1,386	2,302	4,605	6,908
$g(x)$	0	0,693	1,253	1,386	2,302	4,605	6,908

A partir de los datos de la tabla, es posible sospechar que ambas funciones tendrán el mismo gráfico:





¿Será posible encontrar algunas razones que expliquen la igualdad de los gráficos, más allá de la tabla de valores?

El siguiente razonamiento resuelve la pregunta.

$g(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$	Por la propiedad $\ln a^b = b \cdot \ln a$. En este caso, $b = -1$ y $a = \frac{1}{x}$.
$g(x) = \ln x = f(x)$	Pues, $\left(\frac{1}{x}\right)^{-1} = (x^{-1})^{-1} = x$.

Otra forma de demostrarlo es mediante este razonamiento:

$g(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -(\ln 1 - \ln x)$	Por la propiedad $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
$g(x) = -(0 - \ln x) = \ln x$	Pues $\ln 1 = 0$

Se observa que se han podido aplicar las propiedades de los logaritmos debido a que ambas funciones tienen el mismo dominio.

Relación entre función exponencial y función logarítmica

En el desarrollo del capítulo anterior y este, se han definido dos tipos de funciones, las exponenciales y las logarítmicas.

Si se hace referencia a las funciones exponenciales del tipo $f(x) = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$, su dominio es el conjunto de los números reales y la imagen son los números positivos.

Las funciones logarítmicas del tipo $g(x) = \log_a x$ tienen idénticas restricciones para a pero el dominio está formado por los números positivos y la imagen es el conjunto de los números reales.

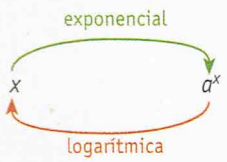
También se definió el logaritmo como:

$$g(x) = \log_a x \Leftrightarrow a^{g(x)} = x.$$

Ambas funciones están definidas a partir de una función exponencial. Solo cambian los datos de los que se parte y el resultado que se desea obtener.

En el caso de la función exponencial, se parte del valor del exponente y se quiere hallar el resultado de la potencia. En la función logarítmica se parte del resultado de la potencia y se quiere hallar el exponente que brinda ese resultado.

Es decir, que estas funciones hacen una el recorrido inverso de la otra:



Esto pareciera indicar que las funciones exponenciales y logarítmicas son inversas entre sí.

Si $(x\,;y)$ pertenece a la gráfica de f, entonces $a^x = y$, por lo tanto $\log_a y = x$, lo cual implica que el punto $(y\,;x)$ pertenece a la gráfica de g.

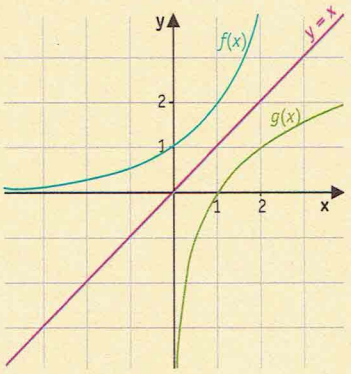
Por lo tanto, la función g "deshace" lo que hace la función f y viceversa. Son, entonces, funciones inversas entre sí.

Para cualquier función f y su función inversa f^{-1} se verifica que si el punto $(a\,;b)$ pertenece a la gráfica de f, entonces el punto $(b\,;a)$ pertenece a la gráfica de f^{-1}.

En el desarrollo anterior no se ha usado ninguna característica particular del número a, todo lo que se dedujo fue independiente de su valor. Por eso se puede afirmar que las funciones exponenciales y logarítmicas siempre son inversas entre sí.

Si se grafican ambas funciones en un mismo sistema de coordenadas suponiendo $a > 1$ se puede ver que son gráficos simétricos respecto de la recta $y = x$.

$f(x) = a^x$
$g(x) = \log_a x$
$y = x$



Los gráficos de una función y su inversa son simétricos respecto de la recta $y = x$, bisectriz del primero y tercer cuadrante.

Problema 13

Graficar la función cuya fórmula es $f(x) = \log (0{,}1\, x^3 + 0{,}2\, x^2 - 0{,}3\, x)$.

No es posible interpretar la función que se quiere graficar como un desplazamiento de la función $g(x) = \log x$, ya que su argumento es una función polinómica de grado 3. Entonces, para poder hacer una gráfica aproximada será necesario estudiar el comportamiento de esta función a partir de las características que se han desarrollado en este capítulo.

Para encontrar los ceros de de $f(x)$ hay que resolver la ecuación:

$$\begin{aligned} \log (0{,}1\, x^3 + 0{,}2\, x^2 - 0{,}3\, x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ 0{,}1\, x^3 + 0{,}2\, x^2 - 0{,}3\, x = 10^0 = 1 \quad &\Leftrightarrow \\ 0{,}1\, x^3 + 0{,}2\, x^2 - 0{,}3\, x - 1 = 0 \end{aligned}$$

La ecuación que resulta no puede resolverse a través de despejes ni a simple vista. Tampoco es posible aplicar el Lema de Gauss porque los coeficientes no son números enteros.

Sin embargo, es posible multiplicar ambos miembros de la ecuación por un número conveniente de manera tal que se obtenga otra ecuación equivalente con coeficientes enteros. En este caso, uno de los números posibles es 10:

$$\begin{aligned} 0{,}1\, x^3 + 0{,}2\, x^2 - 0{,}3\, x - 1 = 0 \\ 10 \cdot (0{,}1\, x^3 + 0{,}2\, x^2 - 0{,}3\, x - 1) = 0 \cdot 10 \\ x^3 + 2\, x^2 - 3\, x - 10 = 0 \end{aligned}$$

El Lema de Gauss afirma que si

$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + cx + d$

y sus coeficientes son números enteros, entonces las *posibles raíces racionales de f(x)* se obtienen a partir de todos los cocientes posibles entre los divisores de d y los divisores de a.

En este caso, las posibles raíces racionales de la ecuación anterior son ± 1; ± 2 ; ± 5 ; ± 10.

Probando con cada una de ellas resulta que la única raíz racional es $x = 2$. Para analizar si existe alguna raíz que no sea racional se puede usar la regla de Ruffini para dividir el polinomio por $(x - 2)$ y así factorear la expresión del miembro izquierdo de la ecuación.

	1	2	−3	−10
2		2	8	10
	1	4	5	0

Luego, $x^3 + 2x^2 - 3x - 10 = (x - 2)(x^2 + 4x + 5)$.

La expresión tendrá otras raíces, además de $x = 2$, si el factor cuadrático las tiene.

Sin embargo, el discriminante es $b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$, lo cual indica que $x = 2$ es la única raíz.

$$C^0 = \{2\}$$

Para calcular el *Dom* (f) se plantea:

$$0{,}1\,x^3 + 0{,}2\,x^2 - 0{,}3\,x > 0$$

$0{,}1\,x\,(x^2 + 2x - 3) > 0$	Se saca factor común 0,1x.
$0{,}1\,x\,(x-1)\,(x+3) > 0$	Se factorea el término cuadrático que tiene raíces $x = 1$ y $x = -3$.

Se trata de hallar, entonces, el conjunto de positividad de la función $h(x) = 0{,}1x \cdot (x - 1)(x + 3)$, cuyas raíces son $x = 0$, $x = 1$ y $x = -3$. Esto puede resolverse aplicando el corolario del teorema de Bolzano:

$x < -3$	$-3 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$h(-4) = -2$	$h(-1) = 0{,}4$	$h(0{,}5) = -0{,}0875$	$h(2) = 1$
$h(x) < 0$ si $x < -3$	$h(x) > 0$ si $-3 < x < 0$	$h(x) < 0$ si $0 < x < 1$	$h(x) > 0$ si $x > 1$

A partir de lo obtenido en la tabla, el dominio de la función es:

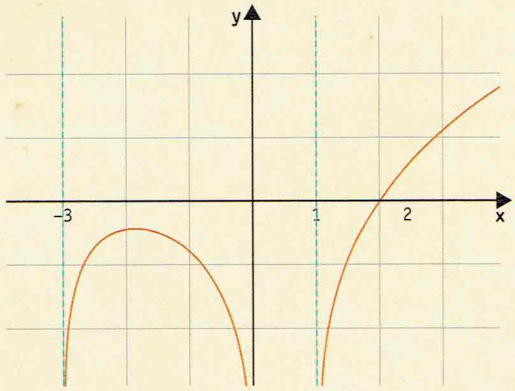
$$\text{Dom}(f) = (-3\,;\,0) \cup (1\,;\,+\infty)$$

Para completar el análisis es necesario analizar qué le sucede a la función en las cercanías de los "bordes" de los intervalos que definen el dominio.

A medida que x se acerca a cada uno de ellos, el argumento del logaritmo tiende a cero, lo que hace que el logaritmo tienda a $-\infty$. Entonces, la función tiene tres asíntotas verticales, $x = -3$, $x = 0$ y $x = 1$.

La gráfica, que puede completarse hallando algunas imágenes, es:

x	$f(x)$
– 2,5	– 0,36
– 2	– 0,22
– 1	–0,4
– 0,5	– 0,73
1,5	– 0,47
2	0
2,5	0,31
3	0,56



ACTIVIDADES

11. Grafiquen las siguientes funciones. Encuentren dominio, asíntotas, conjuntos de positividad y negatividad y ceros.

a. $f(x) = 2\log[(x-2)(x+2)]$

b. $g(x) = \log(2 - 3x^2 - 5x)$

c. $h(x) = \log_3(x^2 - 4x)$

d. $t(x) = \log(3 - 2x) + 1$

e. $m(x) = 2 \cdot 3^{x-1} - 6$

f. $n(x) = -3 \cdot \log_2(2x - 4)$

g. $b(x) = 2 \cdot \log_4(3x - 6)$

h. $l(x) = \log_4[(3x-6)^2]$

i. $s(x) = \log_4(x - 1)$

j. $k(x) = \log_2[(x-1)^2]$

Expresión de una función exponencial conociendo puntos de su gráfico

Problema 14

En un laboratorio se desarrolla un experimento con cierto tipo de bacterias. Cuando se inicia el ensayo se contabilizan 12 000 bacterias. Al cabo de 3 horas, la cantidad asciende a 20 736 bacterias. Si se sabe que el crecimiento responde a una función exponencial, ¿en qué momento habrá 89 161 bacterias?

Para pensar en este problema, una de las primeras cuestiones es considerar, tal como lo propone el enunciado, que el crecimiento de las bacterias no responde a un modelo proporcional o lineal. Es decir, hay que descartar la tentación de sospechar que al doble de tiempo, habrá el doble de bacterias, ya que el crecimiento es de tipo exponencial. Por lo tanto, la función tendrá una expresión como la siguiente:

$$f(t) = k \cdot a^t$$

donde t será el tiempo medido en horas desde que se inicia el experimento y $f(t)$ indicará la cantidad de bacterias.

Para comprender el proceso, es necesario determinar los valores de a y de k de modo tal que se verifiquen las condiciones propuestas en el experimento.

Como al iniciar el ensayo se contabilizaron 12 000 bacterias, es posible establecer que para $t = 0$, es decir, a las 0 horas de comenzado el experimento, había 12 000 bacterias. Esto permite plantear una primera condición: $f(0) = 12\,000$. Por lo tanto:

$$12\,000 = f(0) = k \cdot a^0 = k \Rightarrow k = 12\,000$$

Por otro lado, se debe cumplir una segunda condición: $f(3) = 20\,736$ pues en el enunciado se sostiene que al cabo de 3 horas la cantidad de bacterias es de 20 736. Entonces:

$$20\,736 = f(3) = k \cdot a^3 = 12\,000 \cdot a^3 \Rightarrow 20\,736 = 12\,000 \cdot a^3 \Rightarrow a^3 = 1{,}728 \Rightarrow a = \sqrt[3]{1{,}728} = 1{,}2$$

Por lo tanto, la función que modeliza el problema es:

$$f(t) = 12\,000 \cdot 1{,}2^t$$

donde t es el tiempo, medido en horas, desde que comienza el experimento y $f(t)$ es la cantidad de bacterias a las t horas.

Para saber en que momento había 89 161 bacterias hay que resolver la ecuación

$$12\,000 \cdot 1{,}2^t = 89\,161$$

Si $a = b$ entonces $\log_c a = \log_c b$

La base del logaritmo que se utiliza puede ser cualquiera. En el caso del problema se recurrió a logaritmo en base 10 para usar la calculadora.

$1{,}2^t = 89\,161 : 12\,000 \approx 7{,}43$	Se despeja.
$\log 1{,}2^t = \log 7{,}43$	Se aplica logaritmo en ambos miembros.
$t \cdot \log 1{,}2 = \log 7{,}43$	Por la propiedad del logaritmo de una potencia.
$t = \dfrac{\log 7{,}43}{\log 1{,}2}$	Se despeja.
$t \approx 11$	Se resuelve utilizando una calculadora.

Luego, al cabo de aproximadamente 11 horas habrá 89 161 bacterias.

Problema 15

Encontrar la expresión de una función exponencial, si se sabe que su gráfico contiene, entre otros a los puntos (2 ; 5,12) y (5 ; 167,78).

Como en el enunciado de este problema se expresa que la función que se busca es exponencial, la expresión de dicha función será : $f(x) = k \cdot a^x$ donde k y a son dos números reales, y $a > 0$ y distinto de 1.

Se trata entonces de encontrar qué valores debe asignarse a k y a de manera tal que la función cumpla con lo propuesto en el enunciado del problema.

Para ello, es posible plantear dos igualdades, que deberán cumplirse simultáneamente:

la función contiene al punto (2 ; 5,12)	$f(2) = 5{,}12$	$k \cdot a^2 = 5{,}12$
la función contiene al punto (5 ; 167,78)	$f(5) = 167{,}78$	$k \cdot a^5 = 167{,}78$

Queda planteado el sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} k \cdot a^2 = 5{,}12 \\ k \cdot a^5 = 167{,}78 \end{cases}$$

¿Cómo encontrar a y k para que se cumplan las condiciones planteadas?

Una posibilidad es pensar en dividir las expresiones obtenidas, lo que equivale a plantear

$$a^3 \approx 32{,}77 \Rightarrow a = \sqrt[3]{32{,}77} \approx 3{,}2$$

Para determinar el valor de k será necesario reemplazar el valor encontrado de a en alguna de las dos ecuaciones.

Por ejemplo:

$$k \cdot a^2 = 5{,}12 \iff k = \frac{5{,}12}{a^2} \approx \frac{5{,}12}{10{,}24} = 0{,}5$$

Finalmente, la función que se buscaba es

$$f(x) = 0{,}5 \cdot 3{,}2^x$$

Ecuaciones

Problema 16

En el problema inicial de este capítulo se presentó una fórmula que relaciona la sensación térmica en función de la humedad, si la temperatura es de 28° y la velocidad del viento es de 10 km/h: $ST(h) = 22{,}86.1{,}004^h$ donde h es el porcentaje de humedad (que deberá ser mayor o igual a 60%) y ST es la sensación térmica en grados centígrados.

a. ¿Cuál es la humedad si la sensación térmica es de 30,4°?

b. ¿Cuál es la humedad si la sensación térmica es de 28,5°?

Para responder a la primera pregunta es necesario plantear la ecuación:

$$30{,}4 = 22{,}86 \cdot 1{,}004^h \iff \frac{30{,}4}{22{,}86} = 1{,}004^h \iff 1{,}329833771 = 1{,}004^h$$

Una ecuación se llama exponencial cuando la variable se encuentra en el exponente.

Para hallar el valor de h es necesario resolver una ecuación exponencial donde h es la variable.

No resulta fácil hallar la solución a simple vista. A partir de lo trabajado en el problema 1, se sabe que el valor buscado de h está entre 70 y 80. Será necesario buscar alguna herramienta que permita determinar ese valor con mayor exactitud.

Por la definición de logaritmos:

$$1{,}004^h = 1{,}329833771 \iff \log_{1{,}004} 1{,}329833771 = h$$

El resultado del logaritmo es el valor buscado de h. Como su cálculo no puede hacerse mentalmente, puede aplicarse la fórmula de cambio de base:

$$h = \frac{\log 1{,}329833771}{\log 1{,}004} = 71{,}40591966$$

El resultado obtenido indica que en un día de 28° de temperatura con velocidad del viento de 10 km/h, la sensación térmica es de 30,4° si la humedad es de aproximadamente 71,4%.

Para la segunda pregunta el planteo es el mismo:

$$28{,}5 = 22{,}86 \cdot 1{,}004^h \iff \frac{28{,}5}{22{,}86} = 1{,}004^h \iff 1{,}24671916 = 1{,}004^h \iff$$

$$\log_{1{,}004} 1{,}24671916 = h \iff h = \frac{\log 1{,}24671916}{\log 1{,}004} = 55{,}2390416$$

El resultado determina que la humedad debe ser de 55,24%, pero ese no es un valor posible para h ya que el enunciado indicaba que la fórmula era válida si la humedad era superior a 60%.

Por lo tanto, en este contexto, la sensación térmica no puede ser de 28,5°.

Toda ecuación exponencial de la forma $a \cdot b^x = c$, con $b > 0$, $b \neq 1$ y a y c de igual signo, puede resolverse de la siguiente manera:

$b^x = \frac{c}{a} \iff x = \log_b\left(\frac{c}{a}\right) \iff$

$x = \frac{\log\left(\frac{c}{a}\right)}{\log b}$ si se aplica la fórmula de cambio de base.

12. Hallen el valor de x para el cual se verifica que $5^{-x} = 37$.

13. ¿Qué potencia de 3 es igual a 168?

14. Resuelvan la ecuación $456 \cdot 2{,}015^{3x} = 254$.

15. Dada la función $f(x) = -24 \cdot 4^{2x}$, hallen la preimagen de -1536. ¿Cuál es la preimagen de 1684?

Ecuaciones exponenciales

Problema 17

Hallar los valores de x que verifican la siguiente condición: $\frac{1}{2} \cdot 4^x - 2^{x-1} = 10$.

El primer inconveniente que surge cuando se intenta resolver esta ecuación es que no es posible agrupar 4^x con 2^x. Entonces, será necesario hacer alguna transformación que permita agrupar estas potencias. Como 4 es una potencia de 2, la ecuación se puede transformar de la siguiente manera:

$\frac{1}{2} \cdot 4^x - 2^{x-1} = 10$	Se plantea la ecuación.
$\frac{1}{2} \cdot (2^2)^x - 2^{x-1} = 10$	Se reemplaza 4 por 2^2.
$\frac{1}{2} \cdot 2^{2x} - \frac{2^x}{2^1} = 10$	Se utilizan propiedades de las potencias.
$\frac{1}{2} \cdot (2^x)^2 - \frac{1}{2} \cdot 2^x - 10 = 0$	Se opera.
$\frac{1}{2} \cdot A^2 - \frac{1}{2} \cdot A - 10 = 0$	Se reemplaza 2^x por A.

La expresión a la que se llegó es una ecuación cuadrática de variable A. Aplicando la fórmula para resolverla se obtendrán él o los valores posibles para A, de donde se podrán obtener el o los valores posibles para x.

$$A = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-10)}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \pm \frac{9}{2}$$

Entonces:

$A = 5$	o	$A = -4$
$2^x = 5$	o	$2^x = -4$
$x = \log_2 5 \Leftrightarrow x = \frac{\log 5}{\log 2} = 2{,}321928095$		Ninguna potencia de 2 puede dar negativa.

El resultado obtenido es solo un valor aproximado de la solución. No es posible expresarla de manera exacta a través de un número decimal. Por esto, una manera de dar la solución es diciendo que $x = \log_2 5$. El conjunto solución es entonces $S = \{\log_2 5\}$

Problema 18

Hallar el conjunto solución de la siguiente ecuación: $2^{x+3} + 2^{x+2} + 2^{x-1} = 4$

Una manera de comenzar a pensar la ecuación es buscar alguna relación entre los términos que la componen. En este caso, es posible observar que en cada uno de los términos del miembro de la izquierda aparece un "2^x", aunque también aparecen números sumados o restados. Se puede aplicar propiedades de los exponentes de igual base para poder operar con ellos.

Algunas propiedades de las potencias:

$$(a^b)^c = a^{b.c}$$
$$a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}$$
$$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$$

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ se puede resolver con la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $b^2 - 4ac > 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales.

Si $b^2 - 4ac = 0$ la ecuación tiene una sola solución real.

Si $b^2 - 4ac < 0$ la ecuación no tiene soluciones reales.

Al aplicar la fórmula para resolver la ecuación cuadrática no se hallan los valores de x, sino los de 2^x, que es la variable de la ecuación.

$2^{x+3} + 2^{x+2} + 2^{x-1} = 4$	Se plantea la ecuación.
$2^x \cdot 2^3 + 2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^{-1} = 4$	Se usan las propiedades de la potencia.
$8 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x + \frac{1}{2} \cdot 2^x = 4$	Se resuelven las potencias de 2 posibles.
$\frac{25}{2} \cdot 2^x = 4$	Se saca factor común 2^x y se opera.
$2^x = \frac{8}{25}$	Se despeja y opera.

Como $\frac{8}{25}$ no es una potencia exacta de 2, solo es posible hallar el valor de x aplicando logaritmos:

$$x = \log_2\left(\frac{8}{25}\right) = \log_2 8 - \log_2 25 = 3 - \log_2 25$$

Todos los resultados anteriores corresponden a escrituras del mismo número. Todos son correctos. Incluso, tal vez interese hallar un resultado aproximado del valor de x, aplicando la fórmula del cambio de base. En dicho caso se tendría una aproximación del valor de $x \approx -1{,}6486$

Entonces, el conjunto solución es: $S = \{\log_2\left(\frac{8}{25}\right)\} = \{3 - \log_2 25\}$

Problema 19

Encontrar los valores de x que verifican la siguiente igualdad: $9^{(x^2-5)} = 3^{(4x+6)}$

En este caso, las bases de los exponentes no son las mismas, aunque se puede observar que 9 es una potencia de 3. Usando esto, la ecuación puede reescribirse como:

$$(3^2)^{(x^2-5)} = 3^{(4x+6)} \iff 3^{2x^2-10} = 3^{(4x+6)}$$

Como las funciones exponenciales son inyectivas, la única manera de obtener el mismo resultado en ambos miembros de la última expresión es si los exponentes son iguales. Luego,

$$2x^2 - 10 = 4x + 6 \iff 2x^2 - 4x - 16 = 0$$

Aplicando la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas se obtiene que

$$x = 4 \text{ o } x = -2$$

Para verificar si los valores obtenidos son realmente soluciones de la ecuación pueden reemplazarse y verificar si la ecuación se transforma en una expresión verdadera:

Si $x = 4$	$9^{16-5} = 3^{4.4+6}$	$9^{11} = 3^{22}$	es verdadera	$x = 4$ es solución.
Si $x = -2$	$9^{4-5} = 3^{4\cdot(-2)+6}$	$9^{-1} = 3^{-2}$	es verdadera	$x = -2$ es solución.

El conjunto solución es $S = \{-2\ ;\ 4\}$

Si una función $f(x)$ es inyectiva entonces

$f(x) = f(y) \iff x = y$

Ecuaciones logarítmicas

Si bien en las ecuaciones que se han resuelto hasta ahora han intervenido logaritmos, su característica era que la variable estaba en un exponente. Las ecuaciones que se desarrollarán en este apartado tienen al menos alguna de las variables afectadas por un logaritmo.

A través de algunos problemas se desarrollarán técnicas que permitan resolverlas.

Problema 20

Hallar los valores de x que verifican que $\log(x^2 - 15x) = 3$.

Esta ecuación se refiere a un logaritmo en base 10. De la ecuación puede obtenerse, aplicando la definición de logaritmo, que el exponente al que hay que elevar a 10 para obtener $x^2 - 15x$ es 3. Luego:

$$10^3 = x^2 - 15x \Leftrightarrow x^2 - 15x - 1000 = 0$$

Aplicando la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas se obtiene que

$$x = 40 \quad \text{o} \quad x = -25.$$

Como los valores obtenidos forman parte del argumento de un logaritmo es necesario verificar que estén en el dominio de definición de la expresión. Si no estuvieran, no serían solución de la ecuación.

Si $x = 40$	$\log(40^2 - 15 \cdot 40) = \log 1000 = 3$	$x = 40$ es solución.
Si $x = -25$	$\log((-25)^2 - 15 \cdot (-25)) = \log 1000 = 3$	$x = -25$ es solución.

El conjunto solución es $S = \{40 ; -25\}$.

Problema 21

Hallar el conjunto solución de la ecuación $2^{\log x} = 16$.

En principio, surgen dos maneras diferentes de resolver la ecuación.

Una forma consiste en darse cuenta de que 16 es una potencia de 2, entonces,

$$2^{\log x} = 2^4$$

Como ya se ha señalado, solo es posible que dos potencias de 2 sean iguales cuando los exponentes lo son. Por lo tanto:

$$2^{\log x} = 16 \Leftrightarrow 2^{\log x} = 2^4 \Leftrightarrow \log x = 4 \Leftrightarrow x = 10^4 \Leftrightarrow x = 10\,000$$

Si dos valores son iguales, también lo son sus logaritmos. Es decir, si $a = b$ entonces $\log a = \log b$, siempre que $a > 0$ y $b > 0$.

Otra manera de encarar la resolución es de una manera similar a cómo se resolvieron las ecuaciones exponenciales.

$2^{\log x} = 16$	Se plantea la ecuación.
$\log(2^{\log x}) = \log(2^4)$	Se aplica logaritmo en ambos miembros.
$\log x \cdot \log 2 = 4 \cdot \log 2$	Se aplica la propiedad del logaritmo de la potencia.
$\log x = \frac{4 \cdot \log 2}{\log 2} = 4$	Se despeja $\log x$.
$x = 10^4 = 10\,000$	Se usa la definición de logaritmo.

El conjunto solución es $S = \{10\,000\}$

Problema 22

¿Existe algún punto de intersección entre las gráficas de las funciones $g(x) = \log(2x + 2)$ y $f(x) = \log(2x + 8) - \log x$?

El punto de intersección de dos funciones es aquel que pertenece a ambas gráficas. Por lo tanto, para ese valor de x se obtiene la misma imagen a través de las dos funciones.

Para determinar si las funciones se intersecan es necesario buscar si existe un mismo valor de x para el cual las imágenes por ambas funciones sean iguales. Por lo tanto, se busca algún x para el cual $f(x) = g(x)$, es decir:

$\log(2x + 8) - \log x = \log(2x + 2)$	Se reemplaza f y g por sus fórmulas.
$\log\left(\frac{2x + 8}{x}\right) = \log(2x + 2)$	Por propiedad de la resta de los logaritmos.
$\frac{2x + 8}{x} = 2x + 2$	Si dos logaritmos son iguales los argumentos deben serlo.
$2x + 8 = (2x + 2) \cdot x$	Se opera.
$2x + 8 = 2x^2 + 2x$	Se aplica la propiedad distributiva.
$8 = 2x^2$	Se despeja.
$4 = x^2 \Leftrightarrow x = 2$ o $x = -2$	Se resuelve la ecuación cuadrática.

Si $\log a = \log b$, entonces $a = b$.

Para que los valores obtenidos sean efectivamente las abscisas de los puntos de intersección de ambas funciones deben estar en el dominio de ambas. Una manera de verificarlo es viendo si tienen imagen a través de cada una de las funciones.

$$f(2) = \log(2 \cdot 2 + 8) - \log 2 = \log 12 - \log 2 = \log \frac{12}{2} = \log 6$$
$$g(2) = \log(2 \cdot 2 + 2) = \log 6$$

A partir de esto es posible afirmar que un punto de intersección entre estas funciones es $(2 ; \log 6)$.

Para completar el análisis es necesario realizar los mismos cálculos con la otra solución obtenida.

$$f(-2) = \log(2 \cdot (-2) + 8) - \log(-2)$$

Como $\log(-2)$ no existe, -2 no pertenece al dominio de la función $f(x)$, con lo cual no puede ser un punto de intersección entre estas funciones.

Entonces, el único punto de intersección es $(2 ; \log 6)$.

¿Siempre es necesario verificar si los valores obtenidos son realmente soluciones de los problemas planteados?

Hay algunas funciones cuyos dominios no son todo el conjunto de números reales, sino una parte del mismo. En esos casos, es frecuente que al plantear alguna ecuación que las involucren no se tenga en cuenta la restricción del dominio. Por eso, una vez resuelta la ecuación, es necesario verificar si realmente los valores obtenidos son soluciones.

Sin embargo, podría comenzarse por buscar el dominio y luego solo verificar si los valores obtenidos pertenecen o no a él.

ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN

16. Grafiquen las siguientes funciones. Indiquen las ecuaciones de sus asíntotas y sus ceros.

a. $f(x) = 3^{-x} - 2$

b. $g(x) = -3 \cdot 2^{x+1} + 1$

c. $h(x) = 4 \cdot 5^{x-2} - 3$

d. $k(x) = -3^{1-x} + 2$

e. $f(x) = 2\log_3(-x+1) - 4$

f. $g(x) = 3\log_{\frac{1}{4}}(x-2) + 1$

17. Expliquen si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a. $-7 = 4 - 5\log_3 3^x \Rightarrow -7 = 4 - 5x$

b. $-7 = 4 - 5\log_3 2^x \Rightarrow -7 = 4 - 5x$

c. $-7 = 4 - 5\log_3 2^x \Rightarrow -7 = 4 - 5x \cdot \log_3 2$

d. $3 = \log_2(5 \cdot 2x) \Rightarrow 3 = x\log_2(5 \cdot 2)$

e. $3 = \log_2(5 \cdot 2^x) \Rightarrow 3 = \log_2 5 + \log_2 2^x$

f. $2 = \log_7\left(\frac{5}{x}\right) \Rightarrow 2 = \frac{\log_7 5}{\log_7 x}$

g. $2 = 4\log_7\left(\frac{5}{x}\right) \Rightarrow 2 = 4 \cdot (\log_7 5 - \log_7 x)$

18. Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. $2\log 3 + \log\left(\frac{1}{3}\right) + \log 27 = \log 81$

b. Si a y b son números positivos, entonces $\log\left(\frac{a^4}{b}\right) = 2\log a - 3\log b + 2\log(ab)$

c. Si a y b son números positivos, entonces $\log a - \frac{1}{2}\log b = \log\sqrt{\frac{a^2}{b}}$.

19. Expresen como un solo logaritmo.

a. $\log 5 + 2\log 20 - \frac{3}{2}\log 100$

b. $\log\left(\frac{7}{2}\right) - \log 28 + \log 8$

20. Calculen, aproximadamente, los siguientes logaritmos usando la calculadora.

a. $\log_{0,75} 4$ **b.** $\log_{0,5} 0{,}35$

c. $\log_{0,49} 0{,}343$ **d.** $\log_2 5$

21. Sin utilizar calculadora, hallen el resultado de cada uno de los siguientes logaritmos:

a. $\log_3\left(\frac{\sqrt[3]{9} \cdot \frac{1}{81}}{\frac{1}{\sqrt[5]{729}}}\right)$ **b.** $\log_8\left(\frac{4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{16}{\sqrt[5]{64}}}\right)$

22. Encuentren los valores de x que verifican las siguientes condiciones:

a. $191 = \frac{3^x}{9{,}72} - 416$ **b.** $3^{(x+1)} = 26 \cdot 2^{-x}$

c. $3 \cdot 2^{\frac{(x-2)}{7}} - 35 = 1501$ **d.** $21 \cdot 2^{(x+1)} \cdot 3^{(1-x)} = 56$

23. Encuentren el conjunto solución de cada ecuación.

a. $\log_5 x + \log_5(x+2) = \log_5(x+6)$

b. $\log(x+6) + 1 = 2\log(3x-2)$

c. $\frac{1}{2}\log(x+3) + \log 2 = 1$

d. $4e^{-7x} = 15$

e. $1 + 2e^x = 9$

f. $\frac{10^x - 4}{10^{2x}} = 1$

g. $(\ln x)^2 = \ln x^2$

h. $2^{3x} + 4 \cdot 2^{-3x} = 5$

i. $e^{2x} \cdot e^{3x} - 3 = 2$

j. $\ln(x^2 - 1) - \ln(x-1) = \ln(4)$

k. $\ln(x+1) - \ln(x) = 2$

l. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

m. $e^{2x} = e^{6-x}$

n. $\log_3(x^2) - \log_3(3x+2) = 0$

o. $\log_3(5x+7) = 2$

p. $e^{2x} - 4e^x - 21 = 0$

q. $4(10^x) - 7 = 95$

r. $e^{5x-1} = 20$

24. Hallen los valores de x que satisfacen las siguientes ecuaciones:

a. $5^{3x} - 5^{2x-2} - 5^{x+2} + 1 = 0$

b. $64^x - 12 = 512 \cdot 16^{x-2} - 16 \cdot 4^{x-2}$

c. $27^x + 13 \cdot 3^{x+1} = 13 \cdot 9^x + 27$

d. $27^x - 3 \cdot 9^x = -4$

25. Si se hace un depósito de $\$C$ con un interés continuo de i % durante t años, la cantidad de dinero que habrá en la cuenta luego de ese lapso, si no se realizan extracciones, es $g(t) = C \cdot e^{it}$.

¿A qué interés habrá que depositar $2000 para que al cabo de 4 años haya $3500 en la cuenta?

26. Si se depositan $C a un interés compuesto mensualmente con una tasa del i % anual, la cantidad de dinero que se tendrá luego de t meses es $f(t) = C \cdot \left(1 + \frac{i}{100 \cdot 12}\right)^{12t}$.

Si la cantidad de dinero inicial en una cuenta era de $200, ¿cuánto tiempo deberá pasar para que con un interés del 12% anual se consigan $500, asumiendo que no se realizan extracciones?

27. Un censo determinó que la ciudad **A** tenía una población de 30 000 000 y la ciudad **B** de 17 000 000. Sin embargo, la población de **A** crecía a razón de 1,3% anual, mientras que la población de **B** lo hacía a 2% anual.

La función que modeliza el crecimiento de la población es $P(t) = P_0 \cdot e^{\frac{r}{100} \cdot t}$, donde P_0 es la población inicial, r es el porcentaje de crecimiento anual y t el tiempo transcurrido.

¿Habrá algún momento en que las poblaciones de las ciudades **A** y **B** sean iguales?

AUTOEVALUACIÓN

Seleccionen las respuestas correctas.

1. Las soluciones de la ecuación $\ln(x) = 2$ son:

- **a** $x = 2$
- **b** $x = 2^e$
- **c** $x = 1$ y $x = 0$
- **d** no tiene solución.
- **e** $x = e^2$

2. El conjunto solución de la ecuación $e^x = 6$ es:

- **a** $\{6\}$
- **b** $\{\frac{6}{e}\}$
- **c** $\{\ln(6)\}$
- **d** $\{e^6\}$
- **e** $\emptyset$

3. Las soluciones de la ecuación $\log(x) + \log(2) = 3$ son:

- **a** no tiene solución
- **b** $x = 500$
- **c** $x = \frac{1000}{\log 2}$
- **d** $x = \frac{3^{10}}{2}$
- **e** $x = \frac{3}{\log 2}$

4. Los valores de x que satisfacen la ecuación $10^{3x} = -1$ son:

- **a** no hay ningún valor que la satisfaga .
- **b** $x = \frac{\log(-1)}{3}$
- **c** $x = \frac{-1}{\log 3}$
- **d** $x = 0$
- **e** $x = 0{,}1$ y $x = 3$

5. El conjunto solución de la ecuación $\ln(x+1) + \ln(x) = \ln(2)$ es:

- **a** $S = \{1 ; -2\}$
- **b** $S = \{0 ; \ln(-2)\}$
- **c** $S = \{e ; e^2\}$
- **d** $S = \{-2\}$
- **e** $S = \{1\}$

6. La función exponencial que pasa por los puntos (2 ; 25,35) y (–1 ; 0,092) es:

- **a** $f(x) = 0{,}6 \cdot 6^x$
- **b** $f(x) = 0{,}6 \cdot 6{,}5^x$
- **c** $f(x) = 6{,}5 \cdot 0{,}6^x$
- **d** $f(x) = 3{,}9^x$

7. El dominio de la función $f(x) = \log(x^3 - 3x^2 - x + 3)$ es:

- **a** $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1 ; 1 ; 3\}$
- **b** $\text{Dom}(f) = (-\infty ; -1) \cup (3 ; +\infty)$
- **c** $\text{Dom}(f) = (-1 ; 1) \cup (3 ; +\infty)$
- **d** $\text{Dom}(f) = (-\infty ; -1) \cup (1 ; 3)$

8. Las asíntotas de la función $f(x) = \log(x^3 - 3x^2 - x + 3)$ son:

- **a** $x = -1 ; x = 1 ; x = 3$
- **b** $x = 1 ; x = 3 ; y = 0$
- **c** $x = 1 ; x = -1$
- **d** $x = 1 ; x = 3 ; x = 0$

9. La igualdad $\log(1 - x) + \log(1 + x) = \log(1 - x^2)$ se verifica para los valores de x que se encuentran en los siguientes intervalos:

- **a** $(-\infty ; -1) \cup (1 ; +\infty)$
- **b** $(-1 ; 1)$
- **c** $(-\infty ; 1)$
- **d** nunca se verifica.

CONTENIDOS

- Sistemas de medición de ángulos
- Las relaciones trigonométricas
- Las funciones seno y coseno
- La función tangente
- Ecuaciones e identidades trigonométricas

Existen muchos fenómenos naturales o bien procesos que se repiten con una cierta frecuencia, más o menos cíclica, como los latidos del corazón, el día y la noche, la respiración, las ondas electromagnéticas, las microondas, los rayos X, las transmisiones de radio y televisión, el sonido. Para modelizar estas situaciones se utilizan funciones conocidas con el nombre de funciones trigonométricas.

3 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

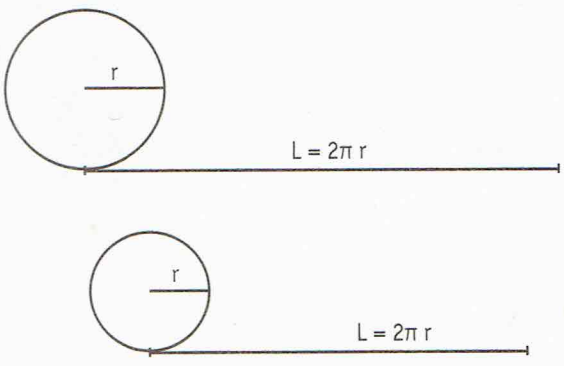
Problema 1

Trazar varias circunferencias. Bordear con un hilo las circunferencias trazadas y medir el perímetro de cada una.

a. ¿Cuántas veces entra el radio de cada circunferencia en su perímetro?

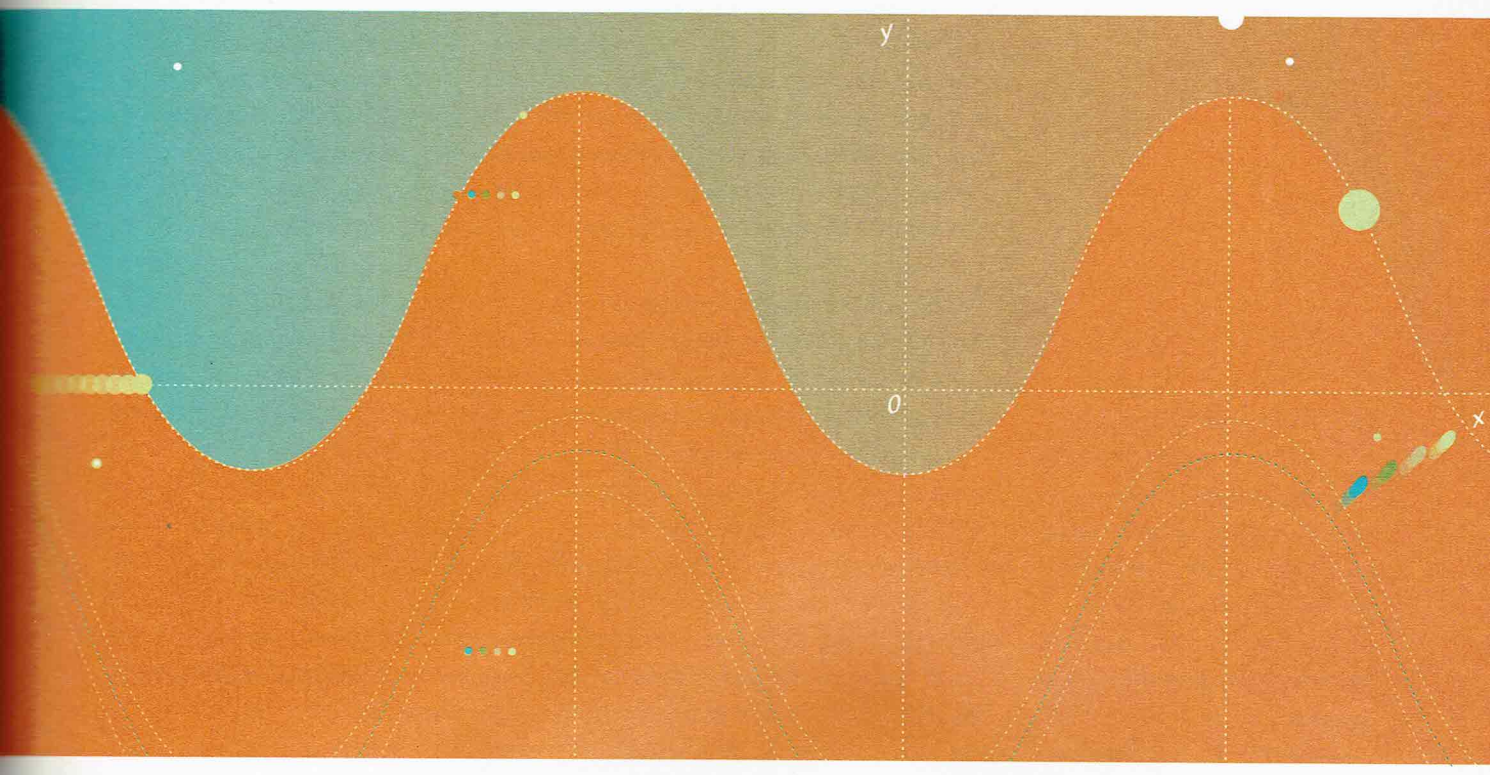
b. ¿Cuántas veces entra el radio de la circunferencia en media circunferencia?

Si se realiza la experiencia varias veces



se puede observar que sin importar el tamaño de la circunferencia, el diámetro, 2r, entra 3 veces y un poquito más en su perímetro.

¿Será posible entonces dividir el perímetro de una circunferencia por su diámetro y obtener el número que exprese esa división?



De la experiencia anterior se puede deducir que la división entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia es 3 coma "algo" porque el diámetro entra 3 veces enteras y un poco más en el perímetro.

Este cálculo fue una preocupación desde la antigüedad. Los matemáticos sabían que existía una relación entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro, aunque no podían establecerla con claridad.

Cuando intentaron encontrar la relación y escribirla como una fracción pudieron probar que no existe un número racional que la determine por lo que ésta relación es un número irracional al que llamaron π (pi).

A partir de la relación anterior también es posible afirmar que el cociente entre el perímetro y el radio, que es la mitad del diámetro, es el doble de π, o sea:

$$\frac{\textit{Perímetro de la circunferencia}}{\textit{Radio de la circunferencia}} = 2\pi$$

Es decir el radio entra 2π veces en el perímetro de la circunferencia.

Si se toma la mitad de la circunferencia se está tomando la mitad de su perímetro, por lo tanto el radio entrará la mitad de veces que entra en el perímetro completo. Entonces el radio entra π veces en el perímetro de media circunferencia, o sea:

$$\frac{\textit{Perímetro de media cicunferencia}}{\textit{Radio de la circunferencia}} = \pi$$

El número π es la relación que existe entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia, simbólicamente:

$$\pi = \frac{\textit{Perímetro de la circunferencia}}{\textit{Diámetro de la circunferencia}}$$

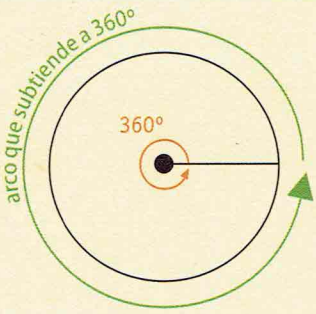
Esta relación se mantiene constante para cualquier circunferencia.

Problema 2

a. ¿Cuántas veces entra el radio de la circunferencia en el arco generado por el ángulo de 360°, el de 180°, el de 90° y el de 270°?

b. Encontrar la relación existente entre cualquier ángulo central y el arco generado por ese ángulo.

Como 360° es un giro completo, el arco generado por él, es decir, el arco que subtiende a él, es igual a toda la circunferencia. Dado que el radio de la circunferencia entra 2π veces en el perímetro, entonces entra 2π veces en el arco generado por un ángulo de 360°.



El ángulo de 180° es media vuelta; el arco generado por él es igual a media circunferencia. Por lo tanto el radio de la circunferencia entra π veces en él.

El ángulo de 90° equivale a un cuarto de de circunferencia. El radio entra $\frac{\pi}{2}$ veces en el arco generado por él.

Como 270° corresponde a tres cuartos de circunferencia, si en cada cuarto el radio entra $\frac{\pi}{2}$ veces, entonces en tres cuartos entra 3. $\frac{\pi}{2}$ veces, es decir $\frac{3}{2}\pi$.

Se puede decir entonces que:

$$\frac{\textit{Longitud del arco que subtiende a un ángulo de 270°}}{\textit{Radio de la circunferencia}} = \frac{3}{2}\pi$$

La relación entre la cantidad de veces que entra el radio de una circunferencia en el arco que subtiende un ángulo de 270° es siempre $\frac{3}{2}\pi$, entonces es posible relacionar al ángulo de 270° con el valor $\frac{3}{2}\pi$ que es un valor constante para ese ángulo central en cualquier circunferencia.

Si se considera, por ejemplo, un ángulo central de 30°; éste entra 12 veces en el ángulo central de 360° pues $30° \cdot 12 = 360°$. Entonces, el arco que subtiende al ángulo de 360° equivale a 12 veces el ángulo que subtiende al arco de 30°. Por lo tanto:

$$2\pi = \frac{\text{Arco de ángulo central de } 360°}{\text{Radio de la circunferencia}} = \frac{12 \cdot \text{Arco de ángulo central de } 30°}{\text{Radio de la circunferencia}}$$

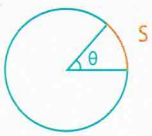
Luego:

$$\frac{\text{Arco de ángulo central de } 30°}{\text{Radio de la circunferencia}} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

Y nuevamente no importa cuál es la circunferencia que se toma, siempre es posible relacionar al ángulo de 30° con el valor $\frac{\pi}{6}$.

De forma análoga puede calcularse la relación entre un ángulo central cualquiera y el arco que subtiende.

Si en una circunferencia se toma un ángulo con vértice en el centro de la circunferencia, ese ángulo se llama **ángulo central** y la longitud de la circunferencia que queda determinada por los lados del ángulo se llama **arco de la circunferencia que subtiende ese ángulo.**



En este caso, S es el arco que subtiende al ángulo central θ.

Si x es un ángulo central cualquiera, la relación que existe entre el arco que subtiende a x y el radio de la circunferencia es:

$$\frac{\text{Arco de ángulo central } x}{\text{Radio de la circunferencia}} = \frac{x}{180} \cdot \pi$$

Sistemas de medición de ángulos

Las unidades con las que hasta ahora se midieron los ángulos son los grados, minutos y segundos. Este sistema de medición se llama **sistema sexagesimal**. Se basa en dividir al ángulo de un giro en 360 partes iguales y cada una de esas partes es la unidad que corresponde a 1°.

Por lo tanto, el ángulo que sirve como la unidad es $\frac{1}{360}$ parte de un giro y ese es el ángulo que mide 1°.

También es posible elegir como medida de un ángulo la longitud del arco que lo subtiende; pero, la longitud de un arco que subtiende un ángulo varía con la circunferencia pues si la circunferencia tiene mayor radio, el arco es mayor.

Es necesario buscar una forma de medir los ángulos que no dependa de la circunferencia que se tome.

Para ello se puede relacionar cada ángulo con una cantidad que es el resultado de hacer el cociente entre el arco de circunferencia que subtiende y el radio de la circunferencia, dado que **esa cantidad no cambia según la circunferencia sino que se mantiene constante para cada ángulo**.

Por lo tanto, bastará con relacionar cada ángulo con el arco de circunferencia que subtiende el ángulo dividido el radio *r*.

Es decir, se puede medir un ángulo con la medida de la longitud del arco de circunferencia que subtiende al ángulo tomando como unidad de medida el radio de la circunferencia.

Este sistema de medición de ángulos a través del arco que subtienden en la circunferencia, se conoce con el nombre de **sistema circular** y su unidad de medida es el **radian**.

Esta medición, como se vio anteriormente, es independiente del valor del radio de la circunferencia.

De este modo, un ángulo de 360° equivale a 2π radianes.

La relación entre los grados de un ángulo y los radianes que miden el arco de circunferencia que recorre es una relación de *proporcionalidad directa*, por lo tanto, si 360° *equivale* a 2π radianes y un ángulo de A° *equivale* a B radianes, se tiene que:

$$\frac{360°}{A°} = \frac{2\pi\ rad}{B\ rad}$$

El sistema que mide ángulos a través del arco que subtiende en la circunferencia se conoce con el nombre de **sistema circular** y su unidad de medida es el radian.
La ventaja de usar este sistema de medida es que permite trabajar con números reales, su operatoria y sus propiedades, haciendo más sencillos los cálculos.

De este mo

Ángulo medido en grados	360°	180°	90°	270°	30°
Ángulo medido en radianes	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{\pi}{6}$

1. ¿Cuál es la relación entre el arco que subtiende el ángulo de 60° y el radio de la circunferencia? ¿Y el de 45°?

2. ¿A cuántos radianes equivalen los ángulos de 240°, 12° y 36°?

3. ¿A cuántos grados equivale 1 radián?

4. Calculen a cuántos radianes equivalen los siguientes ángulos medidos en grados:

a. 125° **b.** 278° **c.** 15° **d.** 0° **e.** 485° **f.** 375°

5. Calculen a cuántos grados equivalen los siguientes ángulos medidos en radianes:

a. $\frac{5}{2}\pi$ **b.** 3π **c.** $\frac{5}{4}\pi$ **d.** $\frac{13}{6}\pi$ **e.** 54 **f.** 3,7

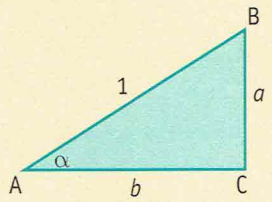
ACTIVIDADES

Las relaciones trigonométricas

Problema 3

¿Cómo se calculan el seno y el coseno de ángulos mayores que 90°?

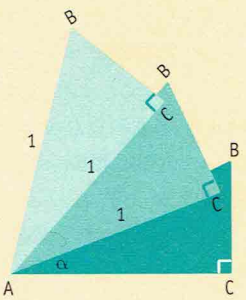
Para calcular las razones trigonométricas de ángulos menores que 90°, es posible construir un triángulo rectángulo donde la hipotenusa mida 1. En ese caso:



$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = a$$

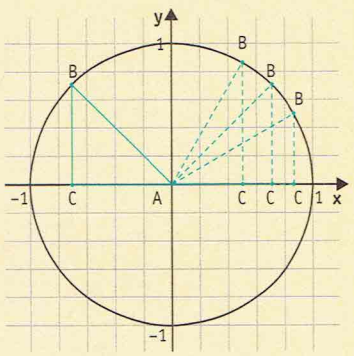
$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = b$$

Si se hace girar el lado AB con centro en el punto A es posible construir todos los triángulos rectángulos con hipotenusa igual a 1 para valores de α entre 0° y 90° siempre midiendo el ángulo α desde AC.



Si se continúa rotando el lado AB se comienzan a obtener ángulos mayores a 90°. El lado AB determina, de este modo, una circunferencia con centro en A y radio 1. Todos los puntos de la circunferencia quedan determinados al girar el punto B. Esa circunferencia se puede representar utilizando los ejes coordenados.

Tomando el punto A como la intersección de los ejes, es decir el punto (0 ; 0), se tiene una circunferencia de radio 1 con centro (0 ; 0) que pasa por los puntos (1 ; 0); (0 ; 1); (−1 ; 0) y (0; −1). El punto B determina cada punto la circunferencia.
En el primer cuadrante de esta circunferencia quedan marcados todos los triángulos rectángulos con hipotenusa igual a 1 donde B = (*b* ; *a*) con *a* y *b* números reales positivos.



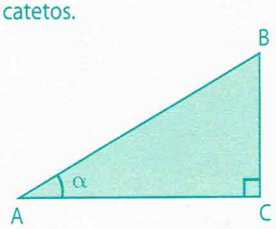
De este modo, para un valor de α (ángulo comprendido entre $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$) existe un único triángulo rectángulo con hipotenusa igual a 1 que está representado en el primer cuadrante de esta circunferencia. Ese triángulo rectángulo determina con su vértice B un único punto del plano sobre la circunferencia con coordenadas (*b* ; *a*). Además se verifica que: sen $\alpha = a$ y cos $\alpha = b$.

Dado el triángulo rectángulo ABC, si se llama α a uno de sus ángulos agudos, resultan las siguientes razones trigonométricas para todo ángulo α con $0° < \alpha < 90°$:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

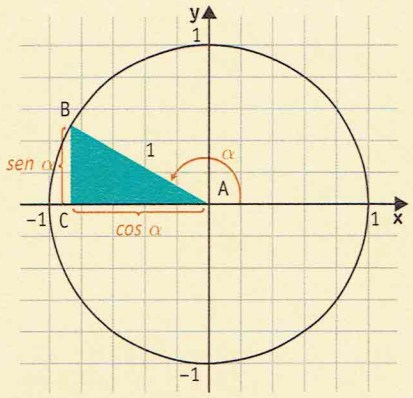
$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

Como el seno y el coseno de un ángulo son el resultado de un cociente de longitudes no tienen unidades y resultan ser números reales positivos. Además son menores que 1, dado que la hipotenusa es siempre mayor que los catetos.

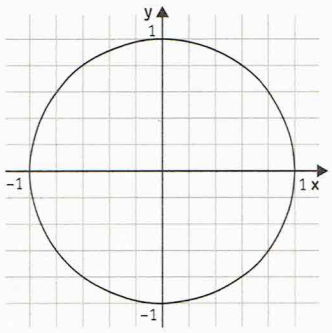


Si se continúa girando el lado AB, se pasa hacia el segundo cuadrante, donde ahora el ángulo α resulta ser mayor que 90°.

Para estos ángulos es posible extender la relación anterior, es decir, el seno de ese ángulo mayor a 90° resulta ser el valor que toma la coordenada del eje *y* para el punto B de la circunferencia y el coseno de ese ángulo es el valor que toma la coordenada del eje *x* del punto B.



A la circunferencia de radio 1 y centro (0 ; 0) se la llama **circunferencia trigonométrica**.



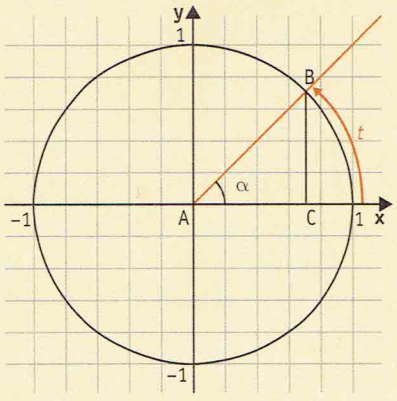
Como en la circunferencia es posible medir cualquier ángulo, se definen las razones trigonométricas para un ángulo α cualquiera de la siguiente manera:

- Se marcan el ángulo α y el radio correspondiente a él en la circunferencia.
- Se determina el punto B = (*x* ; *y*), como la intersección del radio dibujado y la circunferencia.
- Se define sen α = y ; cos α = x

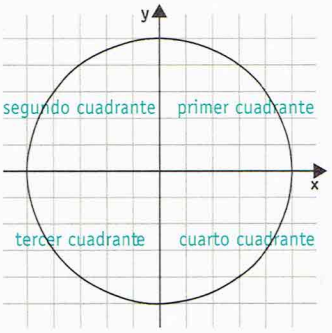
Los ángulos pueden medirse en grados y en radianes. Si bien lo que importa es la distancia que recorre el ángulo sobre la circunferencia, para evitar confusiones, se comienza a medir los ángulos desde el punto (1 ; 0) y en sentido antihorario.

En la circunferencia trigonométrica, como el radio es igual a 1, cuando el arco $\widehat{t}$ también mide 1, el ángulo mide un radian y en ese caso, la medida de un ángulo en radianes es *exactamente* el valor de la longitud del arco recorrido.

De este modo es equivalente medir a α **en grados** o medirlo como ***t* radianes.**



La circunferencia trigonométrica queda dividida por los ejes coordenados en 4 sectores, cada uno de los cuales se llama cuadrante. Los cuadrantes se cuentan en sentido contrario a las agujas del reloj.



Al establecer que el seno y el coseno de un ángulo resultan ser las coordenadas *x* e *y*, la ubicación de éstas coordenadas condicionará el signo del seno y del coseno.

De esta manera:

Cuadrante	Signo del seno	Signo del coseno
Primero	+	+
Segundo	+	–
Tercero	–	–
Cuarto	–	+

Cálculo de senos y cosenos con calculadora

Problema 4

a. ¿Cuál es el valor del seno del ángulo que mide 37°? ¿Cuánto mide en radianes un ángulo de 37°? ¿Cuál es el valor del seno del ángulo medido en radianes?

b. ¿Cuáles son los valores de los ángulos, medidos en radianes, que se encuentran entre 0 y 2π, cuyo seno es igual a 0,9?

Para calcular el seno de 37°, en una calculadora científica, basta con apretar:

sin 37 = o 37 sin =

según el modelo de calculadora que se posea. En ambos casos, aparecerá en el visor el número 0,601815023, es decir, sen 37° = 0,601815023.

Para averiguar la medida del ángulo de 37° en radianes, se puede construir una tabla de proporcionalidad como la siguiente:

$\cdot \frac{37}{180}$

Medida en grados	180°	37°
Medida en radianes	π	$\frac{37}{180}\pi \approx 0{,}645771823$

$\cdot \frac{37}{180}$

Si en el visor de la calculadora figura la sigla **RAD** o la letra **R** significa que se están tomando los ángulos medidos en radianes.
Si en cambio, en el visor de la calculadora aparece la sigla **DEG** o la letra **D** significa que se están midiendo los ángulos en grados sexagesimales.

En las calculadoras científicas pueden calcularse también la medida de senos y cosenos de ángulos medidos en radianes. Para poder hacerlo, la calculadora debe estar en modo RAD o R, no como hasta ahora que estaba en modo DEG o D (degree).

Una vez que está en el modo correcto hay que apretar sin 0,645771823 = o 0,645771823 sin = según el modelo de calculadora. En ambos casos en el visor aparecerá: 0,601815023, que es el valor de sen 0,645771823.

Si se traduce el problema **b.** a lenguaje simbólico, puede decirse que se intenta buscar valores de α tales que: sen $\alpha = 0{,}9$.

Para calcularlo con la calculadora científica será necesario tener la calculadora en modo RAD y teclear

2NDF o INV o SHIFT y sin y 0,9

O bien, en otro tipo de calculadora

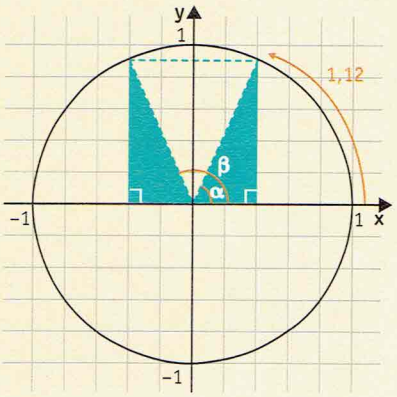
0,9 2NDF o INV o SHIFT y sin

Al hacer estas operaciones en el visor aparece el número 1,119769515; lo que significa que para un ángulo de aproximadamente 1,12 radianes su seno es 0,9.

Si la calculadora hubiera estado en modo DEG, en el visor habría aparecido el número 64,1580672 que es la medida del ángulo en grados sexagesimales.

Es decir, 1,12 radianes es aproximadamente igual a 64,16° = 64° 9′ 36″.

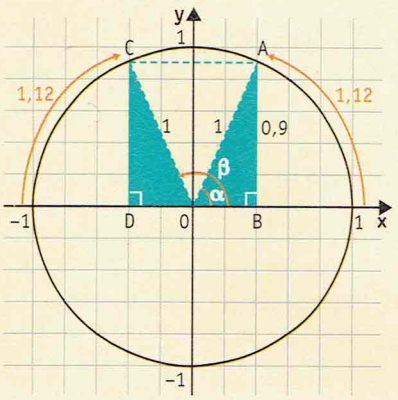
Pero un análisis de ese ángulo en la circunferencia trigonométrica, permite reconocer que existe un ángulo mayor que $\frac{\pi}{2}$ que también tiene seno igual a 0,9. Ese valor no lo da la calculadora, entonces,



¿cómo saber cuál es el otro ángulo de la circunferencia trigonométrica que también tiene seno 0,9?

Los dos triángulos rectángulos, OBA y ODC que quedan determinados son congruentes pues tienen dos pares de lados iguales, un lado que mide 0,9 y otro lado que mide 1, que es el radio de la circunferencia. Puede observarse entonces en la figura que el ángulo β es igual al ángulo π menos α es decir,

$$\beta = \pi - 1{,}12 = 2{,}02$$



Entonces 2,02 tiene seno igual que 1,12, pues, al ser los triángulos iguales, las coordenadas que responden al valor del seno son iguales y del mismo signo.

Estos ángulos tienen coseno de igual módulo pero con signo distinto, esto es cos 2,02 = –cos 1,12, ya que miden lo mismo pero en sentido contrario.

Problema 5

¿Cuáles son los ángulos comprendidos entre 0 y 2π cuyo seno es igual a –0,9?

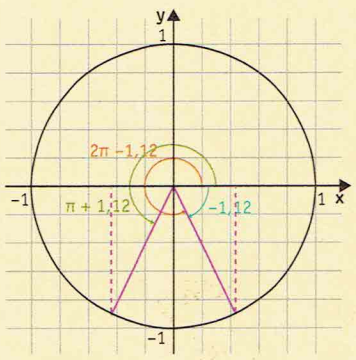
El problema plantea la ecuación sen $\alpha = -0{,}9$.

Si se utiliza la calculadora aparece en el visor aproximadamente –1,12.

¿Qué significa un ángulo de –1,12?

Esto significa que se comenzó a medir el ángulo para el otro lado, es decir, se cambió el sentido con el cual se está midiendo.

Un ángulo negativo se mide en sentido horario. Entonces, el ángulo de –1,12 resulta ser equivalente a $2\pi - 1{,}12 = 5{,}16$. Y como –1,12 es menor que 0, el ángulo cuyo seno es igual a – 0,9 y se encuentra entre 0 y 2π es 5,16. Pero el ángulo que surge de hacer $\pi + 1{,}12 = 4{,}26$ también verifica: sen 4,26 = –0,9. Es decir, se le agregó a π lo mismo que se le quitó a 2π, para obtener dos triángulos iguales.



Problema 6

Hallar un ángulo cuyo seno sea igual a 2.

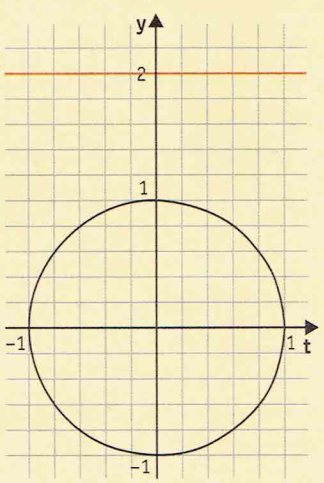
Como se conoce el valor del seno y se quiere hallar el ángulo, en la calculadora debe presionarse la tecla $\sin^{-1}$ y luego el valor del seno.

Al hacer $\sin^{-1}(2)$ el visor de la calculadora indica "error".

¿Por qué sucede esto?

Al calcular $\text{sen}^{-1}(2)$ se intenta encontrar en la circunferencia trigonométrica alguna longitud de arco que cumpla que la altura del triángulo rectángulo que queda determinado sea igual a 2.

Pero, se ha dicho que en la circunferencia trigonométrica, el seno de un ángulo es la coordenada *y* del punto que determina el ángulo y como el radio es 1, no hay ningún punto de ella que tenga una ordenada de 2. **No existe un valor de *t* que cumpla que sen *t* = 2.** Puede observarse en el gráfico que la recta y = 2 no interseca a la circunferencia.



Entonces, *¿cuáles son los valores posibles que puede tomar el seno de t?*

Si se analiza en la circunferencia trigonométrica, el seno de un ángulo se "mueve" en la franja comprendida entre –1 y 1.

$-1 \leq \text{sen } t \leq 1$

$-1 \leq \cos t \leq 1$

Relaciones entre el seno y el coseno de un ángulo

Si en la circunferencia trigonométrica se recorre un cierto ángulo en cualquier cuadrante se tiene: sen $t = a$ y cos $t = b$ donde $(b\,;\,a)$ es el punto en el que interseca el radio a la circunferencia.

Interesa ahora determinar la relación entre el valor de *a* y el valor de *b*, lo que permitirá establecer una relación entre el sen *t* y el cos *t*.

A partir del teorema de Pitágoras y considerando que en la circunferencia trigonométrica el radio es 1 se puede establecer: $a^2 + b^2 = 1^2$.

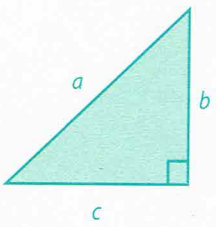
Utilizando esta relación para cualquier valor de t se tiene que:

$$\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

Esta relación se denomina *identidad pitagórica*.

El Teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo dice que: "el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"

$a^2 = b^2 + c^2$



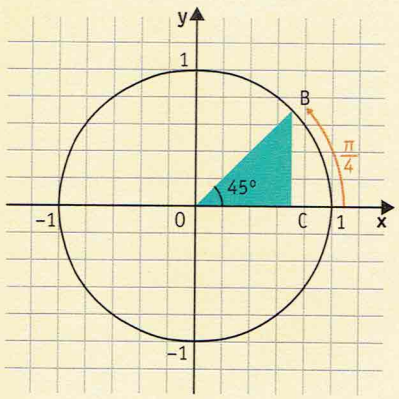
Problema 7

Sin utilizar la calculadora, calcular:

a. $\text{sen}\frac{\pi}{4}$ **b.** $\text{sen}\frac{\pi}{6}$ **c.** $\cos\frac{\pi}{3}$

En la circunferencia trigonométrica $\frac{\pi}{4}$ *equivale* a recorrer la mitad del primer cuadrante sobre la circunferencia, es decir equivale a un ángulo de 45°.

El triángulo OBC que queda determinado dentro de la circunferencia trigonométrica es un triángulo isósceles, porque el ángulo $\frac{\pi}{4}$ equivale a 45°, con lo cual el triángulo OBC es un triángulo rectángulo con un ángulo de 45°, el otro debe ser también de 45°.



Usualmente $(\text{sen } t)^2$ se escribe como $\text{sen}^2 t$.

Por eso $\text{sen}^2 t = \text{sen } t \cdot \text{sen } t$.

Para cualquier valor de t siempre se puede relacionar el valor del sen t y del cos t.

$$\boldsymbol{\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1}$$

Esta igualdad se llama **identidad pitagórica.**

Por lo tanto, la altura y la base del triángulo OBC son iguales, lo que dentro de la circunferencia trigonométrica significa que el sen $\frac{\pi}{4}$ y el cos $\frac{\pi}{4}$ son iguales.

Si se utiliza la identidad pitagórica:

$\text{sen}^2\frac{\pi}{4} + \text{sen}^2\frac{\pi}{4} = 1$	Se reemplaza cos $\frac{\pi}{4}$ por sen $\frac{\pi}{4}$.
$2 \cdot \text{sen}^2\frac{\pi}{4} = 1$	Se opera.
$\text{sen}^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$	Se despeja.
$\left\|\text{sen}\frac{\pi}{4}\right\| = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	Se extrae raíz cuadrada en ambos miembros.

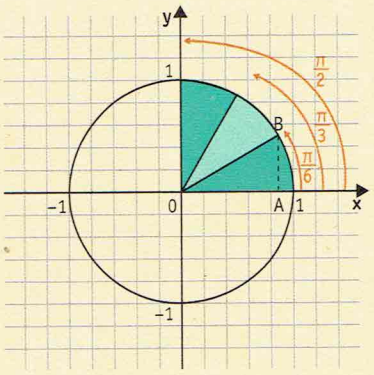
Como $\frac{\pi}{4}$ se encuentra en el primer cuadrante, el valor de su seno es positivo, luego:

$$\text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por lo tanto sen $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y cos $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

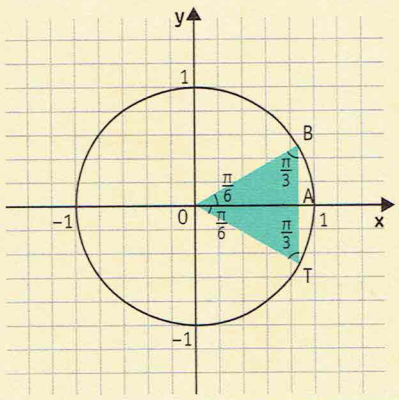
Para comenzar a calcular sen $\frac{\pi}{6}$ es conveniente ubicar al ángulo de $\frac{\pi}{6}$ radianes en la circunferencia trigonométrica.

$\frac{\pi}{6}$ equivale a la sexta parte de π, o lo que es lo mismo, a la tercera parte de $\frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, para hallar $\frac{\pi}{6}$ es posible tomar el primer cuadrante y dividirlo en tres parte iguales.
El primer punto de la circunferencia es $\frac{\pi}{6}$, el segundo es $\frac{2}{6}\pi = \frac{\pi}{3}$ y el tercero que coincide con $\frac{3}{6}\pi = \frac{\pi}{2}$.
El triángulo OBA es rectángulo y tiene un ángulo de $\frac{\pi}{6}$, es decir 30°. El ángulo OBA mide entonces 60°, o sea, $\frac{\pi}{3}$.



Dos ángulos son **complementarios** si al sumarlos resulta igual a $\frac{\pi}{2}$.

Si ahora se señala $-\frac{\pi}{6}$ se obtiene un triángulo BOT donde el ángulo
$B\hat{O}T = B\hat{O}A + A\hat{O}T = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{2}{6}\pi = \frac{\pi}{3}$. Y los ángulos BTO y OBT también.
El triángulo BOT tiene los tres ángulos que miden $\frac{\pi}{3}$, es decir, de 60° por lo tanto es un triángulo equilátero. Esto significa que los tres lados miden lo mismo y como los lados OB y OT son radios de la circunferencia, miden 1, entonces $\overline{BT}$ mide también 1.



Por otro lado el eje *x* es perpendicular al lado BT del triángulo y como pasa por el vértice opuesto además es una altura. Como es un triángulo equilátero la altura divide a la base en dos partes iguales, $\overline{BA} = \overline{AT} = \frac{1}{2}$. Pero $\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \overline{AB} \Rightarrow \text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

De aquí se puede calcular $\cos\frac{\pi}{6}$ a partir de la relación pitagórica y sabiendo que es un número positivo. Es decir:

$$\text{sen}^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{6} = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\frac{\pi}{6} = 1 \Rightarrow \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

El triángulo OBA, de la figura anterior, es rectángulo y tiene un ángulo de $\frac{\pi}{6}$, uno de $\frac{\pi}{3}$ y la hipotenusa mide 1. Luego:

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \overline{OA} \text{ y } \cos\frac{\pi}{3} = \overline{AB} \\ \text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \overline{AB} \text{ y } \cos\frac{\pi}{6} = \overline{OA}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ y } \cos\frac{\pi}{3} = \text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$\text{sen}\,t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$
$\cos t = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$

Problema 8

Calcular, sin utilizar la calculadora:

a. $\text{sen}\,\frac{5}{6}\pi$ **b.** $\cos\frac{5}{6}\pi$ **c.** $\text{sen}\,\frac{11}{6}\pi$ **d.** $\cos\frac{11}{6}\pi$

El ángulo que mide $\frac{5}{6}\pi$ es un ángulo que se encuentra en el segundo cuadrante pues $\frac{5}{6}\pi$ es mayor que $\frac{\pi}{2}$ y menor que π.

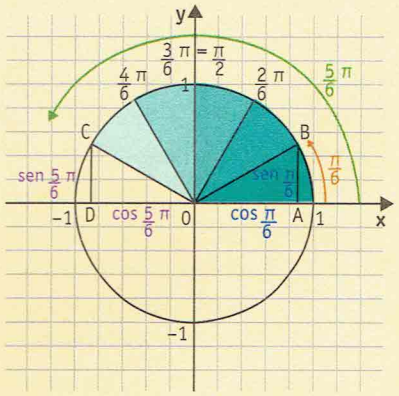
Así como para hallar $\frac{\pi}{6}$ se tomó el primer cuadrante y se lo dividió en tres parte iguales, para hallar $\frac{5}{6}\pi$ se puede dividir en tres partes iguales el segundo cuadrante.

De este modo resultan dos triángulos, OBA y OCD, congruentes pues tienen el ángulo que forma cada hipotenusa con el eje horizontal iguales, un ángulo recto y la hipotenusa igual.

Por lo tanto, el sen $\frac{5}{6}\pi$ y el sen $\frac{\pi}{6}$ resultan ser iguales, pero el cos $\frac{5}{6}\pi$ y el cos $\frac{\pi}{6}$ resultan ser del mismo módulo pero con signo contrario; en conclusión

$$\operatorname{sen}\frac{5}{6}\pi = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{5}{6}\pi = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



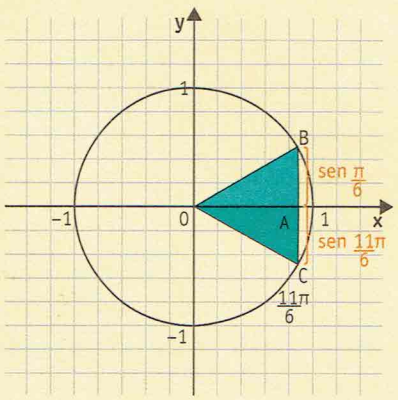
$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(\pi - t)$
$\cos t = -\cos(\pi - t)$

El ángulo que mide $\frac{11}{6}\pi$ se encuentra en el cuarto cuadrante pues $\frac{11}{6}\pi$ es mayor que $\frac{3}{2}\pi$ y menor que 2π.

Como $\frac{11}{6}\pi = 2\pi - \frac{\pi}{6}$, los triángulos OBA y OCA son congruentes; puede observarse entonces que:

$$\operatorname{sen}\frac{11}{6}\pi = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{11}{6}\pi = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$\operatorname{sen} t = -\operatorname{sen}(2\pi - t)$
$\cos t = \cos(2\pi - t)$

6. ¿Será cierto que el seno de 90° es lo mismo que el seno de 270° pero cambiado de signo?

7. Encuentren el valor de dos ángulos cuyos cosenos valgan el mismo número pero cambiado de signo.

8. ¿Entre qué valores se encuentra el coseno de t? Justifiquen su respuesta.

9. Utilizando la calculadora científica calculen los siguientes valores:

a. sen 3,15 **b.** cos 0,178 **c.** sen $\frac{1}{7}\pi$ **d.** cos 10 **e.** sen 1

10. Busquen con la calculadora para qué valores de x entre 0 y 2π se cumple cada igualdad:

a. $\cos x = 0{,}0001$ **b.** $\operatorname{sen} x = 0{,}89$ **c.** $\operatorname{sen} x = 0{,}32$ **d.** $\cos x = 0{,}99999$

11. Encuentren en cada caso un ángulo x que verifique lo pedido:

a. x se encuentra en el cuarto cuadrante y $\cos x = 0{,}618$.

b. $\operatorname{sen} x = 0{,}64278$ y x está entre $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3}{2}\pi$.

c. x que se encuentra entre 0 y 2π y $\cos x = -0{,}78$.

Analicen en cada caso cuántas soluciones posibles hay.

12. Completen, sin utilizar calculadora, la siguiente tabla

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{9}{4}\pi$	$\frac{5}{2}\pi$
sen t													
cos t													

Definición de las funciones seno y coseno

Después de este recorrido con los ángulos y los triángulos es posible establecer una relación funcional entre un ángulo y su seno o su coseno. Se estudió que cada ángulo tiene un único valor posible para seno y para coseno. Entonces es posible relacionar la medida de un ángulo y el valor que toma el seno o la medida de un ángulo y el valor que toma el coseno para ese ángulo.

Se definen entonces dos funciones: $f(t) = \text{sen } t$ y $g(t) = \cos t$ donde cada valor t se corresponde con un ángulo medido en radianes.

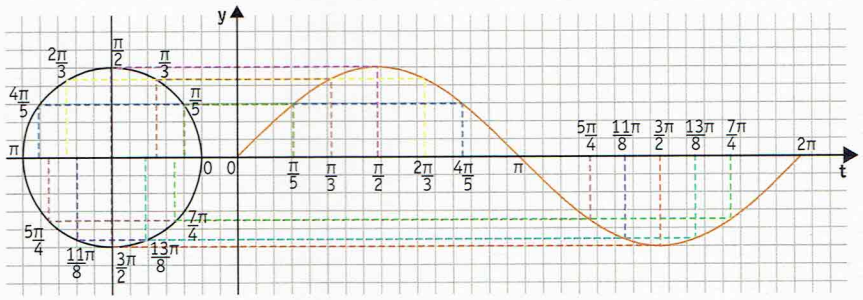
El dominio de estas funciones son todos los números reales. Es decir:

$$Dom\ (f) = \mathbb{R} \quad Dom\ (g) = \mathbb{R}$$

Problema 9

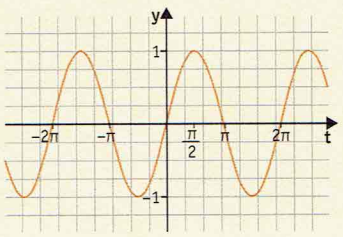
Graficar la funcion $f(t) = \text{sen } t$.

Para comenzar a analizar el gráfico de $f(t)$ es conveniente recurrir a la circunferencia trigonométrica pues para cada ángulo, su seno es la ordenada del punto que es la intersección del radio con la circunferencia. Si se comienza a marcar distintos ángulos en la circunferencia trigonométrica y luego se trasladan al gráfico se puede observar:



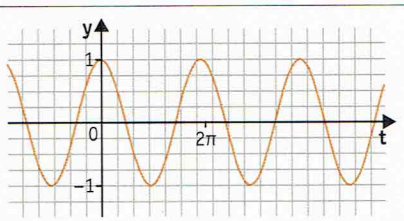
Una vez que se recorrió toda una vuelta es posible seguir recorriendo otra vuelta de la circunferencia, es decir, recorrer por ejemplo $\frac{9}{4}\pi$. Pero, como su altura es igual que para $\frac{\pi}{4}$, resulta que tanto el seno de $\frac{\pi}{4}$ como el seno de $\frac{9}{4}\pi$ son iguales. Por lo tanto, la función continúa el mismo comportamiento cada vez que pasa una vuelta.

La función $f(t) = \text{sen } t$ es, entonces, una función continua y periódica. Su grafico es:



sen (2π + t) = sen t
cos (2π + t) = cos t

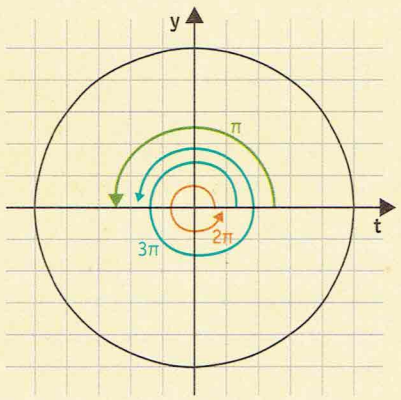
13. El siguiente gráfico representa la función $g(t) = \cos t$. Expliquen qué datos necesitarían trasladar de la circunferencia trigonométrica para poder realizarlo.



Al utilizar la calculadora se observa que:

sen 0° = 0 sen $\pi = 0$ sen 360° = 0 sen $3\pi = 0$ sen 720° = 0

Si se analiza en la circunferencia trigonométrica, el seno de un arco de longitud t, es decir, el valor de la ordenada del punto que determina en la circunferencia, solo es cero en los valores de $t = 0$ y $t = \pi$. Por lo tanto, cada vez que, al recorrer la circunferencia se pase por esos puntos, la segunda coordenada es 0, lo que implica que el seno es 0.



¿Cuáles son los otros valores de t que cumplen sen t = 0?

El punto de la circunferencia trigonométrica que equivale a $t = 0$ es el mismo que corresponde a cada vuelta completa. El ángulo que se obtiene cuando se recorre una vuelta es 2π, si se recorren 2 vueltas es 4π, si se recorren 3 vueltas es 6π. Es decir, si se recorre una cantidad entera de vueltas, por ejemplo k vueltas (donde k es un número entero), la longitud de arco recorrida sobre la circunferencia es de $2\pi k$. Para cada uno de esos ángulos el seno vale 0, ya que corresponden a un punto de ordenada 0, el (1 ; 0).

Si los ángulos están medidos en grados, el seno de cualquier múltiplo de 360° vale 0.

Si se recorre media vuelta, es decir un ángulo de π radianes, el seno también vale 0. Una vez que se está "parado" en ese punto, cada vez que se le sume una cantidad entera de vueltas se vuelve a "caer" en el mismo punto. Sumar vueltas enteras es sumar $2\pi k$, donde k es un número entero que señala la cantidad de vueltas. Así, si $k = 3$ significa que se recorrieron 3 vueltas enteras, lo que equivale a $2\pi \cdot 3 = 6\pi$.

Si al ángulo que mide π se le agregan 3 vueltas, se agregan 6π más, por lo tanto, en total se recorre $\pi + 6\pi = 7\pi$. Y en este caso, sen 7π = sen $\pi = 0$. Es decir que el seno de cualquier múltiplo de π o de 180°, expresado en grados, vale 0.

¿Significa que tanto π como $\pi + 2\pi k$, es decir, k vueltas más de π representan el mismo ángulo?

No, son dos ángulos **distintos**, pues un arco de longitud π se corresponde con un ángulo de 180°, en cambio un arco de longitud 7π se corresponde con haber girado 180° y 3 veces más 360°, es decir, se giró un total de 1260°. No son iguales.

De este modo, la función seno tiene infinitos ceros que se encuentran todos a la misma distancia unos de otros. Cada vez que se da medio giro a partir de 0, el seno se anula, por lo tanto dos ceros consecutivos de esta función se encuentran a una distancia de π, que se corresponde con la mitad del período.

$$C^0 = \{k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$$

$\text{sen}(0 + 2\pi k) = 0$

$\text{sen}(\pi + 2\pi k) = 0$

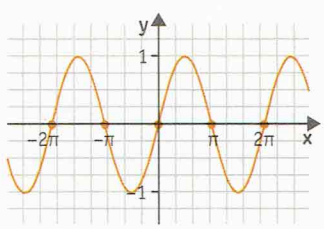
donde $k \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto, la función f tiene **ceros** en los puntos t que pueden describirse de la forma

$t = 0 + 2\pi k$

$t = \pi + 2\pi k$

con $k \in \mathbb{Z}$



© Ruta fresca ediciones S.A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Máximos y mínimos. Conjunto de positividad y negatividad

Problema 12

Hallar, si existen, los valores máximos y mínimos de la función $f(t) = \text{sen } t$.
¿Para qué valores de t la función alcanza esos máximos o mínimos?

Como se analizó anteriormente, $Im\ (f) = [-1\ ;\ 1]$, lo que significa que el **mayor valor** que puede alcanzar el seno es **1**, mientras que el **menor valor** es **–1**.

Para saber dónde se alcanzan esos valores máximos o mínimos hay que hallar los valores de t que cumplan $\text{sen } t = 1$ y los que cumplan $\text{sen } t = -1$.

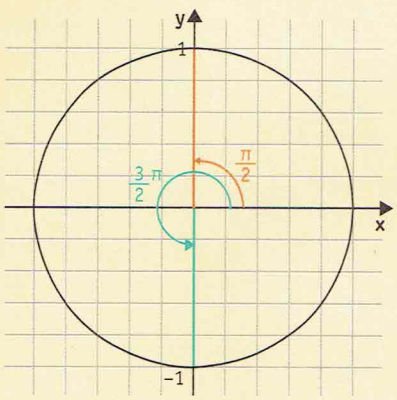
Si se analiza la circunferencia trigonométrica puede observarse que
$\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$ y $\text{sen } \frac{3}{2}\pi = -1$.
Pero esto también se cumple cualquier ángulo que se obtenga agregando vueltas enteras a partir de $\frac{\pi}{2}$ o de $\frac{3}{2}\pi$. Resulta de este modo que f tiene infinitos máximos pero todos ellos alcanzan el mismo valor 1.
Todos los máximos son de la forma

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Además tiene infinitos mínimos, que son

$$t = \frac{3}{2}\pi + 2\pi k \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Todos ellos alcanzan el mismo valor –1.



Si $k \in \mathbb{Z}$
$\text{sen } (\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = 1$
$\text{sen } (\frac{3}{2}\pi + 2\pi k) = -1$

La función $f(t) = \text{sen } t$ tiene máximos en los valores de t que tienen la forma

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \text{ donde } k \in \mathbb{Z}.$$

La función $f(t) = \text{sen } t$ tiene mínimos en los valores de t de la forma

$$t = \frac{3}{2}\pi + 2\pi k, \text{ donde } k \in \mathbb{Z}.$$

Problema 13

Encontrar los conjuntos de positividad y negatividad de $f(t) = \text{sen } t$.

En la circunferencia trigonométrica es posible analizar cuándo el seno toma valores positivos y cuándo toma valores negativos.

Para que el seno sea positivo, es decir para que sea positiva la ordenada de un punto en la circunferencia, el ángulo tiene que estar en el primer o el segundo cuadrante, o sea comprendido entre 0 y π.

Para que el seno de un ángulo resulte negativo, el ángulo tiene que estar en el tercer o el cuarto cuadrante, lo que se corresponde con los ángulos comprendidos entre π y 2π.

Entonces f es positiva en el intervalo $(0\ ;\ \pi)$ y negativa en el intervalo $(\pi\ ;\ 2\pi)$.

Por lo tanto si solo se analizaran ángulos entre 0 y 2π se tendría que:

$$C^+ = (0\ ;\ \pi) \text{ y } C^- = (\pi\ ;\ 2\pi)$$

$f(t) = \text{sen } t$ es **positiva** en los intervalos de la forma

$(0 + 2\pi k\,;\, \pi + 2\pi k)$

y es **negativa** en los intervalos de la forma

$(\pi + 2\pi k\,;\, 2\pi + 2\pi k)$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Pero si se realiza un análisis apoyándose en el gráfico y teniendo en cuenta que la función es continua y periódica, resulta que entre dos ceros consecutivos se tiene un conjunto de positividad o bien de negatividad de la función.

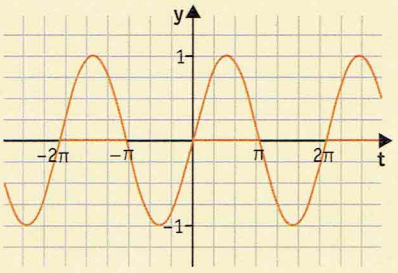
f es positiva en los intervalos de la forma

$(0 + 2\pi k\,;\, \pi + 2\pi k)$

y es negativa en los intervalos de la forma

$(\pi + 2\pi k\,;\, 2\pi + 2\pi k)$

donde k es un número entero.



Comportamiento de f(t) = sen t en +∞ y −∞

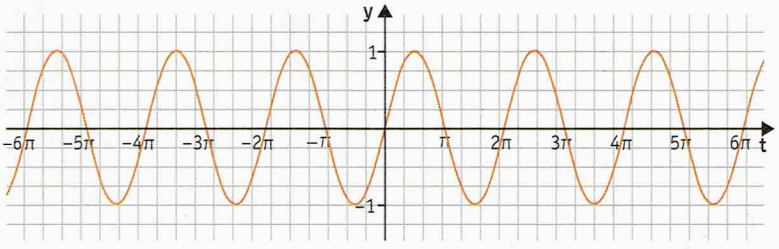
Cuando se dice que **"t tiende a más infinito"** y se escribe $t \to +\infty$, se refiere a que t toma valores **cada vez más grandes** en valor absoluto con signo **positivo**. Es decir, en la recta numérica el valor de t "se aleja" hacia la derecha. En cambio, cuando se dice que **"t tiende a menos infinito"** y se escribe $t \to -\infty$, se refiere a que t toma valores cada vez **más grandes** en valor absoluto pero con signo **negativo**. En la recta numérica, "se aleja" hacia la izquierda.

La función $f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a infinito, ya sea $+\infty$ o $-\infty$, significa que cuando x toma valores muy grandes en valor absoluto, la función $f(x)$ evaluada en esos puntos **también** resulta ser **muy grande** en valor absoluto. Es decir, la función se continúa "alejando" del eje x ya sea hacia arriba o hacia abajo.

Problema 14

Calcular el límite de $f(t) = \text{sen } t$ cuando $t \to +\infty$ y cuando $t \to -\infty$.

El gráfico de $f(t)$ es:



En principio, tanto cuando $t \to +\infty$, como cuando $t \to -\infty$, el límite buscado no es igual a infinito pues de ser así, f debería tomar valores cada vez "más grandes".

En este caso, la función se "mueve" en la banda encerrada entre $y = -1$ e $y = 1$. Por lo tanto no existen valores de t donde f resulta mayor, en valor absoluto, que 1.

Se podría suponer que el límite cuando $t \to +\infty$ y $t \to -\infty$ *de* f debería ser un número, L.

En este caso, la función se tendría que "meter" en una franja muy chiquita alrededor de L. Pero como esta función oscila indefinidamente entre los valores de $y = -1$ e $y = 1$, no existe una franja tan chiquita como se quiera, alrededor de un valor donde f se "meta" completamente para t cada vez más grandes en valor absoluto.

La función $f(x)$ tiende al valor L cuando x tiende a infinito, ya sea $+\infty$ o $-\infty$, gráficamente significa que a medida que x **toma valores muy grandes en valor absoluto** ya sea hacia la izquierda $(-\infty)$ o hacia la derecha $(+\infty)$, la función evaluada en esos x se "mete" en una franja del ancho tan chiquito como se elija, centrada en la recta $y = L$. De este modo para esos valores de x **muy grandes en valor absoluto**, $f(x)$ se aproxima al valor L.

De este modo, no existe $\lim_{t \to +\infty} f(t)$, ni $\lim_{t \to -\infty} f(t)$.

ACTIVIDADES

14. Consideren la función $g(t) = \cos t$

a. Analicen cuáles son sus ceros.

b. ¿Cuáles son los máximos y mínimos de $g(t)$ y en qué valores los alcanza?

c. ¿Cuáles son los conjuntos de positividad y negatividad de $g(t)$?

d. ¿Cómo se comporta la función $g(t)$ cuando $t \to +\infty$ y cuando $t \to -\infty$?

Desplazamientos de las funciones trigonométricas

Problema 15

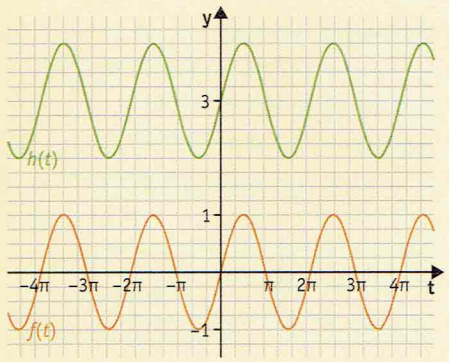
Hallar el gráfico, el período, el dominio y la imagen de la función $h(t) = \text{sen } t + 3$.

Para comenzar con el análisis de la función $h(t) = \text{sen } t + 3$ es posible apoyarse en el gráfico que se conoce del sen t.

Al hacer una tabla de valores, se verifica que para esta nueva función $h(t) = \text{sen } t + 3$, dado un t cualquiera, primero se debe calcular su seno, para luego sumarle 3 a ese valor.
Entonces, los valores que se obtengan serán los del seno de t aumentados en 3 unidades.

t	$f(t) = \text{sen } t$	$h(t) = \text{sen } t + 3$
0	0	$0 + 3 = 3$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} + 3$
$\frac{\pi}{2}$	1	$1 + 3 = 4$
$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} + 3$
π	0	$0 + 3 = 3$
$\frac{3}{2}\pi$	-1	$-1 + 3 = 2$

Gráficamente sería "subir" 3 unidades cada punto del gráfico de seno de t. Por lo tanto, el gráfico de la función $h(t) = \text{sen } t + 3$ queda como el gráfico de sen t pero desplazado 3 unidades hacia arriba.



$h(t) = \text{sent} + 3$ $\quad f(t) = \text{sent}$

¿El período se modificó?

Se sabe que el período p es la longitud de un ciclo, es decir, la distancia que existe entre los valores que "repiten" de la onda. Para el caso de $h(t) = \text{sen } t + 3$ esta distancia **no se modificó**. Esto es, cada vez que se da una vuelta completa de 2π comienza a repetirse el gráfico.

Por lo tanto el período de $h(t) = \text{sen } t + 3$ es $p = 2\pi$.

El dominio para esta función continúa siendo el de todos los números reales, pero en cambio ahora los valores de h "se mueven" entre 2 y 4, por lo tanto:

$$Dom\ (h) = \mathbb{R} \qquad Im\ (h) = [2\ ;\ 4]$$

Además, al no modificarse la onda, la amplitud sigue siendo 1.

La función $h(t) = \text{sen } t + c$, donde c es una constante, produce un **desplazamiento** del gráfico de seno de t en el eje vertical una cantidad de c unidades hacia arriba, si c es positivo, o $|c|$ unidades hacia abajo si c resulta negativo.
Esto produce una modificación en la imagen de la función sen t ya que la imagen para la función $h(t) = \text{sen } t + c$ pasa a ser $Im\ (h) = [-1 + c\ ;\ 1 + c]$
Este corrimiento **no produce modificaciones** en el período ni en la **amplitud**.

Problema 16

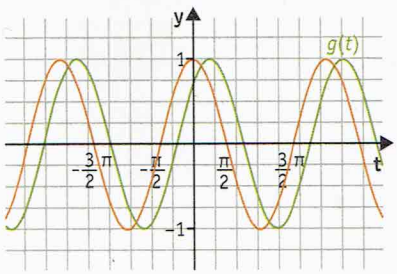
Hacer un gráfico aproximado, y determinar el período, la amplitud y los ceros de $g(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$.

A diferencia de lo ocurrido en el problema anterior, $\frac{\pi}{4}$ se resta al valor de t y a ese nuevo valor se le calcula el coseno.

Si se realiza una tabla de valores, puede observarse que si t **toma** el valor $\frac{\pi}{4}$, al restarle $\frac{\pi}{4}$, el valor de $t = \frac{\pi}{4}$ pasa a comportarse como el valor $t = 0$. A partir de allí, se empieza a armar el gráfico de cos t pero corrido hacia la derecha en el eje x en $\frac{\pi}{4}$. Se tiene entonces el gráfico de cos t pero **corrido** en el **eje horizontal** en $\frac{\pi}{4}$. Tanto su período como su amplitud no se modificaron, pero al haber un desplazamiento en el eje horizontal implica que ahora el gráfico de g corta al eje x en otros puntos, por lo tanto, los ceros de g se modificaron con respecto a los ceros de cos t.

t	$t - \frac{\pi}{4}$	$g(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$
0	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	0	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	0
π	$\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5}{4}\pi$	π	-1
$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	0
2π	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{9}{4}\pi$	2π	1

La función $g(t) = \cos(t + c)$, donde c es una constante, produce un **desplazamiento** del gráfico de coseno de t en el **eje horizontal** una cantidad de $|c|$ unidades hacia la izquierda, si c es positivo, o hacia la derecha si c resulta negativo.
No se producen modificaciones ni en la imagen ni en el período ni en la amplitud de la función coseno de t, pero si en los ceros.



Para hallar los ceros de $g(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$ es necesario resolver la ecuación

$$\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Para ello se deben calcular, primero, los valores entre 0 y 2π que hacen que $\cos x = 0$.

$$\cos x = 0 \text{ y } 0 \le x \le 2\pi \iff x = \frac{\pi}{2} \text{ o } x = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow t - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ o } t - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi \iff$$

$$t = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi \text{ o } t = \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$$

Pero existen otros valores de t que también son ceros de $g(t)$.

Como el período de g es $p = 2\pi$ resulta que todos aquellos valores que estén a una distancia de $p = 2\pi$ tendrán la misma imagen a través de g.

Entonces, todos los valores de t que estén a una cantidad de vueltas completas de $t = \frac{3}{4}\pi$ o de $t = \frac{7}{4}\pi$ tienen el mismo valor de $g(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$.

Por lo tanto, **todos los ceros de g** son los valores t de la forma $t = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k$ o bien de la forma $t = \frac{7}{4}\pi + 2\pi k$ donde en ambos casos k debe ser un número entero cualquiera.

Estudio de las variaciones de la amplitud y del período

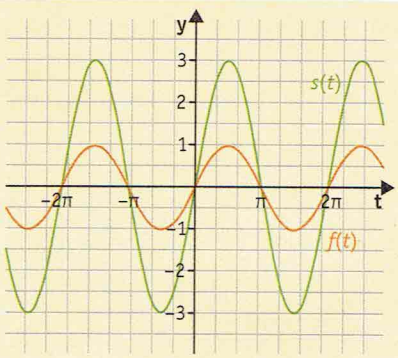
Problema 17

Hallar el período, la amplitud, los ceros y el gráfico de:

a. $s(t)= 3 \operatorname{sen} t$ **b.** $h(t) = -2 \cos t$ **c.** $m(t) = \operatorname{sen}(2t)$ **d.** $n(t) = \cos\left(\frac{1}{2}t\right)$

Nuevamente es posible armar una tabla de valores para $s(t)$:

t	$f(t) = \operatorname{sen} t$	$s(t)=3 \cdot \operatorname{sen} t$
0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	3
$\frac{3}{2}\pi$	-1	-3
2π	0	0



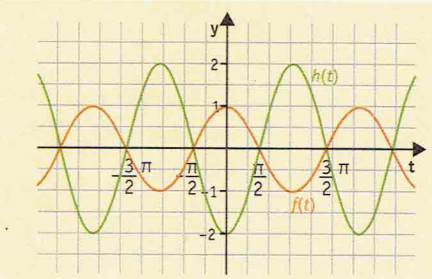
Por lo tanto, si a cada valor de sen t se lo multiplica por 3, se produce una **distorsión** en la onda del gráfico de sen t, pero mantiene los ceros de la función ya que si sen $t = 0$, también 3 sen $t = 0$.

El **período no cambia** pero lo que cambia es **la amplitud de la onda** que ahora es 3.

Al modificarse la amplitud de onda, también se modifica la imagen. Ahora se tiene que

$$Im\ (s) = [-3\ ;\ 3]$$

En el caso de la función $h(t) = -2 \cos t$ a cada valor del cos t hay que multiplicarlo por -2, se produce una amplitud mayor de la onda, y se invierte el gráfico. El **período y los ceros se mantienen**, y la **amplitud de onda se duplica.**



Es posible comenzar a analizar la función m a través de una tabla de valores.

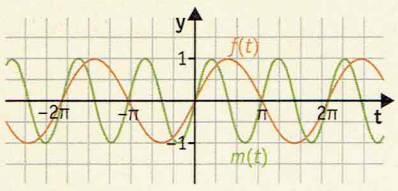
t	$2t$	$m(t) = \operatorname{sen}(2t)$
0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0
π	2π	0

Al tener que calcular el seno de un ángulo que es el **doble de t**, el valor del seno se repite más seguido.

Por ejemplo si t toma el valor $\frac{\pi}{4}$ al tomar el doble, pasa a "comportarse" como el valor $t = \frac{\pi}{2}$ en la función sen t. Lo mismo sucede con el valor de $t = \pi$ que al tomar el doble se comporta como $t = 2\pi$ en la función sen t.

La función $s(t) = a \cdot \operatorname{sen} t$, "estira" o "aplasta" la onda de la función seno, es decir, dilata o comprime verticalmente el gráfico ya sea que a sea mayor que 1 o que a sea mayor que 0 y menor que 1.
Si además a resulta ser negativo, el gráfico se invierte con respecto al eje horizontal.
Esto produce una modificación en la amplitud de onda y como consecuencia, en la imagen, pero el período se mantiene.
La amplitud pasa a ser el valor absoluto de a, esto es $|a|$ y la imagen $Im\ (s) = [-|a|\ ;\ |a|]$

Se produce una **compresión** del gráfico en sentido horizontal, debido a lo cual la longitud de la onda es menor, es decir, cambia el período. La función se repite cada π. Por lo tanto, cuando se toma el doble del valor de la variable, el período se reduce a la mitad.

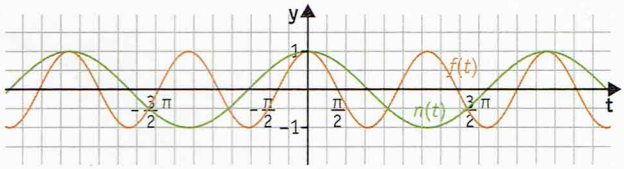


$f(t) = \operatorname{sen} t \qquad m(t) = \operatorname{sen}(2t)$

Las funciónes $m(x) = \operatorname{sen}(ax)$ y $g(x) = \cos(ax)$, provocan una distorsión de la onda, ya sea comprimiéndola, en el caso de a mayor que 1, o dilatándola si a es mayor que 0 y menor que 1. En este caso se **mantiene** la **imagen**, pero se **modifica** el **período** que pasa a ser

$$p = \frac{2\pi}{|a|}$$

Al tomar $n(t)$ los valores de la **mitad de** t, el **período se duplica**, por lo tanto, el coseno se volverá a repetir cada 4π.



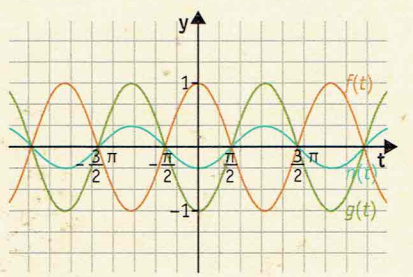
Problema 18

¿Cuál es el gráfico de la función $n(t) = \frac{1}{3}\cos(t + \pi)$?

Si se tiene como base la función cos t, la gráfica de la función $g(t) = \cos(t + \pi)$ se obtiene **desplazándola** en el **eje horizontal** π unidades hacia la izquierda. Debido a esto, un ciclo de $g(t)$ comienza en $-\pi$. En este caso no se modifica ni la amplitud, ni el período, ni la imagen.

La función $g(t)$, se multiplica por $\frac{1}{3}$. Esto produce una **compresión** del gráfico en el **eje horizontal**. Lo cual también produce una modificación de la amplitud y en la imagen. Por lo tanto, se tiene

$Amplitud = \frac{1}{3} \qquad Im\,(n) = [-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$



$f(t) = \cos t \qquad g(t) = \cos(t + \pi)$
$n(t) = \frac{1}{3}\cos(t + \pi)$

ACTIVIDADES

15. Para cada función señalen dominio, imagen, período, amplitud, y hagan un gráfico aproximado

a. $f(t) = \cos t - 2$ **b.** $f(t) = \cos(t - \frac{\pi}{2})$ **c.** $f(t) = \operatorname{sen}(t - 3)$
d. $f(t) = \operatorname{sen} t - 3$ **e.** $f(t) = \operatorname{sen}(t - \frac{\pi}{2})$ **f.** $f(t) = \cos(t + \frac{\pi}{3})$
g. $f(t) = \frac{1}{2} + \operatorname{sen} t$ **h.** $f(t) = 5 + \cos t$

16. La función $f(x) = \cos(x + 1)$ y la función $g(x) = \cos x + 1$, ¿son la misma función? ¿Por qué?

17. Para cada función señalen dominio, imagen, período, amplitud, y hagan un gráfico aproximado.

a. $f(t) = -3 \cdot \cos t$ **b.** $f(t) = \frac{5}{3}\operatorname{sen} t$ **c.** $f(x) = \cos(\frac{2}{3}t)$
d. $f(t) = \operatorname{sen}(3t)$ **e.** $f(t) = 2\cos(t + \frac{\pi}{3})$ **f.** $f(t) = \operatorname{sen}(2t) - 1$

18. $f(t) = 2\operatorname{sen} t$ y $g(t) = \operatorname{sen}(2t)$, ¿son la misma función? ¿Por qué?

Ecuaciones trigonométricas

En este capítulo ya se han planteado y resuelto algunas ecuaciones trigonométricas. Por ejemplo, al buscar los ceros de una función fue necesario plantear una condición sobre la función, que se tradujo en plantear una ecuación.

En esta parte del capítulo trataremos las ecuaciones trigonométricas con mayor detalle.

Problema 19

Dada la función $f(x) = \text{sen}(x + \frac{\pi}{2})$. ¿Cuáles son los valores de x entre 0 y 2π que cumplen que $f(x) = \frac{1}{2}$?

Hallar estos valores implica plantear la ecuación:

$$\text{sen}\,(x + \tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{1}{2}$$

Para resolver esta ecuación es necesario, en principio, hallar los valores de la variable t que cumplen $\text{sen}\ t = \frac{1}{2}$.

Por lo analizado anteriormente $\text{sen}\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ y también $\text{sen}\ \frac{5}{6}\pi = \text{sen}\,(\pi - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

Se tiene entonces que:

$$x + \tfrac{\pi}{2} = \tfrac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{\pi}{6} - \tfrac{\pi}{2} = -\tfrac{\pi}{3}$$

$$x + \tfrac{\pi}{2} = \tfrac{5}{6}\pi \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{5}{6}\pi - \tfrac{\pi}{2} = \tfrac{\pi}{3}$$

Pero no todos los valores hallados se encuentran entre 0 y 2π como pedía el problema.

Es necesario encontrar los valores entre 0 y 2π que verifiquen la ecuación.

Como la función $f(x)$ tiene un período de 2π, los valores de $f(x)$ se repiten cada vez que a x se le suma un período, o dos períodos o números enteros de períodos.

Por lo tanto si a $x = -\frac{\pi}{3}$ y a $x = \frac{\pi}{3}$ se le suman $2\pi k$ donde k es un número entero, resulta que $f(x)$ sigue valiendo $\frac{1}{2}$.

Esto significa que, hay infinitos valores que verifican la ecuación pedida, ellos son:

$$x = -\tfrac{\pi}{3} + 2\pi k \ \text{ y } \ x = \tfrac{\pi}{3} + 2\pi k \ \text{ con } \ k \in \mathbb{Z}$$

Como x debe verificar, además que $0 \leq x \leq 2\pi$:

si $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow$

$$0 \leq -\tfrac{\pi}{3} + 2\pi k \leq 2\pi \iff \tfrac{\pi}{3} \leq 2\pi k \leq 2\pi + \tfrac{\pi}{3} \iff \tfrac{1}{6} \leq k \leq \tfrac{7}{6}$$

y dado que $k \in \mathbb{Z}$ debe ser $k = 1$. Luego $x = \frac{5}{3}\pi$.

Si $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow$

$$0 \leq \tfrac{\pi}{3} + 2\pi k \leq 2\pi \iff -\tfrac{\pi}{3} \leq 2\pi k \leq 2\pi - \tfrac{\pi}{3} \iff -\tfrac{1}{6} \leq k \leq \tfrac{5}{6}$$

y dado que $k \in \mathbb{Z}$ debe ser $k = 0$. Luego $x = \frac{\pi}{3}$.

Las soluciones de la ecuación que están entre 0 y 2π son entonces $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{5}{3}\pi$.

Problema 20

Hallar los valores de x que pertenezcan al intervalo $[-\pi\,;\,3\pi]$ y que cumplan $\cos(2x) = 0{,}4$.

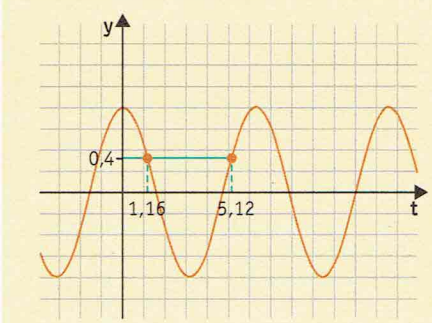
Para resolver algunas ecuaciones trigonométricas es posible apoyarse en los valores conocidos de $\cos t$ y $\text{sen}\ t$ y realizar una sustitución de la variable como en el ejemplo que figura en el problema 19 donde se sustituyó $x + \frac{\pi}{2}$ por t.

$\text{sen}\ t = \text{sen}\,(\pi - t)$
$\cos t = -\cos(\pi - t)$
$\text{sen}\ t = -\text{sen}\,(2\pi - t)$
$\cos t = \cos(2\pi - t)$

Si se sustituye $2x$ por t, es necesario resolver la ecuación $\cos t = 0{,}4$.

Con ayuda de la calculadora, puesta en modo RAD, puede deducirse que un valor posible de t es $1{,}15927948 \approx 1{,}16$. Este valor de t pertenece al primer cuadrante. Por lo analizado anteriormente, existe otro ángulo en el cuarto cuadrante que también tiene coseno 0,4; éste se calcula resolviendo $t = 2\pi - 1{,}16 \approx 5{,}12$.

Si se tiene el gráfico de $f(t) = \cos t$, se buscan los valores de t entre 0 y 2π cuya imagen de la función sea 0,4.



Luego:

$$t \approx 1{,}16 \Rightarrow 2x \approx 1{,}16 \Rightarrow x \approx 0{,}58$$
$$t \approx 5{,}12 \Rightarrow 2x \approx 5{,}12 \Rightarrow x \approx 2{,}56$$

Pero éstas no son las únicas soluciones de la ecuación dado que al ser $f(x) = \cos(2x)$ una función periódica, cuando se le suman períodos a los valores de x, se obtienen los mismos resultados para y.

El período de $f(x) = \cos(2x)$ es π, con lo cual todas las soluciones de la ecuación son:

$$x = 0{,}58 + k\pi \quad \text{o} \quad x = 2{,}56 + k\pi \quad \text{donde } k \in \mathbb{Z}.$$

Para encontrar los valores de x que están entre $-\pi$ y 3π se puede resolver:

$x = 0{,}58 + k\pi$ y $-\pi \le x \le 3\pi$	$x = 2{,}56 + k\pi$ y $-\pi \le x \le 3\pi$
$-\pi \le 0{,}58 + k\pi \le 3\pi$	$-\pi \le 2{,}56 + k\pi \le 3\pi$
$-3{,}14 - 0{,}58 \le k\pi \le 3\pi - 0{,}58$	$-3{,}14 - 2{,}56 \le k\pi \le 3\pi - 2{,}56$
$-3{,}72 : \pi \le k \le 8{,}84 : \pi$	$-5{,}7 : \pi \le k \le 6{,}86 : \pi$
$-1{,}18 \le k \le 2{,}81$	$-1{,}81 \le k \le 2{,}18$
$k = -1$ o $k = k = 0$ o $k = 1$ o $k = 2$	$k = -1$ o $k = 0$ o $k = 1$ o $k = 2$
$x = -2{,}56$ o $x = 0{,}58$ o $x = 3{,}72$ o $x = 6{,}86$	$x = -0{,}58$ o $x = 2{,}56$ o $x = 5{,}7$ o $x = 8{,}84$

El conjunto solución pedido es $S = \{-2{,}56; -0{,}58; 0{,}58; 2{,}56; 3{,}72; 5{,}7; 6{,}86; 8{,}84\}$

ACTIVIDADES

19. ¿Para qué valores de x la función $f(x) = \operatorname{sen} x + 5$ alcanza su máximo valor?

20. Encuentren los ceros de la función $g(x) = \operatorname{sen} x + 3$

21. ¿Para qué valores de la variable la función $g(x) = \cos(3x)$ alcanza su mínimo valor?

22. ¿Cuáles son los ceros de la función $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$?

23. ¿Para qué valores de x la función $g(x) = \cos(x + 5)$ alcanza su mínimo valor? ¿Cuál es ese valor mínimo?

24. Indiquen cinco valores difrentes de x que cumplan que $h(x) = 3\operatorname{sen}(2x + \pi) - \frac{1}{2} = 2$.

25. A. Calculen los posibles valores de x sabiendo que x está comprendido entre 0 y 2π y que se verifican las ecuaciones:

a. $\operatorname{sen}(2x) = -0{,}951$ **b.** $2\operatorname{sen} x = -0{,}951$

c. $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 0{,}85$ **d.** $\cos x + 0{,}5 = 0{,}85$

B. Para las ecuaciones anteriores, calculen los valores de x comprendidos entre -2π y $-\pi$ que las cumplan.

© Ruth Fresca editores S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

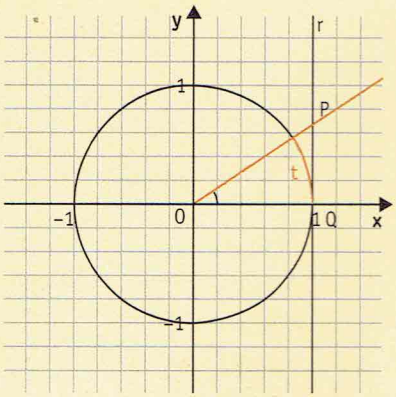
Tangente de un ángulo

Además de las relaciones analizadas entre los lados de un triángulo rectángulo existe otra que es el cociente entre el cateto opuesto de un ángulo y su cateto adyacente. Esta relación se llama **tangente** del ángulo.

Problema 21

¿Cómo se representa la tangente en la circunferencia trigonométrica?

Para analizar qué representa la tangente es necesario tener en cuenta la recta $x = 1$ que se llamará r y es tangente a la circunferencia.

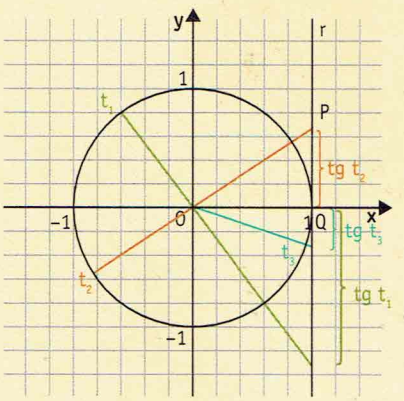


En la circunferencia trigonométrica, al tomar un ángulo t, en el primer cuadrante, queda determinado por la prolongación de la semirrecta que forma a t sobre la recta r, un triángulo rectángulo OPQ

$$\text{tg } t = \frac{\text{cat. op. a } t}{\text{cat. ady. a } t} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}$$

Pero $\overline{OQ} = 1$, por lo tanto resulta

$$\text{tg } t = \overline{PQ}.$$



Si el ángulo está en otro de los cuadrantes, se considera la prolongación del lado correspondiente al ángulo y la medida del segmento que resulta entre el punto donde corta esa prolongación a la recta r y el eje x. Este segmento es la tangente del ángulo.

Puede observarse en el gráfico que en el primer y el tercer cuadrante la tangente será positiva y en los otros cuadrantes, negativa.

Problema 22

La relación $\text{tg } x = \frac{sen\ x}{cos\ x}$, ¿será cierta para cualquier valor de x?

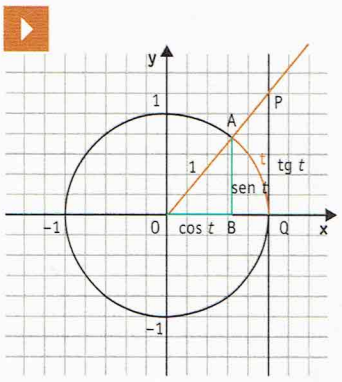
Si se sigue un razonamiento análogo al del problema anterior, se observa que la relación es cierta para cualquier ángulo. Por lo tanto, la igualdad parece verificarse siempre.

Pero *¿qué sucede si* $x = \frac{\pi}{2}$ *?*

Si $x = \frac{\pi}{2}$ resulta que $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ y como no es posible dividir por 0, $\frac{sen\ x}{cos\ x}$ *no existe*. Entonces, la relación anterior es válida siempre que exista la tangente del ángulo, es decir, para aquellos

En un triángulo rectángulo, para todo ángulo agudo x se define:

$$tg\ x = \frac{cateto\ opuesto\ a\ x}{cateto\ adyacente\ a\ x}$$



Los triángulos OAB y OPQ son semejantes, por lo tanto

$$\frac{\text{tg } t}{1} = \frac{\text{sen } t}{\cos t}$$

valores de x cuyo coseno no valga cero.

Si se analiza la circunferencia trigonométrica se obtiene que cuando el ángulo es de $\frac{\pi}{2}$, el lado de ese ángulo es paralelo a la recta tangente y por tal motivo no interseca a la recta $x = 1$, entonces no existe el valor de la tangente de $\frac{\pi}{2}$.

Función tangente

Así como a cada ángulo es posible asignarle su seno o su coseno, también es posible asignarle su tangente (aunque con restricciones) obteniendo la **función tangente**.

Problema 23

Dada la función $f(x) = \text{tg } x$, determinar:

a. El dominio de $f(x)$.

b. Las asíntotas verticales de $f(x)$.

c. Los ceros de $f(x)$.

d. Los intervalos de positividad y de negatividad de $f(x)$.

e. El gráfico de $f(x)$.

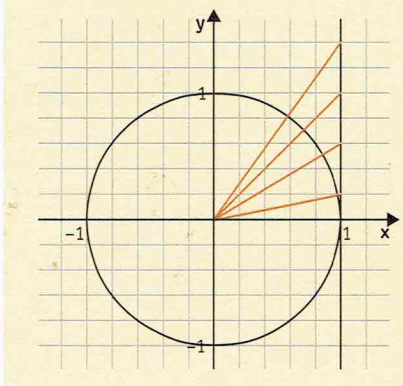
Si se considera a $\text{tg } x = \frac{sen\ x}{cos\ x}$ resulta que es posible definir esta función para todos aquellos valores de x salvo los valores que anulan al cos x pues no es posible dividir por 0. Las soluciones de la ecuación $\cos x = 0$ son los valores de x de la forma

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ o } x = \frac{3}{2}\pi + 2\pi h \text{ con } k \text{ y } h \text{ números enteros.}$$

De este modo $f(x) = \text{tg } x$ está definida para todos los números reales salvo los valores que son ceros de cos x. Luego

$$Dom\ (f) = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + 2\pi k\ ;\ \frac{3}{2}\pi + 2\pi h\ /k \in \mathbb{Z}, h \in \mathbb{Z}\}$$

Un análisis en la circunferencia trigonométrica permite observar que, a medida que el valor x se acerca al valor $\frac{\pi}{2}$, el valor de la tangente se hace cada vez más grande. En realidad, lo que sucede es que $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \infty$



Si para una función f se tiene un valor a para el cual $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical. Gráficamente, cuando x toma valores cercanos a a, el gráfico de la función se "acerca" a la recta $x = a$ sin tocarla nunca.

Por lo tanto, la recta $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2}}$ es una **asíntota vertical** de la función. Y esto sucede cada vez que x toma el valor $\frac{\pi}{2}$ más una cierta cantidad de vueltas enteras. Es decir, que para cada x de la forma $x = \frac{\pi}{2} + 2\ \pi k$, donde k es un número entero, resulta que la función $f(x) = \text{tg } x$ tiene una asíntota vertical con ecuación $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Como tg x tampoco está definida para los x de la forma $x = \frac{3}{2}\ \pi + 2\pi h$, con h un número entero, haciendo un análisis similar al anterior resulta que la función también tiene asíntotas verticales con ecuación $x = \frac{3}{2}\ \pi + 2\pi\ h$ para cada $h \in \mathbb{Z}$.

Para hallar los ceros de $f(x)$ es necesario resolver la ecuación $\operatorname{tg} x = 0$

$$\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \frac{sen\ x}{cos\ x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sen} x = 0$$

Por lo tanto, las funciones $g(x) = \operatorname{sen} x$ y $f(x) = \operatorname{tg} x$ tienen los mismos ceros. Luego:

$$C^0 = \{\pi k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$$

Como $\operatorname{tg} x = \frac{sen\ x}{cos\ x}$, la tangente de un ángulo es positiva si, el seno y el coseno tienen el mismo signo, es decir si x se encuentra en el primer o en el tercer cuadrante y es negativa si el seno y el coseno tienen distinto signo, es decir si x se encuentra en el segundo o en el cuarto cuadrante.

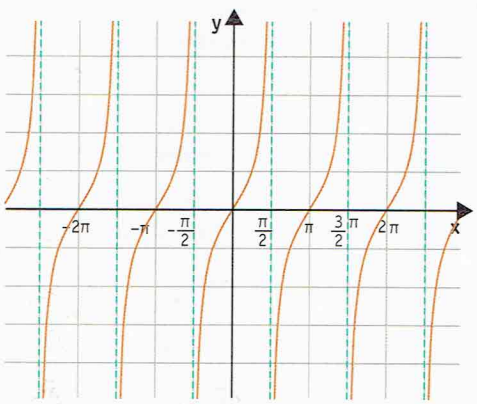
Por lo tanto, resulta que $\operatorname{tg} x$ es positiva para los valores de x en los intervalos

$$(0 + 2\pi k\ ;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k) \quad , \quad (\pi + 2\pi k\ ;\ \frac{3}{2}\pi + 2\pi k) \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

y es negativa para los valores de x en los intervalos

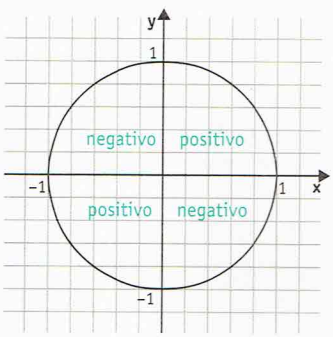
$$(\frac{\pi}{2} + 2\pi h\ ;\ \pi + 2\pi h) \quad , \quad (\frac{3}{2}\pi + 2\pi h\ ;\ 2\pi + 2\pi h) \text{ con } h \in \mathbb{Z}$$

Con toda la información que se tiene hasta el momento es posible realizar un grafico de tangente de x.



Como puede verse en el gráfico, la tangente de un ángulo comienza a repetirse cada π, por lo tanto su **período es** π. Además Im $(f) = \mathbb{R}$

El signo de la tangente puede determinarse en función de los signos del seno y del coseno. Como en el primer cuadrante el seno y coseno son positivos, la tangente también lo será. En el tercer cuadrante, el seno y el coseno son negativos, luego el cociente será positivo, es decir la tangente será positiva.
En cambio, en el segundo y el cuarto cuadrante, como el seno y el coseno son de signos opuestos, la tangente será negativa.



26. Para valores de x entre 0 y 2π, con $\operatorname{tg} x = 0{,}3$. Calculen $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

27. Encuentren los ángulos donde $\operatorname{tg} x = -1$.

28. Si $\operatorname{sen} x = 0{,}6$, calculen $\cos x$ y $\operatorname{tg} x$, para x entre 0 y 2π.

29. ¿Qué otro ángulo dentro de la circunferencia trigonométrica, además de $\frac{\pi}{2}$, resulta tener un lado paralelo a la recta tangente? Para ese valor, ¿cuál es su coseno?

30. La tangente de un ángulo es igual a 1,4825, ¿cuánto mide ese ángulo si se sabe que se encuentra en el tercer cuadrante?

31. Sabiendo que $\operatorname{sen} x = 0{,}36$ y además $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$. Sin utilizar calculadora calculen:

a. $\operatorname{tg} x$ **b.** $\cos(2\pi - x)$ **c.** $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)$

32. ¿Entre qué valores se encontrará la tangente de un ángulo?

33. Calculen dominio, ceros, conjunto de positividad y negatividad, período, amplitud y gráfico aproximado de las siguientes funciones:

a. $h(x) = -\operatorname{sen}(x - \pi)$ **b.** $t(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

34. Al observar las gráficas del ejercicio anterior, ¿qué conclusiones pueden sacar? ¿por qué?

35. Calculen dominio, ceros, conjunto de positividad y negatividad, período y gráfico aproximado de las siguientes funciones:

a. $m(x) = 2 \operatorname{tg} x$ **b.** $n(x) = \operatorname{tg}(2x)$ **c.** $s(x) = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2})$

d. $r(x) = \operatorname{tg} x + 1$ **e.** $t(x) = \operatorname{tg}(2x + \pi)$ **f.** $m(x) = -3 \operatorname{tg} x$

Funciones secante, cosecante y cotangente

Así como la función tangente se puede definir utilizando el seno y el coseno, existen otras funciones que se definen a partir de seno y coseno. Ellas son secante, cosecante y cotangente:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$
$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$
$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Problema 24

Determinar el dominio, las asíntotas verticales, los ceros, los intervalos de positividad y de negatividad y el gráfico de $g(x) = cosec\ x$.

Como $cosec\ x = \frac{1}{sen\ x}$, esta función está definida para todos los valores de x salvo aquellos valores donde sen x resulte ser igual a 0 pues no es posible dividir por 0.

Entonces, el dominio de $g(x)$ es:

$$Dom\ (g) = \mathbb{R} - \{\pi k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$$

De hecho, en estos valores, la función tendrá asíntotas verticales.

Para hallar los ceros de $g(x)$

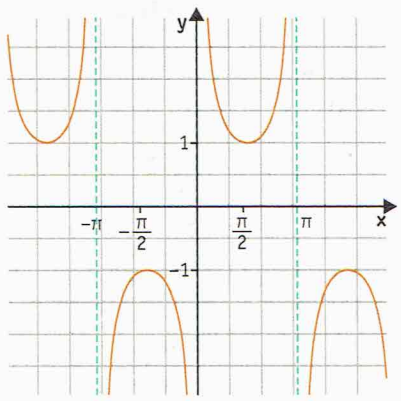
$$\operatorname{cosec} x = 0 \iff \frac{1}{\operatorname{sen} x} = 0$$

pero este cociente nunca vale 0, ya que para que una fracción sea cero, debe serlo su numerador. Por lo tanto, la función $g(x) = cosec\ x$ no tiene ceros.

$g(x) = \operatorname{cosec} x$ es positiva si $\frac{1}{sen\ x}$ es positivo y esto sucede solamente cuando sen x es positivo. De la misma manera cosec x resulta ser negativa si sen x resulta ser negativo.

Por tal motivo, los intervalos de positividad y de negatividad de cosec x son los mismos intervalos de positividad y de negatividad de la función sen x.

El gráfico de $g(x)$ es entonces:



ACTIVIDADES

36. ¿Cuál es el dominio de $h(x) = \sec x$ y de $t(x) = \operatorname{cotg} x$? ¿Tienen ceros? ¿Cuándo son positivas y cuándo negativas?

37. Realicen las graficas de las funciones $h(x) = \sec x$ y $t(x) = \operatorname{cotg} x$.

38. A. Para qué valores de x entre 0 y 2π resulta:

a. $\operatorname{cotg} x = 0$ **b.** $\sec x = 2$ **c.** $\sec x = 0$

d. $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{2}$ **e.** $\operatorname{cotg} x = -1$

B. ¿Cuáles son los valores de x entre -5π y 3π que verifican las ecuaciones anteriores?

Identidades trigonométricas

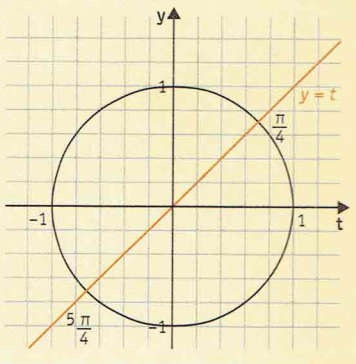
Hay igualdades que resultan ser verdaderas solo para algunos valores de la variable, otras son verdaderas para todos los valores de la variable. En ese caso se dice que las expresiones son equivalentes.

Problema 25

¿Para qué valores de t se cumple sen $t = \cos t$?

Los ángulos t que verifican que sen $t = \cos t$, son aquellos que determinan en la circunferencia trigonométrica triángulos rectángulos isósceles.

Los ángulos entre 0 y 2π que verifican esta condición son: $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{5}{4}\pi$.



Puede observarse en el gráfico que $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{5}{4}\pi$ son los únicos puntos de la circunferencia que están sobre la recta $y = t$. Es decir, todos los valores t de la forma $t = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $t = \frac{5}{4}\pi + 2\pi h$ con $h \in \mathbb{Z}$ verifican: sen $t = \cos t$

La igualdad sen $t = \cos t$ se verifica solo para algunos valores de t.

Problema 27

¿Para qué valores de x se cumple $\text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$?

En este caso resulta más difícil hallar los valores de x para los que la igualdad es verdadera.

Como $\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$ para todos los valores de x pertenecientes al dominio de la función tangente de x, si se eleva al cuadrado ambos miembros, se obtiene:

$$tg^2 x = \frac{sen^2 x}{cos^2 x}$$

Por la identidad pitagórica $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ luego

$\text{tg}^2 x = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}$	Se reemplaza $\text{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$ en la igualdad anterior.
$\text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$	Se distribuye.

Por lo tanto esta igualdad se cumple para todos los valores de x pertenecientes al dominio de tangente de x.

Este tipo de igualdades que valen en todo su dominio se llaman identidades trigonométricas.

La identidad pitagórica dice que para todo ángulo t se verifica que:

$$\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN

39. Encuentren, en cada caso, todos los ángulos que verifican las igualdades:

a. $\text{tg}\, x = 1$ **b.** $\text{sen}\, x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ **c.** $\text{sen}\, x = 0{,}5$

40. ¿Será cierto que $\text{sen}\, x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ para cualquier valor de x?

41. Encuentren los ángulos entre -2π y 3π donde

a. $\cos x = -0{,}3$ **b.** $\text{sen}\, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c.** $\text{sen}\, x = 0{,}65$

d. $\cos x = \frac{3}{2}$ **e.** $\text{tg}\, x = 5$ **f.** $\text{sen}\, x - \text{cosec}\, x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

42. Para los valores de x en el intervalo $[0, 2\pi]$ encuentren, de ser posible, aquellos que cumplan:

a. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\text{sen}\, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b.** $\text{sen}\, x = -1$ y $\cos x = 1$

c. $\text{tg}\, x = 1$ y $\text{sen}\, x = -\frac{1}{2}$ **d.** $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$ y $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e. $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$ y $\cos x = 3$ **f.** $\text{tg}\, x = -1$ y $\cos x = 0$

43. Sabiendo que x se encuentra entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ y además $\cos x = 0{,}5$ calculen $\text{sen}\, x$ y $\text{tg}\, x$.

44. Encuentren los ceros de $f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$

45. Encuentren el período y el gráfico de la función $f(x) = \text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

46. ¿Para qué valores de x la función $g(x) = \cos\left(x + \frac{1}{2}\right) - 1$ alcanza su máximo valor?

47. ¿Para qué valores de la variable la función $h(x) = \frac{1}{3}\,\text{sen}\, x$ alcanza su mínimo valor?

48. ¿Existe alguna relación entre $\text{sen}\, t$ y $\text{sen}\,(-t)$ para cualquier valor de t? ¿Cuál es esa relación?

49. ¿Será cierto que $\cos(x + y) = \cos x + \cos y$, para cualquier valor de x y de y? Justifiquen su respuesta.

50. Sabiendo que $\text{sen}\, x = 0{,}857$ y que $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, calculen $\cos x$, $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Con la calculadora, encuentren el valor de x.

51. ¿Será cierto que $\cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ para cualquier valor de x?

52. Sabiendo que $\text{tg}\, x = 4$ y que $0 \le x \le \pi$, calculen sin utilizar la calculadora.

i. $\text{sen}\, x$ **ii.** $\cos x$ **iii.** $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ **iv.** $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

53. Calculen los posibles valores de x sabiendo que x está comprendido entre 0 y 2π.

a. $3 + \text{sen}\left(\frac{1}{5}x\right) = 3{,}51$ **b.** $\frac{2}{9}\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{10}$

c. $\cos x - 5 = -\frac{27}{5}$ **d.** $\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = -10$

54. Para las mismas ecuaciones que en el problema anterior calculen los valores que cumplen la igualdad para valores de x entre π y 3π.

55. Si el $\cos(3x) = 0{,}068$, utilizando calculadora y sabiendo que $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

a. Calculen los posibles valores de x. **b.** Calculen el $\cos x$.

56. Sabiendo que $-\pi \le x \le \pi$

a. Si $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0{,}78$, calculen el valor de x.

b. Si $\text{sen}\left(-\frac{2}{3}\pi + x\right) = 1$, ¿cuánto vale x? ¿Por qué?

c. Si $\text{sen}\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + \text{sen}\, x = 1$, ¿cuánto vale x?

57. Encuentren los ceros, la amplitud, el período, el dominio, la imagen y grafiquen las siguientes funciones.

a. $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{4}x\right)$ **b.** $f(x) = -\frac{1}{4}\cos x$

c. $f(x) = 3\,\text{sen}\, x$ **d.** $f(x) = \frac{1}{3}\cos(\pi x)$

e. $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{4} + x\right) - 1$ **f.** $f(x) = 4\cos x$

g. $f(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ **h.** $f(x) = \cos(\pi x) + \frac{2}{3}$

58. a. ¿Será cierto que $\text{tg}\, x = \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ para cualquier valor de x?

b. ¿Será cierto que $\text{tg}\,(-x) = -\text{tg}\, x$ para cualquier valor de x?

59. Calculen los posibles valores de x sabiendo que x está comprendido entre 0 y 2π.

i. $\text{tg}\, x + 45 = 137$ **ii.** $\frac{\text{sen}\,(3x)}{4} = 0{,}215$

iii. $3\,\text{tg}\, x = 38$ **iv.** $3\,\text{sen}\, x = 9$

60. Para las mismas ecuaciones que las del problema anterior calculen los valores de x comprendidos entre -2π y $-\pi$ que cumplen las igualdades.

61. Encuentren gráficamente los valores de x entre $-\pi$ y 2π donde resultan $\cos(2x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

62. Verifiquen si las siguientes igualdades son identidades trigonométricas.

a. $1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$ **b.** $1 + \cos^2 x = \text{cosec}^2 x$

c. $\frac{\text{tg}^2 x}{\text{sen}^2 x} = \sec^2 x$ **d.** $\frac{1 + \sec^2 x \cdot \text{sen}^2 x}{\sec^2 x \cdot \text{sen}^2 x} = \text{cosec}^2 x$

e. $\frac{1}{\sec x} = \frac{\text{sen}\, x}{\text{tg}\, x}$ **f.** $\text{cosec}^2 x - \text{cotg}^2 x = 1$

g. $\text{sen}\, x = \cos(2\pi - x)$ **h.** $\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$

i. $(1 - \cos x)(1 + \cos x) = \text{sen}^2 x$

AUTOEVALUACIÓN

Marquen la o las opciones correctas en cada caso.

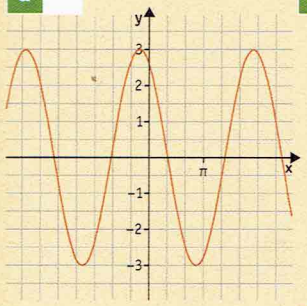
1. Los ceros de la función $f(x) = \cos(2x - \pi)$ que se encuentran entre 0 y 2π son

a $\frac{3}{4}\pi$ **b** $\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$

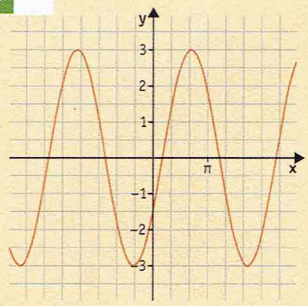
c $\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$ **d** $\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

2. El gráfico de la función $g(x) = -3 \cdot \text{sen}(x - \frac{2}{3}\pi)$ es

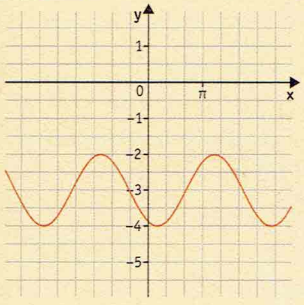
a



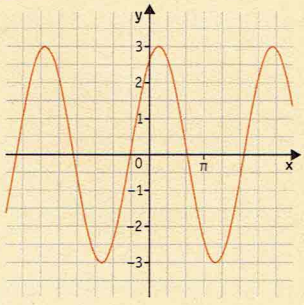
b



c



d



3. La igualdad $\sec x = \text{tg}\, x$ tiene solución si:

a $x = -\frac{\pi}{2}$ **b** $x = \frac{\pi}{2}$

c Para ningún valor de x. **d** x es de la forma $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

4. Si x está comprendido entre $\frac{3}{2}\pi$ y 2π y:

A. $3 \cdot \text{sen}\, x = 4{,}5$

a $x \approx 0{,}9974$ **b** No existe valor de x.

c $x \approx 1{,}5$ **d** $x \approx -0{,}9974$

B. $\text{tg}\, x - 3 = -\frac{43}{5}$

a No existe valor de x. **b** $x \approx 1{,}745$

c $x \approx -1{,}394$ **d** $x \approx 4{,}88$

5. El máximo valor de la función $g(x) = 3 - \text{sen}\, x$ es

a 1 **b** 4

c π **d** 2

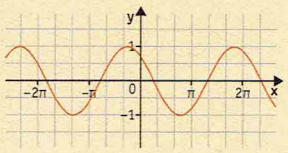
6. La función $g(x) = \text{sen}\, 3x$ tiene, en el intervalo $[-\pi; \pi]$, exactamente

a Ningún cero. **b** 3 ceros.

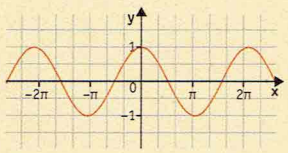
c Infinitos ceros. **d** 7 ceros.

7. Observen los siguientes gráficos e indiquen la respuesta correcta.

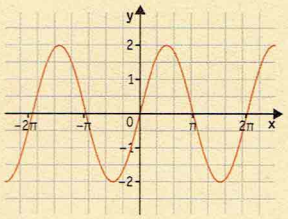
a.



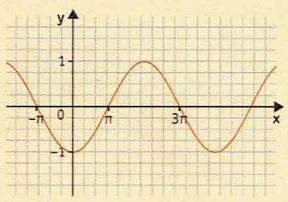
b.



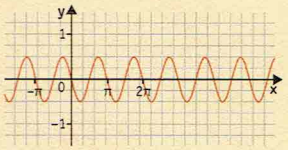
c.



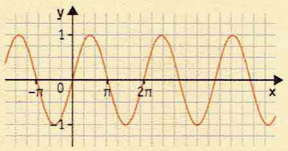
d.



e.



f.



A. El gráfico de $f(x) = \cos x$ es:

a **b** **c** **d** **e**

f **g** Ninguno de los anteriores

B. El gráfico de $f(x) = -\cos(\frac{x}{2})$ es:

a **b** **c** **d** **e**

f **g** Ninguno de los anteriores

C. El gráfico de $f(x) = \text{sen}\, x$ es:

a **b** **c** **d** **e**

f **g** Ninguno de los anteriores

D. El gráfico de $f(x) = 2\text{sen}\, x$ es:

a **b** **c** **d** **e**

f **g** Ninguno de los anteriores

E. El gráfico de $f(x) = -\frac{\text{sen}\,(2x)}{2}$ es:

a **b** **c** **d** **e**

f **g** Ninguno de los anteriores

CONTENIDOS

- Probabilidad de un suceso
- Sucesos independientes
- Probabilidad condicional
- Relaciones entre estadística y probabilidad
- Análisis de la frecuencia relativa
- Combinatoria, variaciones sin repetición, variaciones con repetición
- Problemas de combinatoria y probabilidad

Hay numerosas situaciones en las cuáles la posibilidad de que ocurra un hecho determinado parece ser bastante azarosa y frecuentemente, se genera una gran incertidumbre. Son situaciones en las cuáles se puede producir uno de los diferentes resultados posibles. Por ejemplo, ¿qué número va a salir en la quiniela? ¿Cuántas chances se tienen de ganar en la ruleta? ¿Ganaré o no ganaré el sorteo? ¿Qué candidato ganará la elección?, etcétera.
La dificultad para quien debe intentar resolver problemas de esta naturaleza se relaciona con poder organizar y tratar los datos disponibles, usarlos para poder predecir lo que ocurrirá, con confianza en la predicción.

4 PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

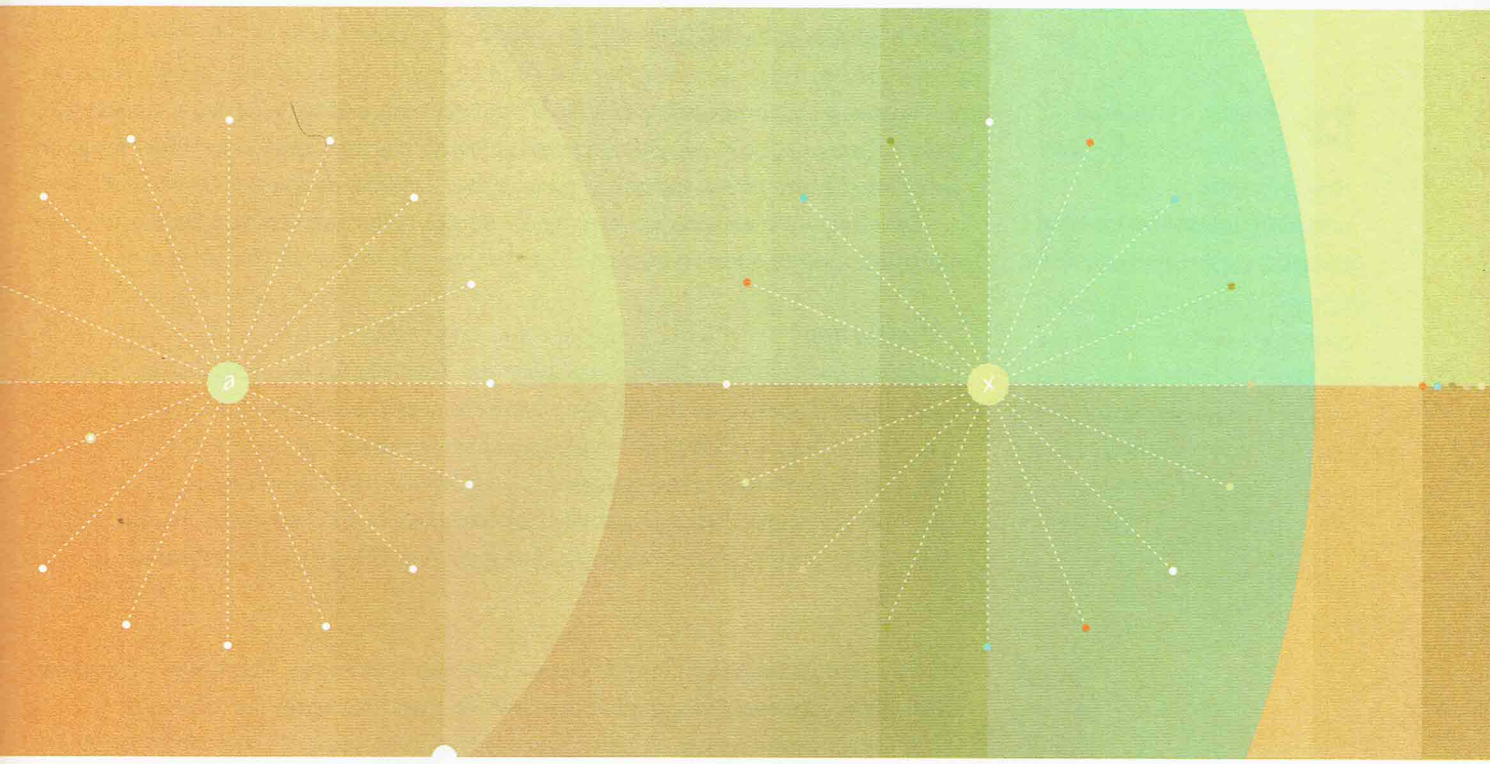
Problema 1

Gastón tiene en su biblioteca 15 libros de ciencia ficción, 10 libros de historia argentina y 5 libros de cuentos. Jimena sacó un libro cualquiera de la biblioteca y Gastón, sin mirar dijo que el libro era de historia argentina. ¿Es posible que Gastón acierte?

Para comenzar a responder el problema no hay que perder de vista que la experiencia de sacar un libro cualquiera de la biblioteca tiene un resultado que depende del **azar**. Por tal motivo no hay una respuesta absoluta para este tipo de problemas.

El experimento que debe realizar Jimena consiste en sacar un libro de la biblioteca de Gastón. Los resultados posibles de este experimento son todos los libros de la biblioteca. El conjunto formado por todos ellos se denomina *espacio muestral* del experimento.

En principio, cada libro tiene la misma probabilidad de ser elegido. En total, Gastón tiene 30 libros de los cuales 15 son de ciencia ficción. Se podría suponer, entonces, que es más probable que Jimena elija un libro de ciencia ficción porque "hay más".



Esto se podría traducir en que 15 libros de los 30 que hay son de ciencia ficción, es decir, la mitad de los libros de la biblioteca son de ciencia ficción pues:

$$\frac{\text{cantidad de libros de ciencia ficción}}{\text{cantidad total de libros}} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

En cambio como hay 10 libros de historia sobre un total de 30 libros, la relación entre los libros de historia y el total de libros es:

$$\frac{\text{cantidad de libros de historia argentina}}{\text{cantidad total de libros}} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$$

Y la relación con los libros de cuentos es:

$$\frac{\text{cantidad de libros de cuentos}}{\text{cantidad total de libros}} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots$$

Puede concluirse además que el 50% son de ciencia ficción, el 33,333...% son de historia argentina y el 16,666...% son cuentos, con lo cual es mayor la probabilidad de sacar un libro de ciencia ficción que uno de historia o uno de cuentos. Sin embargo esto no significa que Jimena no haya retirado un libro de cuentos.

Si Gastón hubiese tenido todos los libros de historia argentina, sin dudas hubiera acertado, ya que de esta manera el 100 % serían de la misma temática. Es decir, en ese caso, la probabilidad de acertar hubiera sido 1.

Si Gastón hubiese dicho que el libro que sacó Jimena es de aventuras hubiese perdido pues no hay ningún libro de aventuras en su biblioteca. Es decir, la probabilidad de sacar un libro de aventuras es igual a 0.

Un **experimento** es un proceso que se puede observar y que puede repetirse. El tipo de experiencias, en las que no se puede saber de antemano cuál será el resultado, se llama **experimento aleatorio**.

El conjunto de todos los resultados posibles del experimento se llama **espacio muestral**.

Sucesos aleatorios

Se denomina **suceso** a cualquier subconjunto del espacio muestral.
Los sucesos se nombran con letras mayúsculas, por ejemplo A, B, C, etc.

Muchas veces es necesario analizar un conjunto de los resultados posibles, por ejemplo, que al lanzar un dado el número que salga sea par. En ese caso se dice simplemente que se desea estudiar un **suceso**, que es una parte de los resultados posibles.

Por ejemplo en el problema anterior, un suceso podría ser sacar un libro de historia argentina o uno de cuentos.

Problema 2

Cecilia y Marcia están jugando con una moneda. Cecilia la tira dos veces al aire y Marcia debe acertar qué sale en cada tirada. Marcia dice que la primera vez sale cara.

a. ¿Cuál es la probabilidad que salga cara la primera vez?
b. ¿Cuál es la probabilidad que salga cara en el segundo lanzamiento?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara o ceca en la primera tirada?
d. ¿Cuál es la probabilidad de que no salga ni cara ni ceca en la segunda tirada?

Para analizar la probabilidad de que salga cara la primera vez, es necesario establecer primero todos los resultados posibles, es decir, el espacio muestral.

El experimento consiste en tirar una moneda dos veces al aire, los posibles resultados entonces son:

Primera tirada	Segunda tirada
Cara	Cara
Cara	Ceca
Ceca	Cara
Ceca	Ceca

Para organizar mejor la información se puede hacer un diagrama de árbol como el siguiente.

Se llaman **sucesos elementales** a cada uno de los elementos del espacio muestral.

De este modo el espacio muestral para el experimento de arrojar dos veces una moneda está compuesto por 4 elementos o 4 **sucesos elementales**.

Un espacio muestral es **equiprobable** si los sucesos elementales tienen igual probabilidad de ocurrir.
En ese caso, la probabilidad de que ocurra cada uno de los sucesos es:
$p = \frac{1}{\text{cantidad de sucesos elementales}}$

La suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales es siempre igual a 1.

Cada uno de estos resultados tiene la misma probabilidad de ocurrir. La probabilidad de cada uno de ellos es $\frac{1}{4}$. Se dice que el espacio muestral es equiprobable.

Si se utiliza c = cara y s = ceca y se llama S al espacio muestral se obtiene

$$S = \{(c\,;\,c)\,;\,(c\,;\,s)\,;\,(s\,;\,c)\,;\,(s\,;\,s)\}$$

De todos estos resultados posibles, solo interesan, para el problema, aquellos donde sale cara la primera vez.

Se puede llamar A al suceso "sale cara la primera vez" con lo cual $A = \{(c\,;\,c)\,;\,(c\,;\,s)\}$

Como A tiene 2 elementos se dice que los casos favorables al suceso son 2.

Por lo tanto, la probabilidad de que salga cara la primera vez, p(A), es 2 casos favorables sobre 4 casos posibles, es decir: $p(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Otra forma de pensar el problema puede ser la siguiente: en el espacio muestral S hay 4 sucesos elementales. Si sucede alguno de estos sucesos elementales no hay posibilidad de que suceda alguno de los otros pues, si sale primero cara y luego ceca, *ya no es posible* que salga primero cara y luego cara. Se dice, entonces, que estos sucesos son **sucesos mutuamente excluyentes.**

La probabilidad del suceso A: "sale cara la primera vez" puede considerarse igual a la suma de la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales que lo componen que son cara-cara y cara-ceca. Es decir,

$$p(A) = p(\{(c\,;\,c)\}) + p(\{(c\,;\,s)\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Para contestar la segunda pregunta es necesario establecer un nuevo suceso:

B = "sale cara en el segundo lanzamiento"

Para este suceso los casos favorables son los pares $(c\,;\,c)$ y $(s\,;\,c)$, es decir, cara la primera vez y cara la segunda vez o, ceca la primera vez y cara la segunda vez.

$$p(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

O bien

$$p(B) = p(\{(c\,;\,c)\}) + p(\{(s\,;\,c)\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Es interesante señalar que en el caso del suceso A: "sale cara la primera vez" no era importante analizar qué sale la segunda vez. Sucede lo mismo con el suceso B.

Si se define el suceso C: "sale cara o ceca en la primera tirada", entonces C = S, pues es seguro que sale cara o ceca, el suceso C se llama suceso seguro y se tiene que:

$$p(C) = \frac{4}{4} = 1$$

Si se denomina D al suceso "que no salga cara ni ceca en la segunda tirada", D no tiene elementos, dado que es imposible que no salga cara ni ceca. D se llama suceso imposible y

$$p(D) = \frac{0}{4} = 0$$

Dos sucesos son **mutuamente excluyentes** cuando la posibilidad de que ocurra uno excluye la ocurrencia del otro. La probabilidad de que ocurra una serie de sucesos mutuamente excluyentes es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos que lo forman.

Un suceso es **seguro** si la probabilidad de que ocurra es 1.

Un suceso es **imposible** si la probabilidad de que ocurra es 0.

1. Determinen el espacio muestral de:

a. Sacar una bolilla de un bolillero con diez bolillas numeradas de 1 a 10.

b. Elegir en qué mano escondió una piedra una persona.

c. El sorteo de la quiniela.

2. De un mazo de cartas españolas se sacan dos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sean dos ases? ¿Y de que sean dos figuras?

3. Se saca una carta al azar de un mazo de cartas españolas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un rey?

b. ¿Y de que salga una carta de bastos?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que salga el rey de bastos?

4. Dos equipos juegan un partido de fútbol. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a. termine empatado?

b. gane el equipo local?

c. gane el equipo visitante?

5. En una bolsa hay 3 bolitas rojas y una verde. ¿Será cierto que hay un 75% de probabilidad de que, al extraer una bolita sin mirar el interior de la bolsa, sea roja? Expliquen cómo lo pensaron.

6. Si nos dicen que hay probabilidad de $\frac{1}{2}$ que al extraer una bolita de una bolsa, que tiene 12 bolitas de 3 colores diferentes, esa bolita sea roja. ¿Cuántas bolitas rojas habrá dentro de la bolsa? ¿Y si nos dicen que la probabilidad es de $\frac{1}{3}$?

7. Si en una bolsa hay que colocar bolitas de 4 colores diferentes (rojo, verde, azul y amarillo) y en total deben ser 20.

a. ¿Cuántas bolitas azules habrá que colocar para que la probabilidad de extraer una azul sea del 20%?

b. ¿Y para que sea del 80%?

8. Se tira un dado equilibrado.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que salga:

i. un 6? **ii.** un 7? **iii.** un 0?

b. ¿Es cierto que la probabilidad de que salga un número par es del 50%? ¿Por qué?

c. Enuncien un suceso que tenga una probabilidad del 0,5.

d. Enuncien un suceso que tenga una probabilidad del 16,6%.

9. La probabilidad que tiene cualquier número de salir, al arrojar un dado equilibrado, es de $\frac{1}{6}$, ya que todos los números son equiprobables. Si se sabe que el dado está cargado en uno de sus números y que la probabilidad de que salga ese número es $\frac{1}{3}$. ¿Qué convendría hacer para saber cuál es el número cargado?

Probabilidad de un suceso

Problema 3

Verónica y Luis están jugando a lanzar un dado dos veces y registrar la suma de sus puntos. Gana la jugada aquel que obtenga el mayor puntaje. Lanza primero Verónica y obtiene 10 puntos en total.

¿Cuál es la probabilidad de que Luis gane la partida?

Para ganar la partida Luis deberá obtener más de 10 puntos.

Para poder determinar la probabilidad de obtener más de 10 puntos en las dos tiradas hay que analizar los lanzamientos que resultarán exitosos sobre todos los posibles resultados.

1er tirada	2da Tirada	1er tirada	2da Tirada	1er tirada	2da Tirada	1er tirada	2da Tirada	1er tirada	2da Tirada	1er tirada	2da Tirada
1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1
1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2
1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3
1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	4
1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6	5
1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

Hay entonces 36 posibles resultados del experimento.

Si se llama A al suceso "Luis gana la partida", es decir, Luis saca más de 10 puntos, entonces:

$$A = \{(5\,;\,6)\,;\,(6\,;\,5)\,;\,(6\,;\,6)\}$$

Es decir, Luis tiene 3 jugadas favorables sobre un total de 36.

$$p(A) = \frac{\text{cantidad de tiros favorables}}{\text{cantidad de tiros posibles}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

La **probabilidad** de que ocurra un suceso A es:

$$p(A) = \frac{\text{casos favorables para A}}{\text{casos totales}}$$

Problema 4

Se arroja un dado equilibrado, ¿Cuál es la probabilidad de que el número que salga sea:

a. par? **b.** menor o igual que 4? **c.** menor o igual que 4 y par?

Para este experimento se tienen como resultados posibles que salga 1, 2, 3, 4, 5 y 6, es decir, su espacio muestral es $S = \{1\,;\,2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

Los sucesos que plantea el problema son:

A = {el número es par} = {2 ; 4 ; 6}

B = {el número es menor o igual que 4} = {1 ; 2 ; 3 ; 4}

C = {el número es par y menor o igual que 4} = {2 ; 4}

Se tiene entonces que:

$$p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad p(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad p(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

La intersección de dos sucesos A y B es la ocurrencia de ambos sucesos en simultáneo. Simbólicamente se escribe $A \cap B$.

Si se analiza en detalle el suceso C, es posible observar que para que éste ocurra deben ocurrir en simultáneo los sucesos A y B.

En otras palabras, C es la intersección entre A y B.

$$C = A \cap B \quad \Rightarrow \quad p(C) = p(A \cap B)$$

© Tinta fresca ediciones S.A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Sucesos independientes

Otra forma de pensar este problema sería:

La probabilidad de que el número sea par es $\frac{1}{2}$ pues hay 3 casos favorables sobre los 6 totales. De esa mitad hay dos resultados posibles que son favorables también al suceso B, es decir, dos tercios de la mitad son favorables al suceso A y al B.

Luego $p(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

Pareciera ser entonces que vale la siguiente igualdad:

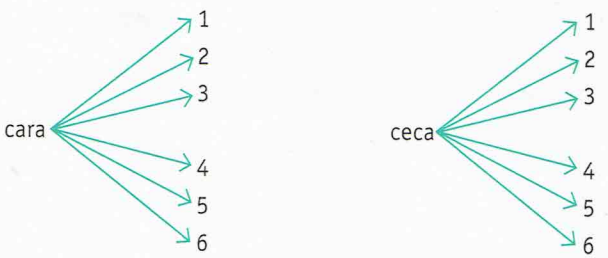
$$p(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = p(A) \cdot p(B)$$

¿Esta igualdad sucede siempre que se calcule la probabilidad de intersección de dos sucesos?

Problema 5

Carolina y Eugenio están jugando con una moneda y un dado. Eugenio tira la moneda y el dado y Carolina, antes de mirar, dice que salió cara y tres. ¿Cuál es la probabilidad de que Carolina acierte?

Para analizar cuáles son todas las posibilidades es conveniente realizar un diagrama de árbol entre las posibilidades de la moneda, cara o ceca, y las posibilidades del dado, 1, 2, 3, 4, 5 o 6.



En total son 12 posibilidades.

Si se considera el suceso A = {sale cara y tres} hay una sola posibilidad favorable para este suceso. Por lo tanto

$$p(A) = \frac{1}{12}$$

Si se analizan los sucesos: B = {sale cara al arrojar la moneda} y C = {sale 3 al arrojar el dado}

$$p(B) = \frac{1}{2} \quad y \quad p(C) = \frac{1}{6}$$

En este caso $A = B \cap C$ y resulta que

$$p(A) = \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = p(B) \cdot p(C)$$

La ocurrencia del suceso "sale cara al arrojar la moneda" no modifica la ocurrencia del suceso "sale 3 al arrojar el dado". Es decir, el arrojar la moneda no influye en nada respecto de arrojar el dado y viceversa. Se dice que estos sucesos son independientes y en este caso:

$$p(B \cap C) = p(B) \cdot p(C)$$

Dos **sucesos** de denominan **independientes** si la ocurrencia de uno de ellos no incide en la ocurrencia del otro.
Si A y B son dos sucesos independientes, se verifica:
$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Problema 5

De un mazo de 40 cartas españolas, se extrae una carta al azar y se consideran los sucesos: A = {la carta es de copas o espadas} ; B = {la carta no es de copas} ; C = {la carta es de copas u oros}

a. Calcular p(A), p(B), p(C), $p(A \cap B)$ y $p(A \cap C)$.

b. ¿Los sucesos A y B son independientes?

c. ¿Los sucesos A y C son independientes?

En un mazo de 40 cartas españolas, 10 son de copas, 10 son de espadas, 10 son de bastos y 10 son de oros.

El suceso A corresponde a sacar una carta de copas o de espadas. Hay 20 casos favorables sobre 40 totales, entonces:

$$p(A) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

Para el suceso B se debe extraer una carta que no sea de copas. Hay 30 casos favorables, oros, bastos o espadas, sobre 40 totales, entonces:

$$p(B) = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$$

El suceso C corresponde a sacar una carta de copas o de oros. Hay 20 casos favorables sobre 40 totales, entonces:

$$p(C) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

El suceso $A \cap B$ es igual a "la carta es de espadas" y el suceso $A \cap C$ es igual a "la carta es de copas".

Calculando sus probabilidades se obtiene

$$p(A \cap B) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \qquad p(A \cap C) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

En estos casos resulta que:

$$p(A \cap B) = \frac{1}{4} \text{ y } p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \Rightarrow p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B)$$

En cambio:

$$p(A \cap C) = \frac{1}{4} \text{ y } p(A) \cdot p(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow p(A \cap C) = p(A) \cdot p(C)$$

Entonces A y C son independientes; en cambio, A y B no lo son.

ACTIVIDADES

10. Julieta tiene un bolillero que contiene 5 bolillas numeradas 1, 2, 3, 4, 5. Extrae una bolilla al azar y la vuelve a poner en el bolillero.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la bolilla que extraiga sea impar?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la bolilla que extraiga esté numerada con un número mayor que 2?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la bolilla que extraiga sea impar y numerada con un número mayor que 2?

d. Los dos primeros sucesos, ¿son independientes? ¿Por qué?

11. Octavio se olvidó las tres últimas cifras de un número de teléfono, ¿cuál es la probabilidad de que marcando tres números al azar acierte con el que quería llamar?

12. En una bolsa hay 3 bolitas (una roja, una verde y otra azul) y 4 monedas (1 de 10 centavos, otra de 25, otra de 50 y la cuarta de 1 peso). Se extrae, sin mirar dentro de la bolsa, una bolita y una moneda.

a. ¿Cuál es el espacio muestral?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la bolita sea roja? ¿Y de que la bolita sea roja y la moneda de 10 centavos?

c. ¿Será cierto que hay una probabilidad de $\frac{1}{4}$ de que, al extraer una bolita y una moneda, la moneda sea de 10 centavos?

d. ¿Es cierto que los sucesos son independientes?

e. Si nos dicen que hay un 0,5 de probabilidad de que al extraer una bolita y una moneda, la bolita sea roja y la moneda de 10, ¿qué bolitas y monedas habría dentro de la bolsa?

13. Si en una bolsa se coloca una moneda de 1, de 10, de 25 y de 50. ¿Cuál es la probabilidad de que, al extraer dos monedas, la suma sea 75?

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Probabilidad condicional

Problema 6

En una urna hay 4 bolillas rojas y 5 blancas. De las 4 bolillas rojas, 2 son lisas y 2 rayadas y de las 5 bolillas blancas, 4 son lisas y una sola es rayada.

Se extrae una bolilla

a. ¿cuál es la probabilidad de que sea roja?

b. ¿cuál es la probabilidad de que sea rayada?

d. ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca?

e. ¿cuál es la probabilidad de que sea roja y rayada?

f. Si alguien dice que la bolilla es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la bolilla sea rayada?

En este problema, el espacio muestral posee 9 elementos, todas las bolillas que se encuentran en la urna, y es posible establecer los siguientes sucesos:

A = {la bolilla extraída es roja}

B = {la bolilla extraída es rayada}

C = {la bolilla extraída es blanca}

$p(A) = \frac{4}{9}$ dado que 4 de las bolillas son rojas.

Como la bolilla es roja o blanca, los sucesos A y C son mutuamente excluyentes y $p(C) = 1 - p(A) = \frac{5}{9}$

La probabilidad de sacar una bolilla al azar y que sea rayada es 3 de las 9 pues hay 2 rayadas rojas y 1 rayada blanca. Entonces $p(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

El suceso: "extraer una bolilla roja y rayada" es $A \cap B$ y $p(A \cap B) = \frac{2}{9}$ pues hay dos bolillas rayadas y rojas.

En el problema **f.** ya se sabe que se extrajo una bolilla roja, con lo cual cambia el espacio muestral. La cantidad de bolillas rojas es 4 y de ellas dos son rayadas, luego:

$$p \text{ (que la bolilla sea rayada sabiendo que es roja)} = \frac{1}{2}$$

Saber que la bolilla que se sacó es roja, reduce los casos posibles, es decir, reduce el espacio muestral.

El suceso "la bolilla es rayada sabiendo que es roja" se llama *ocurrencia del suceso B condicional a la ocurrencia del suceso A*. Y se nota **B/A**.

¿Cómo afecta entonces la probabilidad de que sea rayada, es decir, la probabilidad del suceso B el saber que la bolilla es roja, o sea, el saber que ha ocurrido el suceso A?

Puede observarse que se verifica:

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{2}$$

Los sucesos $A \cap B$ y B/A no son iguales; $A \cap B$ significa que la bolilla sale roja y rayada; en cambio, el suceso B/A se traduce en: la bolilla es rayada sabiendo que fue roja.

Por otro lado $p(B) \cdot p(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{27}$, con lo cual los sucesos A y B no son independientes.

Si dos sucesos A y B son mutuamente excluyentes y generan todo el espacio muestral S, entonces $p(A) + p(B) = 1$.

Si C y D son dos sucesos $p(D) \neq 0$, la **probabilidad de C condicionada a que ocurra D** es p(C/D) y se verifica que:

$$p(C/D) = \frac{p(C \cap D)}{p(D)}$$

© Tinta fresca ediciones S.A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Probabilidad total

Calcular la probabilidad de que la segunda bolilla sea blanca, sin importar qué salió en la primera, lleva un análisis delicado pues, lo que haya ocurrido en la primera extracción modifica las probabilidades de extraer una bolilla blanca la segunda vez.

Como se analizó anteriormente, los sucesos A y B no son independientes y la probabilidad que la segunda bolilla sea blanca sabiendo que la primera es negra es

$$p(B/A) = \frac{2}{3}$$

Si se define el suceso A' = "la primera bolilla no es negra"; A' y B no son independientes pues si la primera bolilla que se extrajo fue blanca en la urna quedan 5 blancas y 4 negras, es decir, que quedan 5 casos favorables sobre un total de 9, entonces $p(B/A') = \frac{5}{9}$ y la ocurrencia del suceso A', por lo tanto, modifica las probabilidades del suceso B.

Pero como A y B y también A' y B no son independientes, es posible obtener las siguientes relaciones:

$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$	$\Leftrightarrow$	$p(A) \cdot p(B/A) = p(A \cap B)$
$p(B/A') = \frac{p(A' \cap B)}{p(A')}$	$\Leftrightarrow$	$p(A') \cdot p(B/A') = p(A' \cap B)$

Al principio de la resolución del problema se calculó p(B); se puede pensar este cálculo de otra manera:

El suceso B indica que la segunda bolilla extraída sea blanca; para que esto suceda puede ser que la primera sea blanca o negra. Se tiene entonces:

$$B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$$

Y, además, los sucesos $A \cap B$ y $A' \cap B$ son *mutuamente excluyentes* pues si la primera bolilla es negra *nunca* puede ser blanca, con lo cual

$$p(B) = p(A \cap B) + p(A' \cap B)$$

Y reemplazando con las relaciones establecidas anteriormente se tiene

$$p(B) = p(A) \cdot p(B/A) + p(A') \cdot p(B/A') = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{4}{15} + \frac{15}{45} = \frac{3}{5}$$

Si A es un suceso, y S el espacio muestral, el suceso A' = S – A es el **suceso que complementa** a A, es decir que A' posee todos los elementos que están en S y no están en A.
Los sucesos A y A' son mutuamente excluyentes y p(A) + p(A') = 1

Si A y B son dos sucesos se verifica que
$p(B \cap A) = p(A) \cdot p(B/A)$
$p(B \cap A') = p(A') \cdot p(B/A')$
Si A y B son independientes,
$p(B/A) = p(B)$ y $p(B/A') = p(B)$
En ese caso, las probabilidades de las intersecciones quedan:
$p(B \cap A) = p(A) \cdot p(B)$
$p(B \cap A') = p(A') \cdot p(B)$

Probabilidad total
Si A es un suceso y A' su suceso complementario, para todo suceso B sobre el mismo espacio muestral resulta que
$p(B) = p(A \cap B) + p(A' \cap B)$
Si A y B no son independientes, se tiene además
$p(B) = p(A) \cdot p(B/A) + p(A') \cdot p(B/A')$

15. Analía trabaja envasando productos y al colocar 6 productos distintos en sus envases, se equivocó en 3 de ellos.
a. ¿Cuál es la probabilidad que tomando un envase al azar contenga un producto equivocado?
b. El supervisor tomó un producto y no resultó estar equivocado. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo envase que tome contenga un producto equivocado?

16. Silvana arroja dos dados equilibrados. Calculen la probabilidad de que:
a. la suma sea 7 sabiendo que la suma es un número impar.
b. la suma sea 7 sabiendo que la suma es mayor de 6.
c. la suma sea 8, si se sabe que el número del segundo dado es par.
d. la suma sea 8, si se sabe que los números de los dados son iguales.

Relaciones entre estadística y probabilidad

En muchas ocasiones para encontrar los resultados de problemas de probabilidad es necesario recurrir a la estadística. A continuación se revisarán algunos conceptos de estadística.

Problema 8

En una escuela que tiene 548 alumnos, 316 son varones. Los alumnos del último año realizaron una encuesta acerca de los deportes que practicaban los chicos y obtuvieron los siguientes resultados:

AÑO	¿PRACTICAN DEPORTE?			
	SI		NO	
	VARONES	MUJERES	VARONES	MUJERES
3er CICLO	23	28	122	75
POLIMODAL	40	27	131	102
TOTALES	63	55	253	177

La **frecuencia absoluta** es la cantidad de veces que aparece cada dato. Se lo simboliza f_a.

¿Quiénes practican más deportes, los varones o las mujeres? En proporción, ¿hay más varones o más mujeres que practican deportes?

Para saber quiénes practican más deporte bastará analizar que hay más varones que practican deportes que mujeres. Es decir, la frecuencia absoluta es mayor en el caso de los varones. Pues de los 118 alumnos que practican deportes, 63 son varones y 55 son mujeres. Pero también se podría analizar qué porcentaje del total de varones realizan deportes. En total hay 316 varones de los cuales 63 practican deportes; esto representa aproximadamente el 20%. En cambio, si se analiza qué porcentaje del total de mujeres practican deportes se obtiene que sobre un total de 232 mujeres, 55 de ellas practican deportes y representa aproximadamente el 24%. De este modo resulta que las mujeres, en proporción a la cantidad que son, practican más deporte.

Problema 9

En la misma encuesta, los alumnos analizaron el rendimiento por curso teniendo en cuenta los alumnos que tenían notas por debajo de 6 y quienes no.
Estos son los resultados que obtuvieron:

CURSO	Cantidad de alumnos que tienen todas las materias con más de 6	Cantidad de alumnos que tienen alguna materia con menos de 6
5° A	12	22
5° B	10	15

Los alumnos de 5° A piensan que son mejores que los de 5° B porque hay más chicos que tienen todas las materas con más de 6; los de 5° B dicen, en cambio que ellos son menos en total, por eso, los 10 de ellos que tienen más de 6 en todas las materias son más. ¿Quién tiene razón?

© Tinta Fresca ediciones S.A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Si bien es cierto que en 5° A hay más chicos que tienen más de 6 en todas las materias que en 5° B, también es cierto que en 5° A hay 34 alumnos en total, en cambio en 5° B hay 25 alumnos.

Entonces, *¿qué parte del total de alumnos de cada curso son los que tienen más de 6 en todas las materias?*

En 5° A son 12 de un total de 34, es decir, son $\frac{12}{34} = \frac{6}{17} \approx 0{,}35$

En cambio en 5° B son 10 de un total de 25, es decir, son $\frac{10}{25} = \frac{2}{5} \approx 0{,}4$

También es posible analizar qué porcentaje son los que tienen todas las materias con notas mayores que de 6 en 5° A y en 5° B.

En 5° A son aproximadamente el 35 % y en 5° B son el 40%. Por lo tanto, no es cierto lo que dicen los alumnos de 5° A.

El valor que expresa el cociente entre la frecuencia absoluta de un dato y el total de la muestra se llama **frecuencia relativa**. Si n es la cantidad total de datos, entonces:

$$f_r = \frac{f_a}{n}$$

Se denomina porcentaje o **frecuencia porcentual** la frecuencia relativa multiplicada por 100, es decir

$$f_p = f_r \cdot 100$$

ACTIVIDADES

17. Una encuesta sobre simpatizantes de fútbol se representa en la siguiente tabla:

EQUIPOS DE FÚTBOL			
Equipo	Simpatizantes	Frecuencia relativa	Porcentaje
Boca	163		
River	138		
San Lorenzo	70		
Independiente	67		
Racing	21		
Velez	26		
Ferro	11		
Huracán	11		
Otros	41		
Total	548		

Completen la tabla

18. La siguiente tabla muestra la cantidad de goles que hicieron algunos equipos en el torneo de Papi-Fútbol:

Equipo	Cantidad de Partidos	Cantidad de goles
Los gallitos	20	32
Cuánto hay	18	30
Los Desalmados	17	17
Los Mumis	21	20
Araca la Cana	20	31
Cinco al fútbol	19	20

a. ¿Cuál es el equipo que hizo la mayor cantidad de goles?

b. ¿Cuál es el equipo que tiene la mayor proporción en función de la cantidad de partidos jugados?

19. La siguiente tabla indica la cantidad de alumnos de cada año. Hay una columna a la que le falta el registro de la cantidad de alumnos que harán un viaje.

Año	Cantidad de Alumnos	Cantidad de alumnos que viajan
1°	35	
2°	28	
3°	21	

Completen la tabla sabiendo que en todos los casos, la cantidad de alumnos que viajan en proporción con la cantidad de alumnos que son es la misma en los tres años.

20. En una encuesta a 500 personas se les consultó acerca de la marca de bebida gaseosa que les gusta tomar. Los resultados se volcaron en una tabla pero se borraron algunos números.

Nombre de la bebida gaseosa preferida	Cantidad de personas	Porcentaje de personas en relación a la cantidad de personas encuestadas	Frecuencia relativa
Negra Cola	300		
Agua limonada		20 %	
Pomelo Rosado	15		
Blanca Naranja			$\frac{9}{100}$

Análisis de la frecuencia relativa

Problema 10

Florencia y Nadia, que estaban estudiando probabilidad en la escuela, hicieron el siguiente experimento. Tiraron un dado 20 veces y anotaron los resultados en la siguiente tabla:

Número	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1	3	0,15
2	4	0,20
3	3	0,15
4	2	0,10
5	3	0,15
6	5	0,25
Total	20	1

Luego siguieron con el experimento y tiraron el dado 60 veces más. Estos son los resultados que obtuvieron

Número	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1	11	0,18
2	12	0,20
3	9	0,15
4	10	0,17
5	9	0,15
6	9	0,15
Total	60	1

Por último siguieron tirando el dado y sumaron un total de 200 veces con los siguientes resultados.

Número	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1	35	0,175
2	33	0,165
3	32	0,160
4	34	0,170
5	32	0,160
6	34	0,170
Total	200	1

A las chicas les llamó la atención la frecuencia relativa a medida que aumentaban la cantidad de veces que tiraron el dado.
¿Qué sucede con las frecuencias relativas a medida que aumenta la cantidad de veces que se tira el dado?

Lo que probablemente les llamó la atención es que la frecuencia relativa se parece cada vez más a la probabilidad que tiene cada número de salir que es $\frac{1}{6} = 0,1666...$

© Tinta fresca ediciones S.A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Cuando se aumentan la cantidad de veces que se tira el dado, la frecuencia relativa se acerca a la probabilidad teórica.

De esta manera la frecuencia relativa total coincide con la probabilidad de que en la tirada del dado salga 1, 2, 3, 4, 5 o 6 y esa probabilidad es 1.

Problema 11

Paloma, Claudia y Laura están jugando con dos dados. Paloma pensó que los dados no están equilibrados, es decir, hay uno cargado. Para demostrar que estaba en lo cierto tiró 60 veces cada dado y anotó los resultados.

Dado Nº 1		
Número	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1	11	0,18
2	9	0,15
3	10	0,17
4	9	0,15
5	11	0,18
6	10	0,17
Total	60	1,00

Dado Nº 2		
Número	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1	8	0,13
2	9	0,15
3	15	0,25
4	9	0,15
5	10	0,17
6	9	0,15
Total	60	1,00

¿Cómo se puede concluir con esta información si Paloma está en lo cierto o no?

Cuando una experiencia aleatoria se realiza un gran número de veces, la frecuencia relativa se acerca a un valor que es la probabilidad de ese suceso.

Como se analizó en el problema anterior, si el dado estuviera equilibrado, es decir si todos los números fueran equiprobables, la probabilidad teórica para cada resultado sería de 0,1666... y esto es posible interpretarlo como si al arrojar muchas veces un dado cada número debería salir aproximadamente 17 veces cada 100 tiradas.

Para el dado 1, las frecuencias relativas están cercanas a lo esperado según la probabilidad teórica. Pero en el caso del dado 2, el número 3 sale muchas más veces que los otros números lo que llevaría a pensar que Paloma está en lo cierto y el dado 2 no está equilibrado.

La **ley de los grandes números** establece que la frecuencia relativa de los resultados de un experimento aleatorio, tiende a cierto número, que es precisamente la probabilidad del suceso.

Problema 12

Cecilia estaba jugando con tres bolsas oscuras que contenían bolitas rojas, verdes y azules. Llegó su amiga Liliana y quiso saber cuántas bolitas de cada color tenía en cada bolsa. Cecilia solo le dijo que tenía 12 bolitas en total en cada bolsa pero no le aclaró cuántas de cada color y le permitió tomar varias veces una bolita de cada bolsa y volverla a colocar. Liliana lo hizo y estos fueron los resultados obtenidos.

	Bolita extraída
Bolsa Nº1	
Bolsa Nº2	
Bolsa Nº3	

¿Cómo puede hacer Liliana para saber cuántas bolitas de cada color hay en cada bolsa?

Si se analiza la bolsa 1,

BOLSA Nº 1		
COLOR	FREC. ABSOLUTA	FREC. RELATIVA
ROJO	16	$\frac{16}{32} = 0{,}50$
AZUL	10	$\frac{10}{32} \approx 0{,}31$
VERDE	6	$\frac{6}{32} \approx 0{,}19$
TOTAL	32	1

Como la mitad de veces la bolita extraída fue roja, es posible suponer que las bolitas rojas son la mitad de las que hay en la bolsa. Como en la bolsa había 12 bolitas, 6 son rojas.

Del mismo modo se puede pensar para las azules y las verdes:

Azules = 0,31 · 12 = 3,72 Verdes = 0,19 · 12 = 2,28

Por lo tanto, se puede pensar que en la bolsa 1 hay 6 bolitas rojas, 4 bolitas azules y 2 bolitas verdes.

Como $f_r = \frac{f_a}{n} \Rightarrow f_a = f_r \cdot n$

Para la bolsa 2,

BOLSA Nº 2		
COLOR	FREC. ABSOLUTA	FREC. RELATIVA
ROJO	10	$\frac{10}{32} \approx 0{,}32$
AZUL	11	$\frac{11}{32} \approx 0{,}34$
VERDE	11	$\frac{11}{32} \approx 0{,}34$
TOTAL	32	1

Esta tabla permite comenzar a sospechar que hay la misma cantidad de bolitas azules que verdes.

Es posible suponer que la cantidad de bolitas que hay dentro de la bolsa es:

Roja: 0,32 x 12 = 3,84 Azul: 0,34 x 12 = 4,08 Verde: 0,34 x 12 = 4,08

Es decir, hay una alta probabilidad de que haya 4 bolitas de cada color.

Finalmente, para la bolsa 3, se puede hacer lo mismo que para las bolsas 1 y 2:

BOLSA Nº 3		
COLOR	FREC. ABSOLUTA	FREC. RELATIVA
ROJO	20	$\frac{20}{32} \approx 0{,}62$
AZUL	9	$\frac{9}{32} \approx 0{,}28$
VERDE	3	$\frac{3}{32} \approx 0{,}09$
TOTAL	32	1

BIBLIOTECA PUBLICA MUNICIPAL
"GENERAL MANUEL BELGRANO"
SISTEMA MUNICIPAL DE BIBLIOTECAS PUBLICAS
MUNICIPALIDAD DE GENERAL PUEYRREDON
YAPEYU 1467 MAR DEL PLATA

Por lo tanto, es posible suponer que la distribución de bolitas de cada color será la siguiente:

Rojas: 0,62 x 12 = 7,44 Azules: 0,28 x 12 = 3,36 Verdes: 0,09 x 12 = 1,08

Es decir puede haber 8 bolitas rojas, 3 azules y una verde.

© Tinta fresca ediciones S.A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Combinatoria

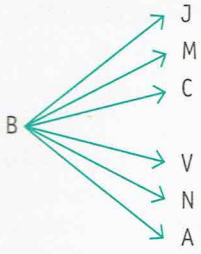
Para calcular la probabilidad de un suceso es necesario conocer los casos posibles y los casos favorables al suceso. Pero muchas veces no es fácil determinar la cantidad de casos posibles o de casos favorables. Por tal motivo se analizarán diferentes modos de contar colecciones de objetos de manera organizada.

Problema 13

Para una foto familiar Beatriz y sus 6 sobrinos, Jorge, Mariana, Carlos, Vanesa, Nancy y Ángeles se van a ubicar en una fila. ¿De cuántas maneras posibles pueden hacerlo?

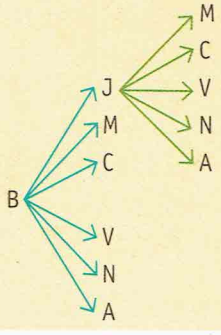
Para comenzar a analizar este problema es posible realizar un diagrama de árbol.

Si se ubica Beatriz en una punta, junto a ella se pueden ubicar Jorge (J); Mariana (M) ; Carlos (C); Vanesa (V); Nancy (N) o Ángeles (A).



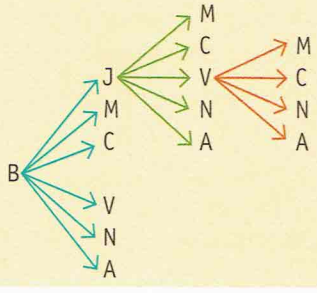
Es decir que para la segunda posición al lado de Beatriz hay 6 posibilidades.

Una vez que se ubica a la persona al lado de Beatriz, por ejemplo Jorge, para la posición contigua quedan 5 personas posibles.

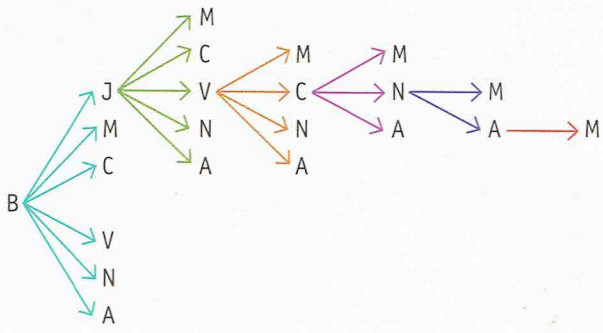


Como esto puede repetirse para cada una de las posibilidades de la segunda ubicación, entonces por cada una de las 6 posibilidades que se tienen para la segunda posición hay 5 posibilidades para la tercera, en total se llevan contando $6 \cdot 5 = 30$ posibilidades.

Para el cuarto lugar al lado de Beatriz hay 4 posibilidades por cada una de las 30 anteriores. En total se tienen $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ posibilidades.



Para el siguiente lugar se tienen 3 posibilidades y por cada una de esas posibilidades hay 2 posibilidades más para el anteúltimo lugar; queda una única posibilidad para la última ubicación.



De este modo, ubicando a Beatriz primera, se obtienen $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ posibilidades.

Pero se podría haber empezado por Jorge, Mariana, Carlos, Vanesa, Nancy o Ángeles. Por cada uno de ellos hay 720 posibilidades. Como son 7 personas, se tienen en total $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$ posibilidades para sacar la foto.

Se llama **permutaciones** a la cantidad total de maneras de ordenar un conjunto de n elementos y se indican $\mathbf{P_n}$.

Para calcular las permutaciones $\mathbf{P_n}$ de n elementos se realiza el producto de los números naturales consecutivos de 1 a n, es decir

$$\mathbf{P_n} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

Al producto de los números consecutivos de 1 hasta n se lo llama el **factorial de *n*** y se escribe ***n!***
Por lo tanto, se obtiene que

$$\mathbf{P_n} = n!$$

Este problema podría enmarcarse en una lista de problemas donde se buscan las maneras de ubicar un cierto número de objetos, en este caso 7, en una fila.

Este es un ejemplo de una permutación de 7 elementos y la cantidad de formas de ubicarlo es $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Problema 14

a. ¿De cuántas maneras distintas entre sí pueden ponerse en el estante de una biblioteca 3 libros de matemática, 2 libros de física y 4 libros de historia, si ninguno de ellos está repetido?

b. Si los libros de matemática y los de física tienen que estar juntos, ¿de cuántas maneras se pueden ubicar?

Para saber de cuántas maneras se pueden ubicar 9 libros en un estante será necesario calcular las permutaciones de 9 elementos, esto es

$$P_9 = 9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362\,880$$

Si los libros de matemática tienen que estar juntos como los de física, tal vez conviene pensarlos como un bloque. De este modo se tendrían que ubicar en el estante el bloque de libros de matemática, el bloque de libros de física y cada uno de los 4 libros de historia.

$$\boxed{M_1\ M_2\ M_3}\ \boxed{F_1\ F_2}\ H_1\ \ H_2\ \ H_3\ \ H_4$$

Es decir, es una permutación de 6 elementos. Entonces $P_6 = 6! = 720$.

Pero dentro del bloque de matemática también hay permutaciones pues pueden ir ubicados de diferente modo. Lo mismo sucede en el bloque de física. La ubicación $H_3\ H_2 \boxed{M_1\ M_2\ M_3}\ H_1\ \boxed{F_1\ F_2}\ H_4$ es diferente de la ubicación $H_3\ H_2 \boxed{M_3\ M_1\ M_2}\ H_1\ \boxed{F_2\ F_1}\ H_4$

Así que por cada posibilidad anterior hay que tener en cuenta las permutaciones de 3 elementos y las permutaciones de 2 elementos. Por lo tanto, el total de posibilidades será

$$P_6 \cdot P_3 \cdot P_2 = 6! \cdot 3! \cdot 2! = 720 \cdot 6 \cdot 2 = 8640$$

© Tinta fresca ediciones S.A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

© Tinta fresca ediciones s. a. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Variaciones sin repetición

Problema 15

En el torneo interescolar de fútbol participan 12 escuelas y se otorgan premio a los tres primeros puestos. ¿Cuántos resultados posibles puede haber para los tres primeros puestos?

Para el primer puesto existen 12 posibilidades. Quedan de este modo 11 escuelas posibles para el segundo puesto. Una vez ubicado el segundo puesto quedan solo 10 posibilidades para el tercer puesto. De este modo, el total de resultados posibles será $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$.

Este problema podría enmarcarse en una lista donde se busca las maneras de seleccionar un cierto número de objetos, en este caso 3, sin repetirlos, de entre una cantidad mayor, 12, y ubicarlos de manera ordenada. En este caso, se resuelve una variación sin repetición de 12 elementos tomados de a 3. Es decir, se quiere calcular cuántas formas hay de elegir 3 elementos de este grupo de 12 elementos y ubicarlos ordenadamente.

A la cantidad total de las selecciones ordenadas de un conjunto de n elementos tomadas de a r de ellos, **sin repetirlos**, se las denomina **variaciones sin repetición** de n elementos tomados de a r, y se escribe así: $V_{n,r}$.

Problema 16

Sofía tiene un candado con una combinación numérica de 4 dígitos, cada uno de los ellos puede ser del 0 al 9. Se olvidó la clave pero sabe que no se repetía ningún número.

a. ¿Cuántas posibilidades tiene para acertar?

b. Si se acuerda que el primer dígito era 9, ¿cuál es la probabilidad de que acierte la primera vez que pone un número?

Para el primer lugar de la clave tiene 10 posibilidades pues puede ser un dígito del 0 al 9. Una vez que se ubicó el primer dígito, como no se repite, para el segundo lugar quedan 9 posibilidades. Para el tercer lugar quedan 8 posibilidades pues no se puede colocar ni el primero ni el segundo dígito. Por último para el cuarto lugar quedan 7 posibilidades. De este modo, como se tiene una serie donde importa el orden de 10 elementos (los dígitos del 0 al 9) y se tienen que seleccionar con un orden solo a 4 de ellos sin repetirlos, se obtiene la variación de 10 elementos tomados de a 4, esto es

$$V_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 5040$$

Utilizando factoriales resulta que

$$V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Si Sofía se acuerda de que el primer dígito era 9, las posibilidades disminuyen. De manera que solo tiene que seleccionar con un orden a 3 de los 9 elementos sin repetirlos. Entonces el total de posibilidades es:

$$V_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

Como solamente una de esas 504 posibilidades es correcta, la probabilidad de que acierte la primera vez es $\frac{1}{504} \approx 0{,}001984$, lo que es muy bajo.

21. En el Club El Talar decidieron elegir a la comisión directiva por sorteo. Todos los nombres de los 18 postulantes se colocarán en una bolsa y se extraen, al azar, tres nombres que ocuparán los cargos de Presidente, Vicepresidente y Secretario. ¿Qué probabilidad hay de que salgan Claudio, Estela y Luis, en ese orden?

22. ¿Cómo podrían hacer para estar seguros de que se verifica la siguiente igualdad:

$$V_{n,r} = n(n-1)(n-2)(n-3)....(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ACTIVIDADES

Combinaciones

Problema 17

En un torneo provincial de básquet participan 15 clubes. Los cuatro primeros clasifican para participar en el torneo nacional. ¿De cuántas maneras distintas podría estar formado el grupo que clasificará para el torneo nacional?

Este problema parece ser igual al problema 16 del torneo de fútbol interescolar; sin embargo, es diferente de aquel.

En el caso del problema 16 es importante quién sale en el primer puesto, quién en el segundo y quién en el tercero. Por ejemplo, si se tienen los equipos A, B y C, una opción es

1° puesto: A 2° puesto: B 3° puesto: C

y es diferente de la opción

1° puesto: B 2° puesto: C 3° puesto: A

En este problema no importa si el club A sale primero, el B sale segundo, el C sale tercero y el D sale cuarto o si el D sale primero, el C segundo, el A tercero y el B cuarto, pues de todos modos clasifican. Es decir, *no importa el orden en que se clasifican*.

Si en este problema importara el orden, se tomaría la variación de 15 elementos tomados de a 4 sin repetición y se obtendría

$$V_{15,4} = \frac{15!}{(15-4)!} = \frac{15!}{11!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 = 32\,760$$

Pero se cometería el error de contar al grupo ABCD de las siguientes maneras:

ABCD	*ABDC*	*ACBD*	*ACDB*	*ADBC*	*ADCB*
BACD	*BADC*	*BCAD*	*BCDA*	*BDAC*	*BDCA*
CABD	*CADB*	*CBAD*	*CBDA*	*CDAB*	*CDBA*
DABC	*DACB*	*DBAC*	*DBCA*	*DCAB*	*DCBA*

Es decir, que el grupo ABCD se cuenta 24 veces, que son las permutaciones de 4 elementos.

Por lo tanto, a la variación de 15 elementos tomados de a 4 hay que "sacarle" los casos que se cuentan varias veces, es decir, calcular las variaciones de 15 elementos seleccionados de a 4 y al resultado dividirlo por las permutaciones de 4 elementos (por las repeticiones de cada grupo), esto es

$$\frac{V_{15,4}}{P_4} = \frac{15!}{(15-4)!\,4!} = \frac{15!}{11!\,4!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{32\,760}{24} = 1365$$

Este problema podría enmarcarse en una lista de problemas donde se intenta buscar las maneras de seleccionar un cierto número de objetos, en este caso 4, sin repetirlos, de entre una cantidad mayor, 15, sin que importe el orden en que se eligen. En este caso se resuelve una combinación de 15 elementos tomados de a 4. Es decir, se quiere calcular cuántas formas hay de elegir 4 elementos de este grupo de 15 elementos.

Al número de selecciones *no ordenadas* de un conjunto de n elementos tomados de a r de ellos se las denomina **combinaciones de n elementos tomados de a r** y se indican $\binom{n}{r}$ (se lee "número combinatorio n, r").

$$\binom{n}{r} = \frac{V_{n,r}}{P_r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

© Vicens Vives editores S.A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Variaciones con repetición

Problema 18

En una pizzería hay 12 gustos de pizza. Héctor quiere comer 5 porciones.

a. ¿Cuántas combinaciones distintas puede hacer si no quiere repetir los gustos?

b. ¿Y si quiere repetir los gustos?

Si tiene que elegir 5 gustos entre 12, sin repetirlos, y no importa el orden en que los elija, se tienen las combinaciones de 12 elementos tomados de a 5, esto es

$$\binom{12}{5} = \frac{V_{12,5}}{P_5} = \frac{12!}{(12-5)!5!} = \frac{12!}{7!\,5!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{95\,040}{120} = 792$$

En cambio, si es posible *repetir* los gustos, para la primera porción de pizza tiene 12 gustos posibles, pero para la segunda porción también tiene 12 gustos posibles, lo mismo ocurre para la tercera, la cuarta y la quinta porción. Por lo tanto, Héctor tiene un total de $12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 = 12^5 = 248\,832$ posibilidades.

La diferencia entre la primera y la segunda pregunta está en que los elementos que se seleccionan *se pueden repetir*, por lo tanto no se tiene una combinación sino una *variación con repetición*, esto es $V'_{12,5} = 12^5 = 248\,832$.

Este problema podría enmarcarse en una lista donde se busca las maneras de seleccionar un cierto número de objetos, en este caso 5, que pueden repetise, de entre una cantidad mayor, 12, sin que importe el orden en que se eligen. En este caso se resuelve una variación con repetición de 12 elementos tomados de a 5.

El número de selecciones ordenadas de un conjunto de n elementos tomados de a r de ellos, pudiendo repetirlos, se denomina **variaciones con repetición** y se indican $V'_{n,r}$.

$$V'_{n,r} = n^r$$

Problema 19

Los chicos de la escuela quieren hacer un código de señales utilizando banderines. Tienen 3 banderines rojos, 2 azules, 5, verdes y 2 blancos. Para cada señal tienen que usar los 12 banderines. ¿Cuántas señales podrán hacer?

Se podría comenzar calculando las permutaciones de 12, es decir $P_{12} = 12! = 479\,001\,600$.

Pero hay que tener en cuenta que como los banderines de un mismo color no se pueden distinguir, por ejemplo estas dos señales son la misma:

$R_1 R_2 R_3 A_1 A_2 V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 B_1 B_2$ $\quad$ $R_2 R_1 R_3 A_2 A_1 V_5 V_3 V_4 V_1 V_2 B_2 B_1$

Esto lleva a pensar que cada señal estaría repetida tantas veces como pueda permutarse cada color de banderín entre sí. Está repetido P_3 por los banderines rojos, P_2 por los banderines azules, P_5 por los banderines verdes y P_2 por los banderines blancos. De este modo, el número total de señales será *Nº de señales* $= \frac{P_{12}}{P_3 \cdot P_2 \cdot P_5 \cdot P_2} = \frac{12!}{3! \cdot 2! \cdot 5! \cdot 2!} = 166\,320$

Este problema podría enmarcarse en una lista donde se intenta busca las maneras de ordenar un conjunto de elementos, en este caso 12, en el cual hay elementos iguales e indistinguibles.

A la cantidad de maneras distintas de ordenar un conjunto de n elementos **con $r_1, r_2, \ldots, r_h$ iguales** entre sí, se las denomina **permutaciones de n elementos con $r_1, r_2, \ldots, r_h$ iguales entre sí** y se indican $P_n^{r_1, r_2, \ldots, r_h}$.

$$P_n^{r_1, r_2, \ldots, r_h} = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_h!}$$

(con $r_1 + r_2 + \ldots + r_h \leq n$)

Problemas de combinatoria con probabilidades

Problema 20

Cinco chicos y tres chicas van al teatro y se sientan sin pensar en quién tienen a su lado. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres chicas se sienten una al lado de la otra?

El espacio muestral en este problema está formado por todas las formas que tienen de ubicarse los 8 chicos en una fila.

Se define el suceso A = {las tres chicas se sientan una al lado de la otra}

Para conocer la probabilidad de este suceso es necesario analizar cuántos casos posibles y cuántos favorables hay.

Para saber cuántos casos posibles hay; se tienen que ubicar 8 personas para sentarse una al lado de la otra. De este modo, el total de casos posibles serán las permutaciones de 8, es decir: $P_8 = 8! = 40\,320$.

Los casos favorables son las posibilidades donde las chicas estén juntas. Es conveniente pensar a las chicas como un bloque que se permuta con cada uno de los chicos, es decir, se tienen las permutaciones de 6, considerando 5 chicos y una sexta persona que serían las tres chicas juntas. Pero, a su vez, este bloque de las chicas también es posible permutarlo, teniéndose así las permutaciones de 3.

El total de posibilidades son $P_6 \cdot P_3 = 6! \cdot 3! = 720 \cdot 6 = 4320$

Entonces

$$p(A) = \frac{4320}{40320} = 0{,}10714$$

Problema 21

Uno de los tantos juegos de azar consiste en adivinar los 10 números de un sorteo con bolillas numeradas del 1 al 25. Aquella persona que adivine los 10 números gana un pozo de dinero. ¿Cuál es la probabilidad de ganar con una sola tarjeta?

Para determinar todas las combinaciones posibles de extraer diez números entre 1 y 25 es conveniente calcular el siguiente número combinatorio:

$$\binom{25}{10} = \frac{25!}{10! \cdot 15!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \ldots\ldots\ldots\ldots 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \ldots\ldots 1 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \ldots\ldots\ldots 1} = 3\,268\,760$$

Es decir que hay 3 268 760 posibilidades diferentes de extraer 10 números de los 25 que están disponibles.

Por lo tanto, la probabilidad de ganar es la siguiente:

$$\frac{1}{3\,268\,760} \approx 0{,}0000003$$

Como la probabilidad es tan baja, es frecuente que el pozo quede vacante.

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN

23. Determinen cuál es el espacio muestral en cada uno de los siguientes experimentos

a. Sacar una bolilla de un bolillero con diez bolillas numeradas del 1 al 5.

b. Arrojar dos dados y observar la suma de los números que salen.

c. Sacar una carta de un mazo de cartas españolas.

d. Tirar tres monedas y ver si sale cara o ceca.

24. Se arroja un dado equilibrado dos veces y se definen los sucesos:

A = {la suma de los números obtenidos es exactamente 8}

B = {los números obtenidos son iguales}

Calculen las siguientes probabilidades

a. p(A) **b.** p(B) **c.** $p(A \cap B)$ **d.** p(A/B)

25. María tiene un candado con combinación de seis números y cada uno puede ser del 1 al 7. El candado se abre con una única combinación de las seis cifras.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el candado se abra ubicando los cilindros al azar?

b. Si se conocen 2 números, ¿cuál es la probabilidad de acertar la combinación?

26. Un examen de matemática consta de 18 temas eligiéndose uno entre tres propuestos por el profesor. Si un alumno estudió 14 temas. Calculen la probabilidad de que le toquen para elegir:

a. Tres temas que estudió.

b. Uno sólo de los que estudió.

c. Ninguno de los que estudió.

27. José fue a pescar truchas a los lagos del sur. Pero allí se puede pescar tres especies distintas: trucha, pejerrey y salmón.

Para saber la posibilidad que tiene de pescar truchas consultó con un pescador quien le comentó que en la última semana había pescado en total 22 truchas, 10 pejerreyes y 36 salmones. Suponiendo que se mantenga la tendencia de la semana anterior, ¿cuál es la probabilidad que tiene José de pescar una trucha?

28. Laura tira una moneda al aire tres veces, ¿cuál es la probabilidad de que salga ceca solo en la tercera tirada?

29. Fernando sabe que si su computadora se "cuelga" (no responde), el 65% de las veces se debe a problemas de memoria, el 30% de las veces a problemas de software y el 15% de las veces se debe a problemas que no son ni de memoria ni de software.

Hoy se le colgó la computadora a Fernando,

a. ¿cuál es la probabilidad de que el problema sea de memoria?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el problema sea de memoria y de software?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra un problema de software y no de memoria?

30. Se lanzan 3 dados. Si ninguno muestra la misma cara, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido exactamente un as?

31. En un fábrica de neumáticos se realizó un estudio y encontró que de cada 1500 neumáticos ,5 salen defectuosos.

¿Qué probabilidad se tiene de extraer dos neumáticos defectuosos de entre la producción de 1500 neumáticos?

32. Un buzón contiene 6 cartas con remitente y 8 que no lo tienen. Se retiran las cartas una a una.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda carta que se retira no tenga remitente, sabiendo que la primera que se retiró tampoco tiene remitente?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda carta que se retira tenga remitente, sabiendo que la primera que se retiró no tiene remitente?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda carta que se retira no tenga remitente?

33. Una enfermedad afecta a una de cada 500 personas de cierta población. Se usa un examen radiológico para detectar posibles enfermos. Se sabe que la probabilidad de que el examen aplicado a un enfermo lo muestre como tal es 0,90 y que la probabilidad de que el examen aplicado a una persona sana la muestre como enferma es 0,01. Calculen la probabilidad de que una persona esté realmente enferma si su examen dio positivo.

34. Un vendedor de una inmobiliaria tiene 14 departamentos para mostrar a un cliente, de los cuales 5 son a estrenar. El cliente tiene poco tiempo por lo que decide solo visitar 3 departamentos.

a. ¿De cuántas maneras pueden elegirse los 3 departamentos, teniendo en cuenta el orden en que se los visita?

b. ¿Y si no se tiene en cuenta el orden en que se los visita?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que los 3 departamentos elegidos sean "a estrenar"?

35. En un grupo de investigación formado por 6 mujeres y 4 hombres se deben elegir 3 personas para concurrir a tres congresos que se llevarán a cabo a lo largo del año. Cada persona puede ir a más de un congreso.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que a los dos primeros congresos concurran solo mujeres?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que a los dos primeros congresos concurran solo mujeres y al tercero solo hombres?

AUTOEVALUACIÓN

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Para cada problema seleccionen las opciones correctas.

1. Un candado con combinación tiene cinco cilindros con los números de 0 al 8.
¿Cuál es la probabilidad de girar los cilindros al azar y que el candado se abra?

a ☐ 0,000066137 b ☐ 0,000016935

c ☐ 59 049 d ☐ 15 120

2. Carlos debe rendir todo el programa de Geografía que tiene 8 unidades. Él solo pudo estudiar 5 de ellas. La profesora le va a preguntar sobre 3 unidades:
¿Cuál es la probabilidad de que a Carlos le toquen 3 unidades que estudió?

a ☐ 0,17857 b ☐ 56

c ☐ 10 d ☐ $\frac{1}{56}$

3. En cierto estudio sobre una enfermedad, a cada individuo se lo clasificó según dos criterios: está o no enfermo y pertenece o no a cierto grupo de riesgo para contraer esa enfermedad. Sobre la información obtenida se realizó una tabla de probabilidades.

	Está enfermo	No está enfermo	
Pertenece al grupo de riesgo	0,005	0,075	0,08
No pertenece al grupo de riesgo	0,003	0,917	0,92
	0,008	0,992	1

Esta tabla se interpreta del siguiente modo. La probabilidad de que un individuo no esté enfermo es 0,992. La probabilidad de que esté enfermo y pertenezca al grupo de riesgo es 0,005. Se selecciona una persona al azar y se sabe que pertenece al grupo de riesgo, ¿cuál es la probabilidad de que no sea portador de la enfermedad?

a ☐ 0,0756 b ☐ 0,075

c ☐ 0,9375 d ☐ Ninguna de las anteriores.

4. Mientras se desarrolla la elección a Presidente en un club, se toman datos sobre los votos a boca de urna. Los resultados se representan en la siguiente tabla:

CANDIDATO	VOTOS
Capuano	150
Drujera	130
Seoane	200
Otros	70

En función de los datos de la tabla, ¿cuál es la probabilidad de que un votante próximo a emitir su voto, opte por Seoane?

a ☐ $\frac{1}{200}$ b ☐ $\frac{4}{11}$

c ☐ $\frac{1}{550}$ d ☐ No puede saberse con los datos proporcionados.

5. A continuación se presenta una igualdad: $\binom{m}{0} = 1$
Indiquen la o las afirmaciones que consideren correctas:

a ☐ La igualdad es válida sólo para $m = 0$.

b ☐ La igualdad es válida para cualquier valor de m.

c ☐ La igualdad nunca se cumple.

6. El número combinatorio $\binom{m+1}{m}$ es igual a:

a ☐ m b ☐ $m!$

c ☐ $m + 1$ d ☐ Ninguno de los anteriores.

7. La siguiente tabla de goleadores corresponde al torneo organizado por la Asociación Deportiva Falta y Resto:

Jugador	Goles convertidos	Partidos Jugados
Cholito	30	31
El Negro	24	30
El Barba	20	29
Pérez	16	30
Juampi	12	32
El Carpo	11	10

¿Cuál es el jugador que más goles convirtió en proporción a la cantidad de partidos que jugó?

a ☐ Cholito b ☐ Juampi

c ☐ El Carpo d ☐ Ninguno de los anteriores

CONTENIDOS

- Límite y asíntotas
- Cálculo de límites
- Continuidad
- Derivadas
- Estudio de funciones
- Problemas de optimización

Varias de las características de diferentes tipos de funciones ya han sido estudiadas en este libro. Pero hay numerosas situaciones que demandan el tratamiento de funciones que resultan de combinar expresiones conocidas. Para estudiar el comportamiento de tales tipos de funciones es posible recurrir a las herramientas que provee el Análisis Matemático y que permiten saber, entre otras cuestiones, en qué valores del dominio la función crece o decrece, en donde están los máximos y los mínimos o dónde cambia de orientación su gráfica.

5 LÍMITES Y DERIVADAS

Problema 1

¿Cómo se podrá realizar un gráfico aproximado de la función: $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$?

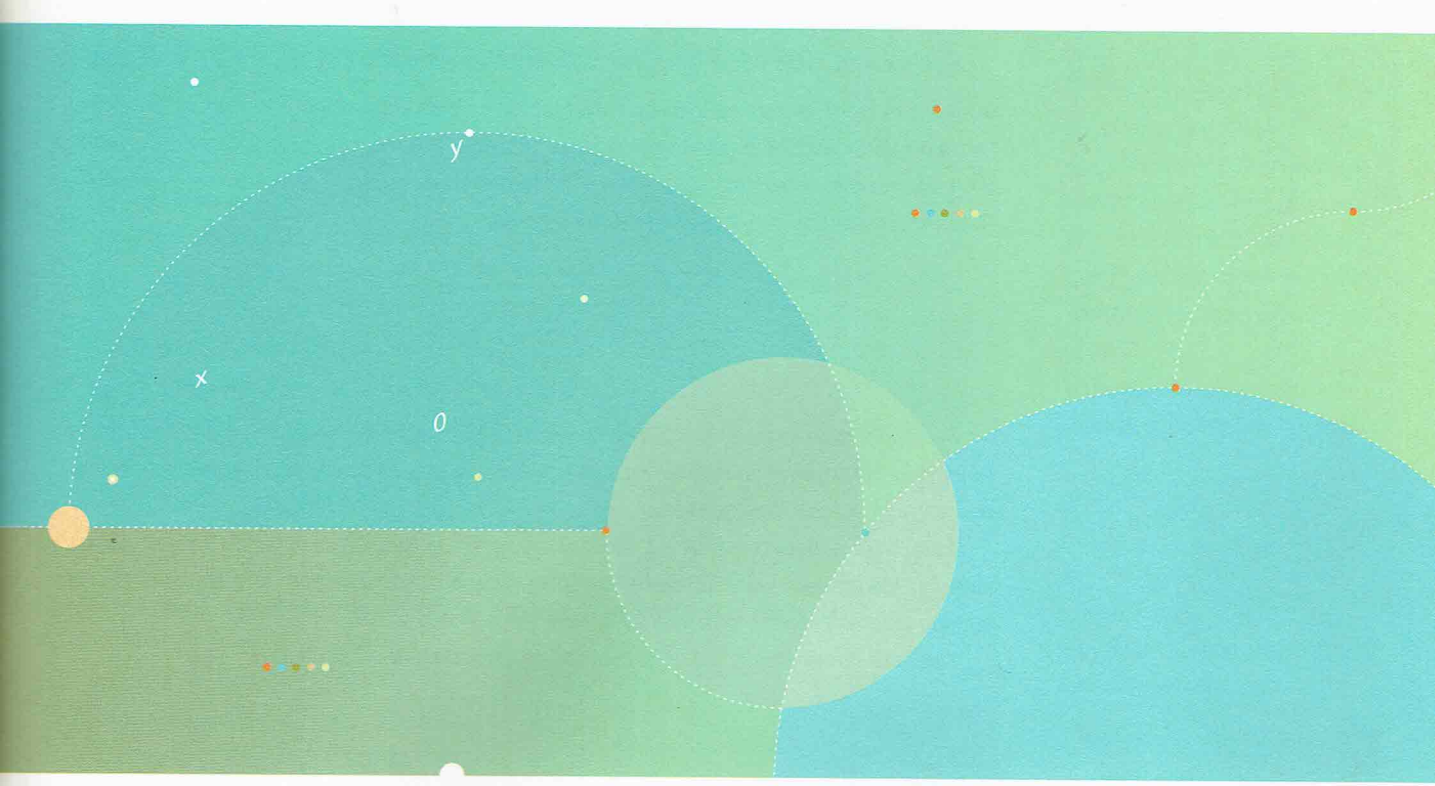
Problema 2

Una piedra que se lanza hacia arriba desde el suelo alcanza una altura f (en m) en función del tiempo (en segundos) que viene dada por la fórmula $f(t) = -5t^2 + 40t$. ¿Cuál es la velocidad a los 3 segundos?

Problema 3

Un agricultor tiene que delimitar una zona rectangular dentro de su campo para destinarla a cultivos. Si dispone de 120 metros de alambre para cercarla, ¿de qué dimensiones le conviene diseñar el sector para poder optimizar la producción?

Para poder resolver estos problemas, en este capítulo se propone el estudio de los conceptos de límite y derivada de funciones.



Para resolver el Problema 1 de la página anterior, se podría comenzar el trabajo intentando realizar una tabla de valores como la siguiente:

x	0	2	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	-3
$f(x)$	-1	3	3	-2	-2	$\frac{19}{8}$	$\frac{19}{8}$

Se puede pensar, de manera intuitiva que, cuando a x se le asignan valores muy grandes, del orden de los millones o miles de millones, sumar 1 en el numerador a $2x^2$ y restar 1 en el denominador a x^2 no afecta demasiado en el resultado. Es decir, para valores de x que se acercan al infinito, la función $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$ se parece bastante a $\frac{2x^2}{x^2}$, expresión que, se podría decir, es lo mismo que 2 (si $x \neq 0$). Este análisis intuitivo permite imaginar que la función, a medida que aumentan los valores de $|x|$, se va aproximando a 2, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$. En $y = 2$ hay una asíntota horizontal.

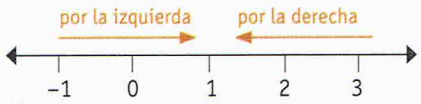
Para hallar el conjunto de positividad de $f(x)$ hay que resolver la inecuación $f(x) > 0$. Como un cociente es positivo cuando el numerador y el denominador tienen el mismo signo y el numerador de $f(x)$ es siempre positivo, se tiene:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x > 1 \text{ o } x < -1$$

Luego: $C^+ = (-\infty ; -1) \cup (1 ; +\infty)$; $C^- = (-1 ; 1)$

Por otro lado, es claro que x no puede ser ni 1 ni -1 pues se anularía el denominador. Es decir, $Dom\ (f) = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$

Por lo tanto, para poder imaginar un gráfico aproximado de $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$ es conveniente determinar qué ocurre con esta función cuándo x se va aproximando al 1 y al -1. Pero esta aproximación puede imaginarse de dos modos: por la izquierda (por valores menores, cada vez más próximos) o por la derecha (por valores mayores, cada vez más próximos). En la recta numérica que sigue se muestra esto para $x = 1$.

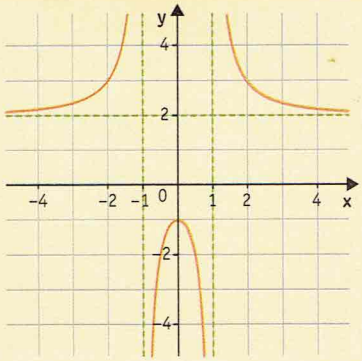


Para valores de x cercanos a 1, pero mayores, basta hacer unos cálculos para saber que la función va tomando valores cada vez más grandes. Lo mismo ocurre para valores de x cercanos a -1, pero desde la izquierda.

Pero, para valores cercanos a 1 desde la izquierda, la función es negativa y toma valores cada vez mayores en valor absoluto, entonces se acerca hacia menos infinito, de la misma manera que para valores cercanos a -1, pero por la derecha.

Con esta información, se puede esbozar un gráfico como el siguiente:

Este análisis intuitivo aún no da certeza de lo realizado. En lo que sigue, se presentan algunas cuestiones que permiten profundizar el estudio realizado.



Cuando en un cociente el numerador tiende a un número y el denominador tiende a ∞, la división tiende a 0.
En símbolos: Si $B \to \infty$ y A tiende a un número real, $\frac{A}{B} \to 0$

Concepto y cálculo de límites

En el libro Matemática 2 de esta serie se analizó que las funciones racionales pueden tener asíntotas verticales y horizontales. Un ejemplo de esto es $f(x) = \frac{1}{x+2} - 1$:

La curva tiene asíntota horizontal $y = -1$ porque

si $x \to \infty \Rightarrow x + 2 \to \infty \Rightarrow \frac{1}{x+2} \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{x+2} - 1 \to -1$

Luego

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -1$$

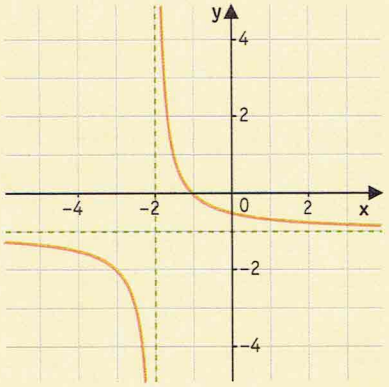
También tiene asíntota vertical $x = -2$ porque

si $x \to -2 \Rightarrow x + 2 \to 0 \Rightarrow \frac{1}{x+2} \to \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{x+2} - 1 \to \infty$

Luego

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \infty$$



Cuando en un cociente el numerador tiende a un número distinto de 0 y el denominador tiende a 0, la división tiende a infinito.
En símbolos: Si $A \to k$ $(k \neq 0)$ y $B \to 0$, $\frac{A}{B} \to \infty$
(el caso que ambos tienden a 0 se estudiará más adelante).

© Tinta fresca ediciones S.A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

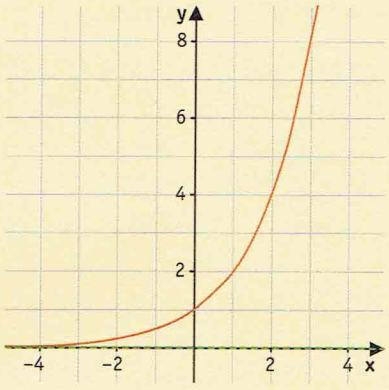
Las funciones exponenciales también tienen asíntotas horizontales.

Por ejemplo, $f(x) = 2^x$ tiene una asíntota horizontal a izquierda que es la recta $y = 0$ porque cuando x tiende a $-\infty$, las imágenes se acercan a 0. Esto se escribe

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

Pero como cuando x tiende a $+\infty$ las imágenes tienden a $+\infty$, la curva no tiene asíntota horizontal a derecha. Esto se simboliza

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

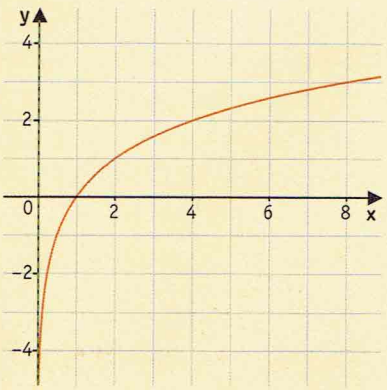


En cambio, las funciones logarítmicas pueden tener asíntotas verticales.

Por ejemplo, $f(x) = \log_2 x$ tiene una asíntota vertical a derecha que es la recta $x = 0$ porque cuando x tiende a 0 por la derecha, las imágenes tienden *a* $-\infty$. Esto se escribe

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty.$$

La curva no tiene asíntota vertical a izquierda porque ni siquiera está definida para valores menores que 0.



Límite finito en un punto

Al buscar asíntotas verticales ya se han calculado límites en un punto. Ahora se estudiarán otras situaciones que se presentan al intentar hallar el límite de una función cuando x tiende a un cierto valor.

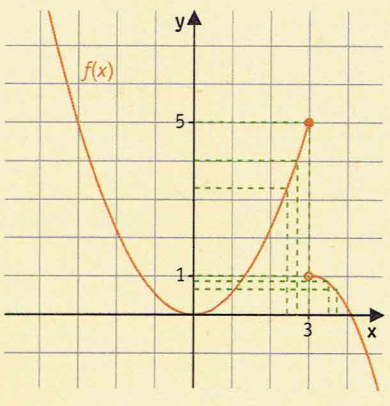
En la función f, a medida que los valores de x se acercan a 3 por la izquierda, las imágenes se acercan a 5. Luego,

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 5$$

Cuando x tiende a 3 por la derecha, las imágenes se acercan a 1. Por lo tanto

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 1$$

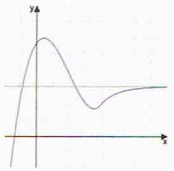
No existe, entonces, $\lim_{x \to 3} f(x)$



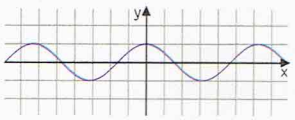
Cuando se cumple que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$, siendo b un número real, se dice que la recta $y = b$ es una asíntota horizontal al gráfico de f.

Si se cumple solo uno de estos límites, la asíntota horizontal es "a derecha" o "a izquierda", según el caso.

En ocasiones, una curva puede intersecar a la asíntota horizontal:



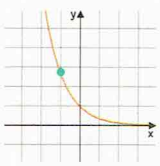
Hay funciones que no tienen límite en el infinito como $f(x) = \cos x$



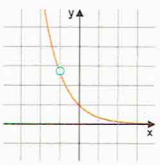
Cuando se cumple que $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, se dice que la recta $x = a$ es una asíntota vertical al gráfico de f. La asíntota vertical es "a derecha" si solo el límite en $x = a$ por la derecha es $+\infty$ o $-\infty$ y es solo "a izquierda" si solo el límite en $x = a$ por la izquierda es $+\infty$ o $-\infty$.

En ocasiones, interesa destacar en un gráfico que un punto pertenece o que no pertenece a él.

Si se quiere señalar que ese punto pertenece al gráfico se lo indica así:



En cambio, si no se quiere incluirlo, se indica de esta manera:



Como $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 5$ y $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 1$, es decir, los dos límites laterales son distintos, se dice que no existe $\lim_{x \to 3} f(x)$ (o que la función no tiene límite en $x = 3$) y que f es discontinua en $x = 3$.

Cuando se realiza el gráfico de la función f, es necesario "levantar el lápiz" al pasar por el valor $x = 3$. Esto sucede porque los límites laterales en ese valor son distintos. La función presenta una **discontinuidad** en $x = 3$.

En la función g, a medida que los valores de x se acercan a 4 por la izquierda, las imágenes se acercan a 3.

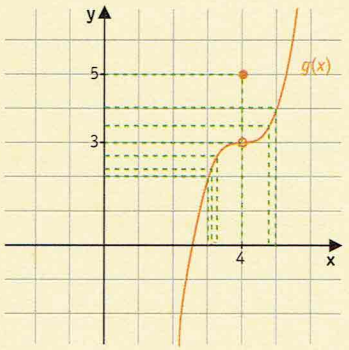
$$\lim_{x \to 4^-} g(x) = 3$$

Cuando x tiende a 4 por la derecha, las imágenes se acercan también a 3.

$$\lim_{x \to 4^+} g(x) = 3$$

Entonces, $\lim_{x \to 4} g(x) = 3$

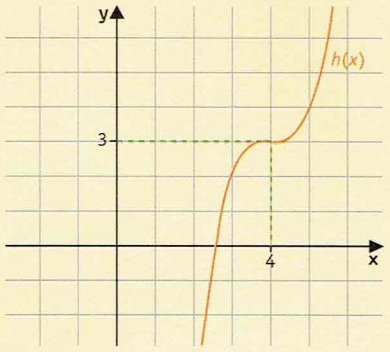
Sin embargo, $g(4) = 5$.



En la función g se cumple que $\lim_{x \to 4^-} g(x) = 3$ y $\lim_{x \to 4^+} g(x) = 3$. Esto dos resultados pueden sintetizarse en uno: $\lim_{x \to 4} g(x) = 3$. Como este límite no coincide con $g(4)$, pues $g(4) = 5$, la función es **discontinua** en $x = 4$.

Tampoco puede graficarse la función g de un solo trazo. Es necesario "levantar el lápiz" al pasar por $x = 4$. Esto no se debe a que los límites laterales son distintos como en la función f, sino a que el límite no coincide con el valor de la imagen en $x = 4$. Por este motivo, g también presenta una **discontinuidad** en $x = 4$.

Si se pensara en una nueva función, coincidente con g en todos los valores menos en $x = 4$ y que, en $x = 4$ la imagen no fuera 5 sino 3, el gráfico de esta nueva función h podría ser como el siguiente:



En esta función h, a medida que los valores de x se acercan a 4 por la izquierda, las imágenes se acercan a 3. Luego, $\lim_{x \to 4^-} h(x) = 3$

Y cuando x tiende a 4 por la derecha, las imágenes se acercan también a 3. Entonces, $\lim_{x \to 4^+} h(x) = 3$

Luego

$$\lim_{x \to 4} h(x) = 3$$

Cuando en un valor $x = a$ una función cumple que:

- existe el límite en $x = a$ (es decir que ambos límites laterales dan el mismo número finito);
- existe la imagen de a;
- el límite y la imagen en ese punto coinciden;

la función es **continua** en $x = a$.

Pero además, la imagen de 4 también es 3, esto es $h(4) = 3$. Al coincidir los límites laterales entre sí y con la imagen, el gráfico de la función h sí puede realizarse de un solo trazo. Esta función es **continua** en $x = 4$.

ACTIVIDADES

1. Construyan un gráfico aproximado de la función $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4} + 2$. Indiquen las asíntotas horizontales y verticales.

2. En cada caso, realicen un gráfico aproximado de una función que cumpla con las características enunciadas:

a. Tiene asíntota horizontal en $y = 4$, su límite, cuando x tiende a 4 por derecha es $-\infty$ y por izquierda es $+\infty$.

b. El límite cuando x tiende a $+\infty$ y a $-\infty$ es 0. Tiene asíntota vertical en $x = 0$ y en $x = -4$. El límite cuando x tiende a 0 es $-\infty$ y el límite cuando x tiende a -4 también es $-\infty$.

c. La función en $x = 0$ es 1. El límite cuando x tiende a $+\infty$ es $+\infty$. El límite cuando x tiende a $-\infty$ es 0 y el límite cuando x tiende a 0 por izquierda es $-\infty$.

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Límites en funciones definidas por fórmulas

Calcular límites en funciones dadas por fórmulas puede ser más complejo que en gráficos.

Problema 4

Calcular el límite de la función $f(x)=\begin{cases} -3x & \text{si } x \leq 4 \\ 2x-1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$ en $x = 4$.

Se puede armar una tabla de valores para x tendiendo a 4 por izquierda y otra para x tendiendo a 4 por derecha, eligiendo la parte de la fórmula que corresponde a cada límite y aproximando los resultados, se obtiene lo siguiente:

x	3,9	3,99	3,999	3,9999
$f(x)=-3x$	−11,7	−11,97	−11,997	−11,9997

x	4,1	4,01	4,001	4,0001
$f(x)=2x-1$	7,2	7,02	7,002	7,0002

Puede intuirse, a partir de la tabla, que: $\lim_{x \to 4^-} f(x) = -12$ y que $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 7$, por lo que no existe $\lim_{x \to 4} f(x)$ y en $x = 4$ la función es discontinua esencial, sin importar que uno de los límites coincide con la imagen de 4.

Hay dos tipos de discontinuidades. Si el límite existe, la **discontinuidad** se llama **evitable** y si el límite no existe, o da infinito la **discontinuidad** se llama **esencial**.

Problema 5

Calcular $\lim_{x \to -2} f(x)$ para $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \neq -2 \\ 3 & \text{si } x = -2 \end{cases}$

Para números próximos a −2, tanto por izquierda como por derecha, la parte de la fórmula que sirve es siempre la primera. Si se arman un par de tablas de valores (con resultados aproximados):

x	−2,1	−2,01	−2,001	−2,0001
$f(x)=x^2+1$	5,41	5,0401	5,004001	5,00040001

x	−1,9	−1,99	−1,999	−1,9999
$f(x)=x^2+1$	4,61	4,9601	4,996001	4,99960001

se puede observar que: $\lim_{x \to -2^-} f(x) = 5$ y que $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 5$, por lo que $\lim_{x \to -2} f(x) = 5$.
Pero como $f(-2)$ no vale 5 sino 3, en $x = -2$ la función es discontinua evitable.

3. Inventen la expresión de una función dada por tramos de manera tal que se cumpla que el límite cuando x tiende a 0, tanto por derecha como por izquierda, sea 0, pero que la función en 0 valga − 1.

ACTIVIDADES

Otros aspectos del cálculo de límites

Hasta ahora el recurso usado para calcular límites fue confeccionar tablas con varios valores como sea necesario para inferir la tendencia de las imágenes. Este método no es siempre útil. Hay un recurso más práctico para calcular límites que se analiza en los ejemplos que siguen.

Problema 6

Para $f(x) = 4x - 1$, calcular $\lim_{x \to 2} f(x)$.

Si una función h es continua en a entonces $\lim_{x \to a} h(x) = h(a)$.

- la función f es lineal;
- las funciones lineales son continuas en todos sus puntos;
- si una función es continua, entonces el límite y la imagen coinciden siempre;
- calcular la imagen consiste solo en realizar un cálculo;

Entonces, para el caso de funciones continuas se calcula la imagen y ese valor también es el límite.

Luego, $\lim_{x \to 2} f(x)$ tiene el mismo valor que $f(2)$.

Si se sabe que la función es continua en el punto en que se quiere buscar un límite, entonces límite e imagen coinciden. Por lo tanto, puede buscarse la imagen y ese valor será el límite.

Como $f(2) = 7$ y f es continua en $x = 2$, también se cumple que $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$.

Este recurso puede llevarse más allá de situaciones como la anterior.
Por ejemplo, a funciones de las que no se conoce demasiado de su gráfico.

Problema 7

En $f(x) = \frac{3x^2}{x - 1}$, ¿qué valor tiene $\lim_{x \to 3} f(x)$?

La función f es racional. Aunque no puede imaginarse su gráfico, sí se sabe que solo presenta discontinuidades en los valores que no pertenecen al dominio; en todos los otros es continua. Entonces, como el único número que no pertenece al dominio es el 1, en $x = 3$ la función es continua.

Luego, $\lim_{x \to 3} f(x)$ es igual a $f(3)$, que vale $\frac{27}{2}$.

Y más aún, el recurso puede adaptarse a funciones dadas por partes:

Problema 8

Si $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ -4x + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, ¿cuál es el valor de $\lim_{x \to 1} f(x)$?

La función f está compuesta por dos tramos lineales (funciones que no tienen discontinuidades). Por lo tanto, el único posible punto de discontinuidad estará en el "valor de cambio" de la fórmula: $x = 1$.

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Pero como ambas funciones lineales por separado son continuas, los límites por izquierda o por derecha en cualquiera de sus puntos darán lo mismo que la imagen.

Luego,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -4 \cdot 1 + 3 = -1,$$

por lo que no existe $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Vale destacar que lo realizado es una estrategia para calcular límites rápidamente y supone "desarmar" la función f en dos funciones (serían $g(x) = 2x - 1$ y $h(x) = -4x + 3$, pensándolas como funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$). Si, por algún motivo, hubiera sido necesario calcular $f(1)$ solo habría que decidir en cuál de las dos partes de la fórmula está permitido reemplazar a x por 1 (en este caso, en la segunda) y su valor sería -1.

Límite y continuidad

El concepto de límite es complejo. A continuación se presenta una síntesis en la que se exponen en posibles dificultades que surgen al estudiarlo.

- La imagen de un número a informa cuál es el valor de y cuando x vale a a través de una función. La imagen es un concepto que solo toma en cuenta lo que sucede en el punto.
- El límite cuando x tiende a a informa sobre la tendencia de los valores de y que están en las proximidades de a, sin importar lo que sucede en $x = a$. El límite es un concepto que toma en cuenta lo que sucede en las cercanías del punto y es independiente de lo que suceda en él.
- Límite e imagen pueden estudiarse en conjunto dando origen a los conceptos de continuidad y discontinuidad. Cuando límite e imagen son iguales (esto es, coincide lo que sucede en el punto con lo que sucede en sus cercanías), la función es continua en ese punto. Cuando no coinciden, la función es discontinua en ese punto (evitable, si existe el límite y esencial, cuando no existe o da ∞)
- Algo que puede ocasionar confusiones es que, muchas veces, el límite se calcula buscando una imagen. Pero esto se debe a que hay certeza de que la función es continua en ese punto; entonces, límite e imagen son iguales. Como es más fácil buscar imágenes, se utiliza ese recurso.

La idea de límite puede colaborar para anticipar qué forma tendrá un gráfico, si existen o no asíntotas verticales y horizontales y ayuda a predecir el comportamiento de una función en valores del dominio que resultan difíciles o imposibles de determinar en un gráfico.

ACTIVIDADES

4. Calculen los siguientes límites:

a. $\lim_{x \to 0} \frac{4 - x}{x^2 - x}$ **b.** $\lim_{x \to 2} \frac{1 - x}{x - 2}$ **c.** $\lim_{x \to +\infty} 4^x$ **d.** $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$

e. $\lim_{x \to 2^+} \log_2 (x - 2)$ **f.** $\lim_{x \to +\infty} \frac{6}{x^2 - 2}$ **g.** $\lim_{x \to \infty} \frac{-2}{x - 3} + 4$

5. Encuentren y clasifiquen los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq 3 \\ -2x & \text{si } x < 3 \end{cases}$ **b.** $g(x) = \begin{cases} 2 \text{ si } x \neq 4 \\ -1 \text{ si } x = 4 \end{cases}$

Límites indeterminados

Problema 9

Para las funciones $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $g(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$ y $h(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1}$, ¿cuánto valen $\lim_{x \to 2} f(x)$, $\lim_{x \to 3} g(x)$ y $\lim_{x \to 1} h(x)$?

En estos casos no funciona el recurso de buscar la imagen porque justamente en ellos se pide el límite en un valor para el cual no es posible calcular su imagen (cada valor anula el denominador de su fórmula) y, por lo tanto, las funciones no son continuas en esos puntos.

Pero estos casos también son diferentes a los estudiados anteriormente, en los cuales, cuando el denominador tiende a 0, la división tiende a ∞. Cuando se analizó esa situación se planteó que el numerador no debía tender a 0 (y que eso se estudiaría luego) y justamente en estos casos los tres numeradores tienden a 0 cuando x tiende a cada uno de los valores pedidos.

Si se transforma cada una de las expresiones en otras equivalentes se tiene:

$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$	$f(x) = \frac{(x-2).(x+2)}{x-2}$	$f(x) = x + 2$ si $x \neq 2$
$g(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$	$g(x) = \frac{x \cdot (x-3)}{x-3}$	$g(x) = x$ si $x \neq 3$
$h(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1}$	$h(x) = \frac{x-1}{(x-1)^2}$	$h(x) = \frac{1}{x-1}$ si $x \neq 1$

Las tres simplificaciones son válidas para cualquier número excepto para uno (el 2, el 3 y el 1 que son los que anulan cada denominador) y justamente en ese valor se quiere calcular el límite. Recordando que en un límite **no interesa lo que pasa en el valor** sino en sus adyacencias, puede considerarse para los valores que interesa analizar (los próximos a ellos) que, la función original y la que resultó de simplificarla, son iguales.

Entonces:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = \lim_{x \to 3} x = 3$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{(x - 1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x - 1} = \infty$$

Estos tres resultados están justificando por qué el caso del límite de $\frac{A}{B}$ cuando A y B tendían a 0 se excluyó de lo estudiado antes. En límites como éstos no es posible predecir el resultado (los tres anteriores dieron 4, 3 y ∞).

Se dice que estos límites están, en principio, indeterminados.

© Tinta fresca ediciones S.A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Problema 10

Para las funciones $f(x) = \frac{x-4}{x^2-1}$, $g(x) = \frac{x^2-x+3}{x-2}$ y $h(x) = \frac{2x^3-x}{3x^3-1}$, ¿cuál será el límite en el infinito?

Los tres denominadores tienden a infinito. Como los tres numeradores también tienden a infinito, no puede aplicarse ninguno de los resultados conocidos.

Para resolverlos puede aplicarse la siguiente estrategia: extraer como factor común "x elevado a la mayor potencia" que aparezca en el numerador y denominador de la fórmula, simplificar y, en la expresión que resulte, calcular el límite:

Para $f(x)$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-4}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{0}{1} = 0$$

Para $g(x)$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+3}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\cdot\left(1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)} = \infty$$

Para $h(x)$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-x}{3x^3-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\cdot\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\cdot\left(3-\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(3-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2}{3}$$

Los tres casos analizados son límites de la forma $\frac{A}{B}$ cuando A y B tienden ambos a infinito y los resultados obtenidos (0, ∞ y $\frac{2}{3}$) confirman que es otro caso de límites indeterminados.

Por lo analizado hasta aquí puede concluirse que:

- Si $\lim_{x\to a} A(x) = \lim_{x\to a} B(x) = 0$ entonces $\lim_{x\to a} \frac{A(x)}{B(x)}$ está, en principio, indeterminado. Para resolverlo hay que transformar la expresión $\frac{A(x)}{B(x)}$ en otra equivalente. Si A(x) y B(x) son polinomios, es posible escribirlos en su forma factorizada y simplificar la expresión.

- Si $\lim_{x\to\infty} A(x) = \lim_{x\to\infty} B(x) = \infty$ entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{B(x)}$ está, en principio, indeterminado. Para resolverlo hay que transformar la expresión $\frac{A(x)}{B(x)}$ en otra equivalente. Si A(x) y B(x) son polinomios, es posible escribirlos sacando factor común "x elevado a la máxima potencia" y simplificar la expresión.

Esta técnica puede aplicarse al límite en el infinito para los polinomios:

Si $x\to\infty$:

$$-2x^4+x^3-x = -2x^4\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}$$

$-2x^4 \to -\infty$; $\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right) \to 1$

El límite da $-\infty$ y este proceso justifica que el límite en el infinito de un polinomio coincide con el límite en el infinito del término de mayor grado.

ACTIVIDADES

6. Determinen el límite de las siguientes funciones en aquellos valores que no forman parte del dominio:

a. $f(x) = \frac{3x-3}{x-1}$ **b.** $g(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}$ **c.** $h(x) = \frac{x+2}{x^2+x-2}$

7. Para las funciones anteriores escriban las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.

8. Calculen los siguientes límites:

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x}{x^3-1}$ **b.** $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4-x+1}{x^3-3}$ **c.** $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{2x^2-x+2}$

d. $\lim_{x\to-4} \frac{x^2-16}{x+4}$ **e.** $\lim_{x\to0} \frac{x^2-x}{x^3+x}$ **f.** $\lim_{x\to-1} \frac{x^2+x}{x^3-x}$

El concepto de derivada

El concepto de **derivada** es uno de los principales en la rama de la Matemática que se conoce como Análisis Matemático. Con ellas, puede estudiarse el comportamiento de cualquier función y resolver muchas situaciones concretas como problemas de optimización.

Interpretación física

Si se retoma el Problema 2 de la página 110:

> Una piedra que se lanza hacia arriba desde el suelo alcanza una altura f (en m) en función del tiempo (en segundos) que es dada por la fórmula $f(t) = -5t^2 + 40\,t$. ¿Cuál es la velocidad a los 3 segundos?

La velocidad media de un móvil se obtiene haciendo el cociente entre la variación de la posición y la variación del tiempo. Si se disminuye la variación del tiempo, es posible acercarse a la velocidad instantánea. Es decir, la velocidad instantánea de un móvil en un tiempo a es el resultado de:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

donde $f(t)$ representa la distancia a la que se encuentra el móvil respecto de un punto fijo a los t segundos.
Por lo tanto, pensando en el problema, la velocidad a los 3 segundos se puede obtener de la siguiente manera:

$f(3+h) = -5 \cdot (3+h)^2 + 40 \cdot (3+h)$	Se reemplaza t por $3+h$.
$f(3+h) = -5 \cdot (9 + 6h + h^2) + 120 + 40h$	Se aplica la propiedad distributiva y el cuadrado del binomio.
$f(3+h) = -45 - 30h - 5h^2 + 120 + 40h$	Se vuelve a aplicar la propiedad distributva.
$f(3+h) = -5h^2 + 10h + 75$	Se opera y simplifica.

Como además $f(3) = -5 \cdot 3^2 + 40 \cdot 3 = 75$, se tiene:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-5h^2 + 10h + \cancel{75} - \cancel{75}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5h\,(-h+2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 5(-h+2) = 10$$

La velocidad instantánea a los 3 segundos es 10 m/s.
Este resultado es la **derivada** de la función f en $t = 3$. Es decir, la derivada de $f(t)$ en $t = 3$ es 10, que suele escribirse de la siguiente manera: $f'(3) = 10$ lo que significa que la velocidad a los 3 segundos es 10 m/seg.

Si se repite el procedimiento, con solo cambiar el valor de t podría calcularse la velocidad en cualquier otro instante.

La **derivada** de una función f en $x = a$ es:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

y el resultado de este límite es la velocidad instantánea en a.

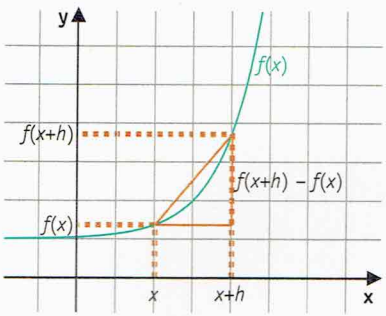
© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Interpretación gráfica

¿Qué representa gráficamente el cociente $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *al cual se le aplica el límite?*

El cociente $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se denomina cociente incremental.

El siguiente gráfico representa una función f y la variación media en un punto x para un incremento h.



La pendiente de una recta es: $m = \frac{a}{b} \rightarrow \frac{\text{variación de las ordenadas}}{\text{variación de las abscisas}}$ de dos cualesquiera de sus puntos.

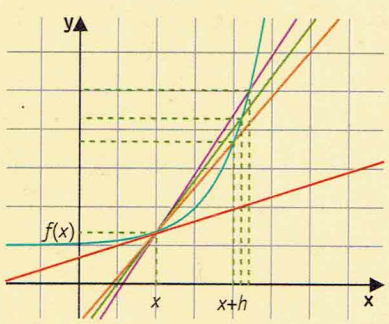
Si se toman los puntos $(x\,;\,f(x))$ y $(x+h\,;\,f(x+h))$, resulta $a = f(x+h) - f(x)$ y $b = x+h-x = h$ por lo tanto, $m = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ es la pendiente de la recta que une los puntos $(x\,;\,f(x))$ y $(x+h\,;\,f(x+h))$. Este valor coincide con la variación media.

Pero si h es cada vez más chico, las variaciones medias tienden a $f'(x)$, es decir, que las pendientes de esas rectas tienden a la ***derivada*** **de** f en el punto x.

¿Cómo se interpreta geométricamente?

Esas rectas secantes, cuando el incremento h es muy pequeño, se acercarán a la **recta tangente** al gráfico de f.

Es decir, la derivada de $f(x)$ en $x = a$ es la pendiente de la recta tangente en a.
Para hallar la ecuación de la recta tangente, si ya se conoce la pendiente, hay que tener presente que contiene al punto $(a\,;f(a))$.



La pendiente de la recta tangente a una curva en un punto es la derivada de la función en ese punto.

La recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es la que tiene por pendiente a $f'(x)$ y contiene al punto $(a\,;f(a))$.

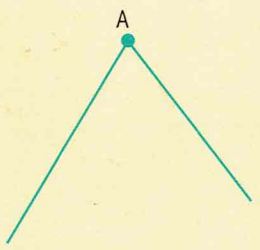
9. El seguimiento realizado en boxes de un auto de Fórmula 1 dio que en un intervalo de 4 segundos la distancia recorrida (en m) en función del tiempo (en segundos) respondió a la fórmula $d(t) = 20\,t^2 + 5$. ¿Cuál fue su velocidad a los 2 segundos?

ACTIVIDADES

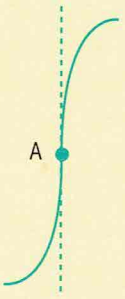
Continuidad y derivabilidad

Este tipo de puntos en donde la función es continua pero no tiene tangente se llaman **puntos angulosos**.

La curva dibujada a la derecha no tiene recta tangente en el punto A porque las pendientes de las rectas secantes no tienden por izquierda y derecha a un mismo número, o también, las secantes no confluyen por ambos lados a una única recta.
Como son dos tramos lineales, por la izquierda es siempre un valor positivo (el de la pendiente de una de las rectas) y por la derecha es siempre un valor negativo (el de la pendiente de la otra recta).
Por lo tanto, no existe la derivada en ese valor.



La curva de la derecha tiene recta tangente vertical en el punto A. Como las rectas verticales no tienen pendiente, en este punto hay tangente pero no hay derivada (porque la derivada es la pendiente de ella). Éste es un caso en el que la tangente no deja la curva "toda de un mismo lado" respecto de ella, sino que la "atraviesa".



Dos interrogantes:
Si una función es derivable en un punto, ¿es continua en ese punto?
Si una función es continua en un punto, ¿es derivable en ese punto?

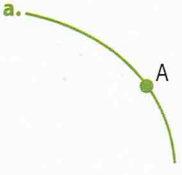
En los puntos analizados en los gráficos anteriores, la función es continua pero no tiene derivada. Pero, para que una función tenga derivada en un punto, es necesario que sea continua en él, porque si hubiera una discontinuidad sería imposible trazarle la tangente.

Por lo tanto, es cierto que si una función es derivable entonces es continua, pero no es cierto que si una función es continua, entonces es derivable.

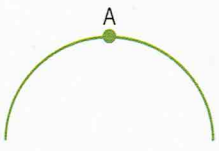
ACTIVIDADES

10. Para cada una de las siguientes curvas, tracen aproximadamente, cuando sea posible, la tangente en el punto A:

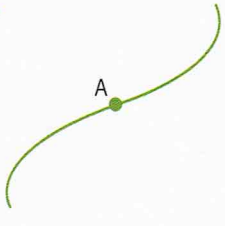
a.



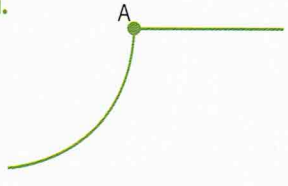
b.



c.



d.



© Tinta fresca ediciones S.A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

La función derivada

Si se pretende calcular la derivada de una función en varios de sus puntos, hay que aplicar varias veces el mismo procedimiento cambiando solo el valor de x.

¿Será posible encontrar una forma de no tener que realizar el cálculo de la derivada para cada uno de los puntos, repitiendo el procedimiento cada vez? ¿Qué sucede si se lo hace una sola vez para un valor x cualquiera?

La función derivada de $f(x) = 3x^2 - 1$ en un valor x cualquiera puede calcularse del siguiente modo:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)^2 - 1 - (3x^2 - 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(x^2 + 2xh + h^2) - 1 - 3x^2 + 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - 3x^2 + 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h(2x + h)}{h} = \lim_{h \to 0} 3(2x + h) = 6x$$

Se obtuvo que $f'(x) = 6x$. Esta fórmula informa que la derivada de la función f en un valor x cualquiera vale $6x$. Esta fórmula es la función derivada de f.

Al asignar un valor a x puede calcularse su derivada.
Por ejemplo, cuando x vale -1, $f'(-1) = 6 \cdot (-1) = -6$.

Dada una función f, la función que da la derivada para todos los valores posibles de x se llama **función derivada de f** y se la simboliza f'.

Problema 11

¿Cuál es la función derivada de $f(x) = 4x + 3$?

Para hallar la función derivada de una función debe aplicarse la definición para un valor x cualquiera:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4(x+h) + 3 - (4x + 3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4x + 4h + 3 - 4x - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h}{h} = \lim_{h \to 0} 4 = 4$$

Resultó que $f'(x) = 4$, es decir, una función constante. Esto se debe a que la función $f(x)$ es lineal y la tangente a una recta en cualquier punto es la misma recta y, por lo tanto, la pendiente de la tangente coincide con la pendiente de la recta en todos los puntos.

ACTIVIDADES

11. Hallen la función derivada de las siguientes funciones:
$f(x) = 5x - 2$ $g(x) = 2x^2 - x + 1$
$h(x) = \frac{2}{x}$ $t(x) = x^3 - 2$

12. Si $f(x) = x^2 - 9$. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es la de una recta tangente a la parábola? Justifiquen.
a. $y = 2x - 10$ **b.** $y = 2x$ **c.** $y = 9x$

13. Escriban la fórmula de una función cuadrática que pueda tener como recta tangente en alguno de sus puntos la recta de ecuación $y = 2x + 1$. ¿Hay una única posibilidad?

14. Escriban la fórmula de una función cuadrática de manera tal que su recta tangente en el punto $(0\,;0)$ sea paralela al eje de las x. ¿Hay una única posibilidad?

15. ¿Es cierto que la recta tangente a la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto $(1\,;1)$ es $y = -x + 1$? Justifiquen.

Cálculo de derivadas

Las reglas de derivación se obtienen aplicando la definición de derivada a funciones expresadas en forma general (no se demostrará su validez por requerir de conocimientos que no han sido desarrollados).

Pese a que ya se dispone de una forma de obtener la derivada en todos los puntos para una misma función, resulta laborioso aplicar la definición cada vez que se necesite su cálculo. Para evitar esto, hay "reglas de derivación" que permiten obtener rápidamente la función derivada de cualquier función.

Derivada de las funciones elementales

Por ejemplo si $f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^6$

Derivada de las funciones elementales:

$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$

$f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$

$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$

$f(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x \cdot \ln e = e^x$

$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\ln a \cdot x}$

$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\ln e \cdot x} = \dfrac{1}{x}$

Hay funciones que mediante transformaciones algebraicas convenientes en su fórmula responden al formato de alguna regla. Por ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3}$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Derivada de una suma

La derivada de una suma (o resta) de dos funciones es la suma (o resta) de las derivadas de cada función.

Derivada de una suma o una resta:

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

Por ejemplo: $f(x) = x^4 - x^3 + 2^x \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2^x \ln 2$

Derivada de una constante por una función

La derivada de una constante por una función es el producto de la constante por la derivada de la función.

Derivada de una constante por una función:

$(k \cdot f)' = k \cdot f'$

Ejemplos:

$f(x) = 3 \cdot \cos x \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot (\cos x)' = 3 \cdot (-\operatorname{sen} x) = -3 \operatorname{sen} x$

$f(x) = \dfrac{e^x}{3} = \dfrac{1}{3} \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{3} \cdot (e^x)' = \dfrac{1}{3} \cdot e^x$

$f(x) = 3x^4 - 2x^3 - x \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot 4 \cdot x^3 - 2 \cdot 3x^2 - 1 \cdot x^0 = 12x^2 - 6x^2 - 1$

Algunas consecuencias de estas reglas, que dan mayor rapidez en el cálculo de derivadas, son:

- La derivada de una función constante es 0.

  Siendo $k \in \mathbb{R}$, si $f(x) = k = k \cdot x^0 \Rightarrow f'(x) = k \cdot 0 \cdot x^{-1} = 0$

- La derivada de una función lineal $f(x) = m \cdot x + b$ es $f'(x) = m$.

  $f(x) = m \cdot x + b = m \cdot x + b \cdot x^0 \Rightarrow f'(x) = m \cdot 1 \cdot x^0 + b \cdot 0 \cdot x^{-1} = m + 0 = m$

Derivada de una multiplicación

La derivada de una multiplicación de dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda función (sin derivar) más la segunda (sin derivar) por la derivada de la primera.

Derivada de una multiplicación:

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Por ejemplo: $f(x) = x^3 \cdot \operatorname{sen} x$

$f'(x) = (x^3)' \cdot \operatorname{sen} x + x^3 \cdot (\operatorname{sen} x)' = 3x^2 \cdot \operatorname{sen} x + x^3 \cdot \cos x$

© Tinta fresca ediciones S.A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Derivada de una división

La derivada de una división de dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda función (sin derivar) menos la segunda (sin derivar) por la derivada de la primera; todo dividido por el cuadrado de la segunda función.

Derivada de la división:
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$
siempre que $g(x) \neq 0$.

Por ejemplo:

- $f(x) = \frac{x^2}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2)' \cdot \cos x - x^2 \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{2x \cdot \cos x - x^2 \cdot (-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2}$

- $f(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2' \cdot x - 2 \cdot x'}{x^2} = \frac{0 \cdot x - 2 \cdot 1}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$

Esta derivada también se puede calcular de otra forma:

$$f(x) = \frac{2}{x} = 2 \cdot x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$$

La regla de la cadena

Conocidas las derivadas de las funciones elementales y de las operaciones entre ellas, falta estudiar cómo derivar un tipo especial de funciones.

¿Cuál será la derivada de $h(x) = (5x^2 + 3x + 1)^5$?

Considerando $f(x) = x^5$ y $g(x) = 5x^2 + 3x + 1$, la función h puede pensarse como:

$$x \to g(x) \to f(g(x))$$

Esto es, a cada valor de x se le aplica primero la función g y al resultado se le aplica la función f.

$$f(g(x)) = f(5x^2 + 3x + 1) = (5x^2 + 3x + 1)^5$$

La derivada de una función compuesta es la derivada de la función "externa" evaluada en la función "interna" multiplicada por la derivada de función "interna":

$$h'(x) = 5 \cdot (x^2 + 3x + 1)^4 \cdot (x^2 + 3x + 1)' = \underbrace{5 \cdot (x^2 + 3x + 1)^4}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{(2x + 3)}_{g'(x)}$$

Dadas dos funciones f y g, la que se resulta de aplicar primero g y luego f a cada valor de x es $f(g(x))$ y se llama **función compuesta de f y g**.
La derivada de la función compuesta $f(g(x))$ es:
$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

La función $t(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ también puede pensarse como $f(g(x))$, siendo $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x^2$ porque $f(g(x)) = f(x^2) = \operatorname{sen}(x^2)$

$$t'(x) = \cos(x^2) \cdot (x^2)' = \underbrace{\cos(x^2)}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{2x}_{g'(x)}$$

Otros ejemplos de aplicación de la regla de la cadena:

- $f(x) = \cos^2 x = (\cos x)^2 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \cos x \cdot (\cos x)' \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \cos x \cdot (-\operatorname{sen} x)$
- $f(x) = \ln(x^2 - 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \cdot (x^2 - 1)' \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \cdot 2x$
- $f(x) = e^{2x+3} \Rightarrow f'(x) = e^{2x+3} \cdot (2x + 3)' \Rightarrow f'(x) = e^{2x+3} \cdot 2$
- $f(x) = \cos(x \cdot e^x) \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen}(x \cdot e^x) \cdot (x \cdot e^x)' \Rightarrow$
- $\Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen}(x \cdot e^x) \cdot (1 \cdot e^x + x \cdot e^x) = -\operatorname{sen}(x \cdot e^x) \cdot (e^x + x \cdot e^x)$

16. Hallen la función derivada de las siguientes funciones:

$f(x) = x^4 - x^6 - 1$ $\quad g(x) = 2x^4 - 3x^2 - x^3$ $\quad h(x) = 5 \cdot 6^x$

$p(x) = \frac{1}{4} \cdot \ln x$ $\quad q(x) = 3e^x - 2 \operatorname{sen} x$

17. Determinen, en cada caso, la ecuación de la recta tangente a la función en el punto que se propone:

a. $f(x) = 2x$ en el punto $(1 ; 2)$ $\quad$ **b.** $g(x) = \operatorname{sen} x$ en el punto $(\frac{\pi}{2} ; 1)$

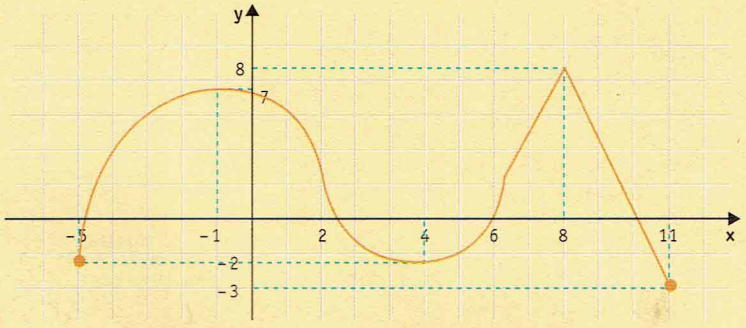
Estudio de funciones

Extremos de una función. Crecimiento y decrecimiento

Las derivadas son una herramienta para hallar los valores máximos y mínimos que tiene una función.

Problema 12

El gráfico que sigue corresponde a una función $f : [-5,11] \to \mathbb{R}$.



Hallar los valores de x para los cuales y toma los valores máximos y mínimos. Analizar las condiciones que cumplen estos puntos.

El valor de x que tiene por imagen el mayor valor de y se llama **máximo absoluto** y el que tiene por imagen el menor valor de y se llama **mínimo absoluto** de la función f.
Cuando esto sucede solo en un intervalo del dominio se dice que ese valor es un **máximo (o mínimo) local** de la función f.
Los máximos y los mínimos se llaman genéricamente **extremos.**

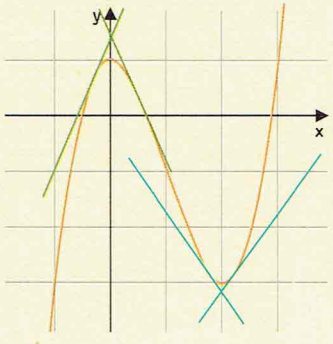
Como se observa en el gráfico, f tiene un máximo local en $x = -1$, otro en $x = 8$ y tres mínimos locales en $x = 4$, $x = -5$ y $x = 11$. Además en $x = 8$ está el máximo absoluto, mientras que en $x = 11$ está el mínimo absoluto de f.

La recta tangente en $x = -1$ o en $x = 4$ es horizontal, es decir que $f'(-1) = 0$ y $f'(4) = 0$. En $x = 8$, la recta tangente no existe, por lo que $f'(8)$ tampoco.

En los casos analizados la derivada vale 0 o no existe.

Pero, *¿cómo se distingue si es máximo o mínimo?*

En las cercanías de un máximo, para valores menores, las tangentes tienen siempre pendiente positiva y para valores mayores tienen siempre pendiente negativa.
En las cercanías de un mínimo, en cambio, a la izquierda la pendiente de las tangentes es negativa y a la derecha positiva.



Los extremos de una función se pueden dar en:

- valores en los que la derivada vale 0;
- valores en los que la función existe pero la derivada no;
- valores pertenecientes a los extremos del intervalo del dominio, si la función tiene por dominio un intervalo cerrado.

Estos valores de x se llaman **puntos críticos** de una función.

$x = -5$ y $x = 11$ también son extremos (mínimos en este caso) por ser los puntos "borde" del dominio de la función.

Sin embargo, los puntos críticos de una función no son necesariamente extremos.

La función polinómica $f(x) = x^3$ tiene derivada $f'(x) = 3x^2$.

Pese a que en $x = 0$, la derivada vale 0, la función no tiene un extremo en ese valor, como puede verse en el gráfico.

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

¿Cómo se hallan los extremos de una función?

Problema 13

¿Cuáles son los extremos de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$?

Si se analizan los tres tipos de puntos críticos que puede tener una función:

- **bordes del dominio:** la función f tiene por dominio $\mathbb{R}$, por lo que no hay "bordes" del dominio en donde pueda haber extremos.

- **no existencia de f':** la derivada de f es $f'(x) = 3x^2 - 6x$.
  La derivada existe para cualquier valor de x (Dom $(f') = \mathbb{R}$, que coincide con el dominio de la función) por lo que tampoco hay puntos críticos de este tipo.

- **ceros de la derivada:** para esto, hay que resolver una ecuación:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = 2$$

Entonces, $x = 0$ y $x = 2$ son los únicos puntos críticos de f, es decir, los candidatos a ser extremos.

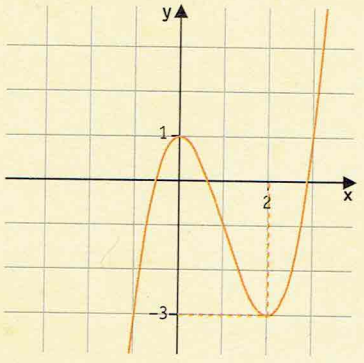
Una vez que se obtuvieron las abcisas de los puntos críticos, hay que decidir si entre ellos hay algún extremo, analizando qué signo tiene la derivada antes y después de cada una. Esto se debe a que el signo de la derivada informa sobre el crecimiento de la función.

Si se toma un valor de cada intervalo y se calcula f', resulta:
en $(-\infty\,;0)$, $x = -1$: $f'(-1) = 9$ (positivo) $\Rightarrow$ f es creciente en $(-\infty\,;0)$
en $(0\,;2)$, $x = 1$: $f'(1) = -3$ (negativo) $\Rightarrow$ f es decreciente en $(0\,;2)$
en $(2\,;+\infty)$, $x = 3$: $f'(3) = 9$ (positivo) $\Rightarrow$ f es creciente en $(2\,;+\infty)$

La tabla siguiente sintetiza los resultados y muestra las conclusiones:

x	$(-\infty\,;0)$	0	$(0\,;2)$	2	$(2\,;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

Para realizar un gráfico aproximado de la función, hay que buscar la imagen de los extremos para poder ubicar esos puntos.
$f(0) = 1$ y $f(2) = -3$
El máximo está en (0;1) y el mínimo en (2 ; 3) y con la información de crecimiento y decrecimiento de la tabla puede trazarse la curva.



$f'(x) > 0$ para valores menores próximos a un máximo y $f'(x) < 0$ para valores mayores próximos a un máximo. También, $f'(x) > 0$ para valores mayores próximos a un mínimo y $f'(x) < 0$ para valores menores próximos a un mínimo.
Además, si en un intervalo:
- la derivada es positiva, entonces la función es creciente en ese intervalo.
- la derivada es negativa, entonces la función es decreciente en ese intervalo.

Por lo tanto, si en $x = a$ una función tiene un máximo, crece a la izquierda de x y decrece a la derecha. De manera análoga puede caracterizarse un mínimo a partir del crecimiento de la función a la izquierda y derecha del punto.

El **Corolario del Teorema de Bolzano** afirma que si para una función continua, x_1 y x_2 son dos raíces consecutivas (no hay otras raíces entre ellas), entonces la función no cambia de signo entre x_1 y x_2. Esto significa que f es toda positiva o toda negativa para los valores de x en el intervalo $(x_1\,;x_2)$. Debido a esto, si se conocen las raíces de f, alcanza con saber el signo de un solo elemento en cada intervalo que ellas determinan para saber el signo de la función en todo su dominio.

Análisis de funciones

Con el cálculo de máximos y mínimos puede pensarse en lo que se llama "realizar el estudio completo de funciones". Esto significa poder llegar a trazar un gráfico aproximado de funciones que, de antemano, no se conocen sus características.

Problema 14

Realizar el análisis de la función $f(x) = e^{x^3 - 3x}$ y graficarla.

¿En qué consiste el estudio de una función?

- Ante todo, es ideal disponer del dominio. Esto permite saber con qué valores de x se trabaja durante todo el estudio.
- Hallar las asíntotas verticales y horizontales, si tiene.
- Estudiar crecimiento, decrecimiento y extremos.
- Trazar un gráfico aproximado.
- El estudio puede completarse con la búsqueda de los puntos donde la curva interseca a los ejes de abscisas y ordenadas.

Dominio

Todas las operaciones en las que está involucrada la variable x tienen resultado en los números reales. Por lo tanto, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Intersecciones con los ejes coordenados

La intersección con el eje de ordenadas se obtiene cuando $x = 0$. Como $f(0) = e^0 = 1$, la curva contiene al punto $(0 ; 1)$.

La intersección con el eje de abscisas es la solución de la ecuación $f(x) = 0$.

$e^{x^3 - 3x} = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$, porque la función exponencial nunca da por resultado 0. La curva no interseca al eje de abscisas.

Asíntotas

El gráfico de f no tiene asíntotas verticales porque no hay valores que no están en el dominio.

Para hallar las asíntotas horizontales debe buscarse el límite en el infinito. Como en la fórmula interviene una función exponencial es necesario analizar por separado el límite en $+\infty$ y $-\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, porque si $x \to +\infty \Rightarrow x^3 - 3x = x^3\left(1 - \frac{3}{x^2}\right) \to +\infty \Rightarrow e^{x^3 - 3x} \to +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, porque si $x \to -\infty \Rightarrow x^3 - 3x = x^3\left(1 - \frac{3}{x^2}\right) \to -\infty \Rightarrow e^{x^3 - 3x} \to 0$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal a izquierda al gráfico de f.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

Para hallarlos se debe calcular $f'(x)$

$$f'(x) = e^{x^3 - 3x} \cdot (3x^2 - 3)$$

Los puntos críticos surgirán solo de los ceros de la derivada (no hay bordes del dominio para analizar y la derivada siempre existe).

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{x^3 - 3x} \cdot (3x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow e^{x^3 - 3x} = 0 \text{ o } 3x^2 - 3 = 0$$

$e^{x^3 - 3x} = 0$ no tiene solución; luego

$$3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ o } x = -1$$

f tiene dos puntos críticos: $x = 1$ y $x = -1$

La tabla que sigue contiene el análisis de la derivada en cada intervalo:

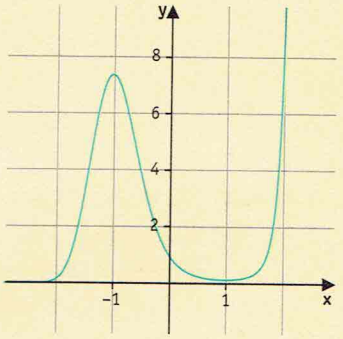
© Tinta fresca ediciones s. a. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	Máximo	↘	Mínimo	↗

Cálculos:
$f'(-2) > 0$
$f'(0) < 0$
$f'(2) > 0$

Para poder graficar aproximadamente, hay que calcular la imagen de los extremos:

$f(-1) = e^2$ y $f(1) = e^{-2}$



En los ejemplos resueltos, los puntos críticos surgieron solo de los ceros de la derivada. Esto no siempre es así. La función siguiente sirve como ejemplo de esto.

Problema 15

¿Cuáles son los extremos de $f: [-1,8] \to \mathbb{R} / f(x) = \sqrt[3]{x}$?

Si se buscan posibles puntos críticos:

- **bordes del dominio:** son $x = -1$ y $x = 8$
- **no existencia de f':**

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

La derivada no existe cuando $x = 0$ (y la función sí existe en ese valor)

- **ceros de f':** la derivada nunca vale 0, por ser una división con el numerador distinto de 0.

Los puntos críticos son, entonces, $x = -1$, $x = 0$ y $x = 8$

En la tabla que sigue se muestra el análisis por intervalos:

x	-1	$(-1;0)$	0	$(0;8)$	8
$f'(x)$	borde	+	No existe	+	borde
$f(x)$	mínimo	↗	No es máximo ni mínimo	↗	máximo

Cálculos:
$f'(-0{,}5) > 0$
$f'(1) > 0$

Si bien la función no tiene un extremo en $x = 0$, la no existencia de la derivada en ese punto indica que la función tiene tangente vertical.

Problemas de optimización

En muchos problemas concretos se necesita hallar los extremos de la función que representa la situación. El problema 3 de la presentación del capítulo es un ejemplo de esto.

Un agricultor tiene que delimitar una zona rectangular dentro de su amplio campo para destinar a cultivo. Si dispone de 120 metros de alambre para cercarla, de qué dimensiones le conviene diseñar el sector para optimizar la producción.

El problema requiere armar un rectángulo (la zona de cultivo) del que se conoce su perímetro (el alambre para cercarlo).

Pero hay muchos rectángulos que tienen perímetro 120 m; algunos ejemplos son el rectángulo de lados 8 y 52, el de 15 y 45, el de 50 y 10, etc.

La base y la altura del rectángulo son dos números reales positivos que deben sumar 60, por lo que hay infinitos pares de valores que verifican esta condición.

¿Cuándo podrá el agricultor optimizar la producción? Cuando la zona tenga *la mayor superficie.*

La superficie de estos rectángulos, ¿varía o es siempre la misma?

La tabla que sigue muestra algunos rectángulos y sus superficies:

Base (en m)	Altura (en m)	Perímetro (en m)	Superficie (en m^2)
1	59	$1+1+59+59=120$	$1\cdot 59=59$
2	58	$2+2+58+58=120$	$2\cdot 58=116$
2,3	57,7	$2{,}3+2{,}3+57{,}7+57{,}7=120$	$2{,}3\cdot 57{,}7=132{,}71$
10	50	$10+10+50+50=120$	$10\cdot 50=500$
25	35	$25+25+35+35=120$	$25\cdot 35=875$

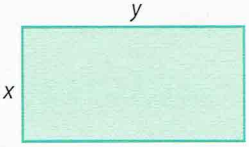
Como se ve, las superficies varían y parece que a medida que el rectángulo "se acerca al cuadrado", la superficie aumenta.

¿Será el cuadrado el que tiene mayor superficie?

¿Cuál es la función que representa la situación y que se quiere optimizar (maximizar, en este caso)?

Se quiere maximizar la superficie del rectángulo.

La superficie del rectángulo es $S = x \cdot y$.



Sin embargo, esta función tiene dos variables (x e y, la altura y la base).

Para transformarla en una función de una sola variable, hay que usar el dato del que se dispone: el perímetro de todos estos rectángulos es 120.

Los rectángulos son cuadriláteros con los cuatro ángulos rectos. Así, el cuadrado es un caso particular de rectángulo.

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Puede plantearse entonces, que

$$2x + 2y = 120$$

De esta ecuación se puede despejar una de las variables:

$$2x + 2y = 120 \Leftrightarrow 2y = 120 - 2x \Leftrightarrow y = \frac{120 - 2x}{2} \Leftrightarrow y = 60 - x$$

Si se sustituye $y = 60 - x$ en la expresión de la superficie:

$$S = x \cdot y = x \cdot (60 - x)$$

resulta una función de x (la base del rectángulo), a la que hay que buscarle máximos.

Si se calcula $S'(x)$:

$$S(x) = x \cdot (60 - x) = 60x - x^2 \Rightarrow S'(x) = 60 - 2x$$

para buscar los puntos críticos se puede analizar:

- **"bordes" del dominio:** como x es el lado de un rectángulo debe ser mayor que 0; también debe ser menor que 60 (porque la suma de los cuatro lados debe ser 120). Como estos dos valores no son posibles (el rectángulo quedaría con base o altura 0), los "bordes" del dominio no están incluidos y no podrán ser extremos.

- **no existencia de S':** la derivada es lineal y, por lo tanto, existe siempre.

- **Ceros de S':**

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 60 - 2x = 0 \Leftrightarrow 60 = 2x \Leftrightarrow 30 = x$$

Éste es el único punto crítico de la función S.

Los intervalos para analizar S' son: (0 ; 30) y (30 ; 60).

Si se toma un valor de cada uno de ellos y se calcula S':

$$S'(10) = 40 \text{ y } S'(40) = -20$$

Entonces:

x	0	(0;30)	30	(30;60)	60
$S'(x)$	Borde	+	0	–	borde
$S(x)$	------	Creciente	Máximo	decreciente	-----

Cuando $x = 30$, la función superficie tiene su único máximo. El rectángulo de superficie máxima es el que tiene base 30.

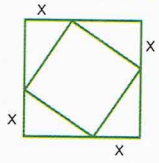
¿Y cuál es la altura?

La altura de todos los rectángulos es $y = 30 - x$. Reemplazando x por 30, resulta $y = 30$.

Entonces, el rectángulo de superficie máxima es el que tiene 30 cm de base y 30 cm de altura, es decir, el cuadrado.

18. ¿Cuál es el mínimo resultado posible del producto de dos números cuya diferencia es 50?

19. ¿Cuál debe ser el valor de x para que el área del cuadrado inscripto sea mínima, si se sabe que la superficie del cuadrado externo es 100 m²?



20. ¿Cuál es el rectángulo que tiene menos perímetro entre todos los que tienen superficie 16 cm²?

21. ¿Cuál es el punto del gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ que está más cerca del punto (9 ; 0)?

ACTIVIDADES

ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN

22. Calculen los siguientes límites:

a. $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x-2}$ **b.** $\lim_{x\to+\infty} \log x$ **c.** $\lim_{x\to 0^-} 5^x$

d. $\lim_{x\to-2} \frac{4x+8}{x+2}$ **e.** $\lim_{x\to-4} \frac{16+8x+x^2}{4+x}$ **f.** $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{x-1}$

g. $\lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x^2}$ **h.** $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-8x+16}{x+2}$

23. Analicen la continuidad de las siguientes funciones en todos los valores x del dominio:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\le -1 \\ 0 & \text{si } -1<x<1 \\ \frac{1}{x^2-4} & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{si } |x|<2 \\ 6 & \text{si } |x|\ge 2 \end{cases}$$

24. La altura alcanzada (en m) por una moneda que se deja caer desde un balcón está dada por la fórmula $h(t)=-5t^2+80$ (siendo t el tiempo en segundos).

a. ¿Cuál es su velocidad a los 3 seg?

b. ¿Cuánto tarda en llegar al suelo y con qué velocidad lo hace?

25. Una piedra que se lanza hacia arriba desde el suelo alcanza una altura f (en m) en función del tiempo (en segundos) que es dada por la fórmula $f(t)=-5t^2+40t$. ¿Cuál es la fórmula que permite determinar la velocidad en cada instante?

26. Calculen la derivada de las siguientes funciones:

$f(x)=(4x+2)^3$ $g(x)=e^{-6x}$ $h(x)=\cos(6x+2)$

$m(x)=\sqrt{3x+2}$ $n(x)=e^{\frac{2}{x}}$ $o(x)=\ln(5x-1)$

$p(x)=\cos\left(\frac{3x}{1-x}\right)$ $q(x)=\frac{x}{ln(3x)+3}$ $r(x)=\text{sen}(e^x)$

$s(x)=2e^{-x}+(e^x)^2$ $t(x)=\pi\cdot e^{\pi x}+2\pi$ $u(x)=\text{sen}^3(5x^2+2)$

27. Calculen la función derivada de las siguientes funciones:

a. $f(x)=(x+\frac{1}{x})^2$ **b.** $g(x)=\ln^2 x-\ln(x^2)$

c. $h(x)=\frac{1}{3}x-e^{-x}$ **d.** $m(x)=\log_2(x^2+1)$

28. Calculen $f'(-1)-2\cdot f'(0)$ para $f(x)=2x\cdot(1-x)^2$.

29. Para la función $f(x)=3x^2+2$:

a. ¿cuánto vale la pendiente de la recta tangente en $x=-3$?

b. ¿en qué punto la recta tangente tiene pendiente -1?

30. Realicen el estudio completo de las siguientes funciones:

a. $f(x)=x^3-12x^2+48x-64$

b. $g(x)=2x^2-\frac{18}{x^2}-4$

c. $h(x)=x^{\frac{2}{3}}\cdot(1-x)$

d. $p(x)=\frac{3x^2}{x^2+1}$

e. $q(x)=\ln(x^2+1)$

f. $r(x)=\ln(x^2-1)$

g. $s(x)=-3x^5+5x^3$

h. $t(x)=6x^2-x^4$ en $[-4;2]$

i. $u(x)=\frac{1}{x^2-4}$

j. $v(x)=\frac{x}{e^x}$

31. Para la función $f(x)=|x|$

a. realicen el gráfico de f.

b. ¿es continua en todos los valores del dominio?

c. ¿es derivable en todos los valores del dominio?

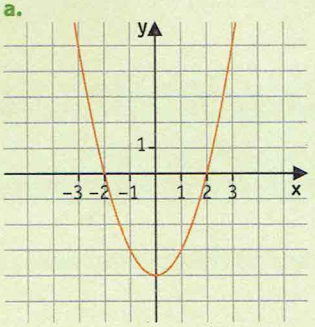
d. encuentren la fórmula de la función derivada e indiquen su dominio.

32. Representen gráficamente una función que cumpla simultáneamente las siguientes condiciones:

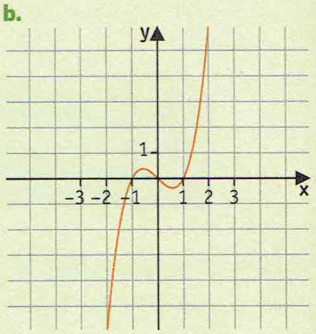
- $x=2$ y $x=-2$ son asíntotas verticales, $y=0$ es asíntota horizontal;
- $f(0)=1$ y $x=0$ es mínimo local;
- en $(-\infty;-2)$ la derivada es positiva;
- en $(2;+\infty)$ la función es decreciente.

33. Digan para cada gráfico, en qué valores del dominio la función derivada es 0:

a.



b.



34. Para cada función que se presenta, determinen los puntos que son extremos, indiquen si son máximos o mínimos

a. $f(x)=x^2$ **b.** $g(x)=x^3-x$ **c.** $h(x)=5x^5-3x^3$

35. Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifiquen.

a. Si una función tiene límite en un punto, entonces es continua en ese punto.

b. Si una función tiene imagen en un punto, entonces es continua en ese punto.

c. Si una función tiene una asíntota vertical en $x = a$, entonces es discontinua esencial en ese punto.

d. La función $f(x) = \sqrt[5]{x}$ no es derivable en $x = 0$.

e. La función $f(x) = x^3 + 3x$ no tiene puntos críticos.

36. Considerando la función

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < -1 \\ x + \frac{3}{2} & \text{si } -1 < x < 3 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

, completen las líneas punteadas:

- Dom(f) = ...
- f es discontinua en .....
- f tiene asíntota horizontal .....
- $f'(4)$ vale .....
- la derivada es constante en el intervalo .....
- no existe f' en .....

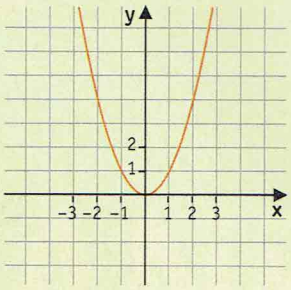
37. Con una lámina cuadrada de cartón de 60 cm de lado se quiere construir una caja sin tapa de base cuadrada de manera que tenga una capacidad máxima. ¿De qué dimensiones debe confeccionarse?

38. ¿Cuál es el número que sumado a su inverso da por resultado la menor suma?

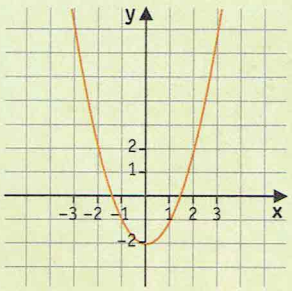
39. Las páginas de un libro deben contener 500 cm^2 de texto. Si los márgenes superior e inferior tienen 2 cm y los laterales 3 cm, ¿qué dimensiones debe tener la página para minimizar la cantidad de papel usada?

40. A continuación se presentan dos gráficos de dos funciones, el segundo es un desplazamiento del primero:

1°.



2°.



Expliquen la siguiente afirmación:

"Como los gráficos son iguales, pero desplazados en sentido vertical, las ecuaciones de sus rectas tangentes indicarán que son paralelas"

¿Es cierta esta afirmación para cualquier par de gráficos que respondan a este tipo de desplazamiento?

41. Decidan si la siguiente afirmación es cierta o no:

"Como $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$ son funciones inversas si $x > 0$, entonces las rectas tangentes a cada función en el punto (1 ; 1) serán rectas perpendiculares entre sí".

42. Realicen, en cada caso, un gráfico aproximado que responda a las características propuestas

a. $f'(2) = 0$; $f'(6) = 0$;

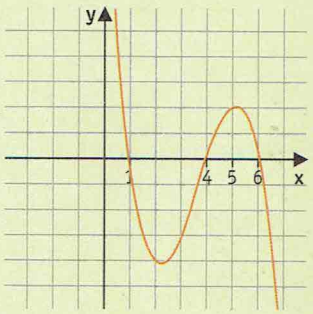
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b. $f'(1) = 0$; no existe $f'(7)$

$f'(x) > 0$ para x entre 0 y 1 y para $x > 7$

$f'(x) < 0$ para x entre 1 y 7

43. A continuación se muestra la gráfica de la derivada, f', de una función f.



Decidan cuáles afirmaciones son ciertas y cuáles no, explicando los motivos de la decisión que tomen:

a. f tiene máximo local en $x = 1$.

b. f tiene mínimo local en $x = 4$.

c. f tiene máximo local en $x = 6$.

d. f tiene un máximo local en $x = 5$.

44. La función $f(x)$ tiene por recta tangente, en $x = -1$, a la recta $y = -3x + 2$.

a. ¿Es posible calcular con estos datos $f(-1)$? ¿Por qué?

b. ¿Es posible calcular con estos datos $f'(-1)$? ¿Por qué?

AUTOEVALUACIÓN

Marquen la o las opciones correctas en cada cado.

1. Si $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 1$ entonces

- **a** f es continua en $x = 4$
- **b** $f(4) = 1$
- **c** f es discontinua evitable en $x = 4$
- **d** f no es discontinua esencial en $x = 4$

2. En un cierto intervalo $(a; b)$ se sabe que una función f tiene derivada positiva. Entonces, en ese intervalo ...

- **a** f es creciente
- **b** f es positiva
- **c** f puede tener una discontinuidad evitable
- **d** f puede tener una discontinuidad esencial

3. $f: [-1; 3] \to \mathbb{R} / f(x) = x^2$ tiene ...

- **a** dos máximos locales y un mínimo local
- **b** dos mínimos locales y un máximo local
- **c** solo un mínimo local
- **d** solo un máximo local y un mínimo local

4. Una función que tiene una asíntota horizontal solo a derecha es ...

- **a** $f(x) = \frac{1}{x} + 2$
- **b** $f(x) = \log x$
- **c** $f(x) = 4^x$
- **d** $f(x) = 4^{-x}$

5. La recta tangente a $f(x) = x^3 + x$ en $x = 1$ tiene ecuación ...

- **a** $y = 3x^2 + 1$
- **b** $y = 4$
- **c** $y = 4x$
- **d** $y = 4x - 2$

6. Un valor de a para el cual se cumple que $\lim_{x\to a} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$ es

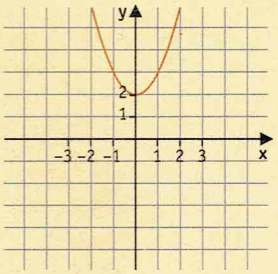
- **a** 0
- **b** $\frac{1}{2}$
- **c** -1
- **d** 1

7. Si la distancia recorrida (en km) por un móvil en función del tiempo (en horas) está dada por la fórmula $d(t) = (\frac{1}{2}t + 1)^3$, la velocidad instantánea a las 4 horas es:

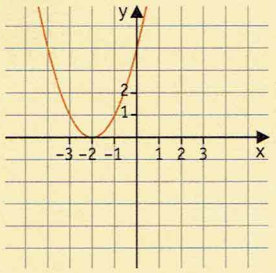
- **a** 40,5 km/h
- **b** 81 km/h
- **c** 13,5 km/h
- **d** 162 km/h

8. Las gráficas que aparecen a continuación corresponden a funciones designadas con f_1 y f_2

f_1

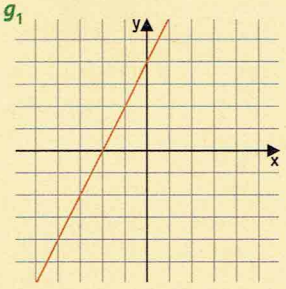


f_2

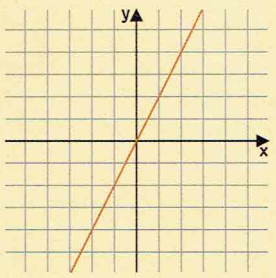


Los gráficos que se presentan a continuación designados con g_1 y g_2 corresponden a las funciones derivadas de las anteriores:

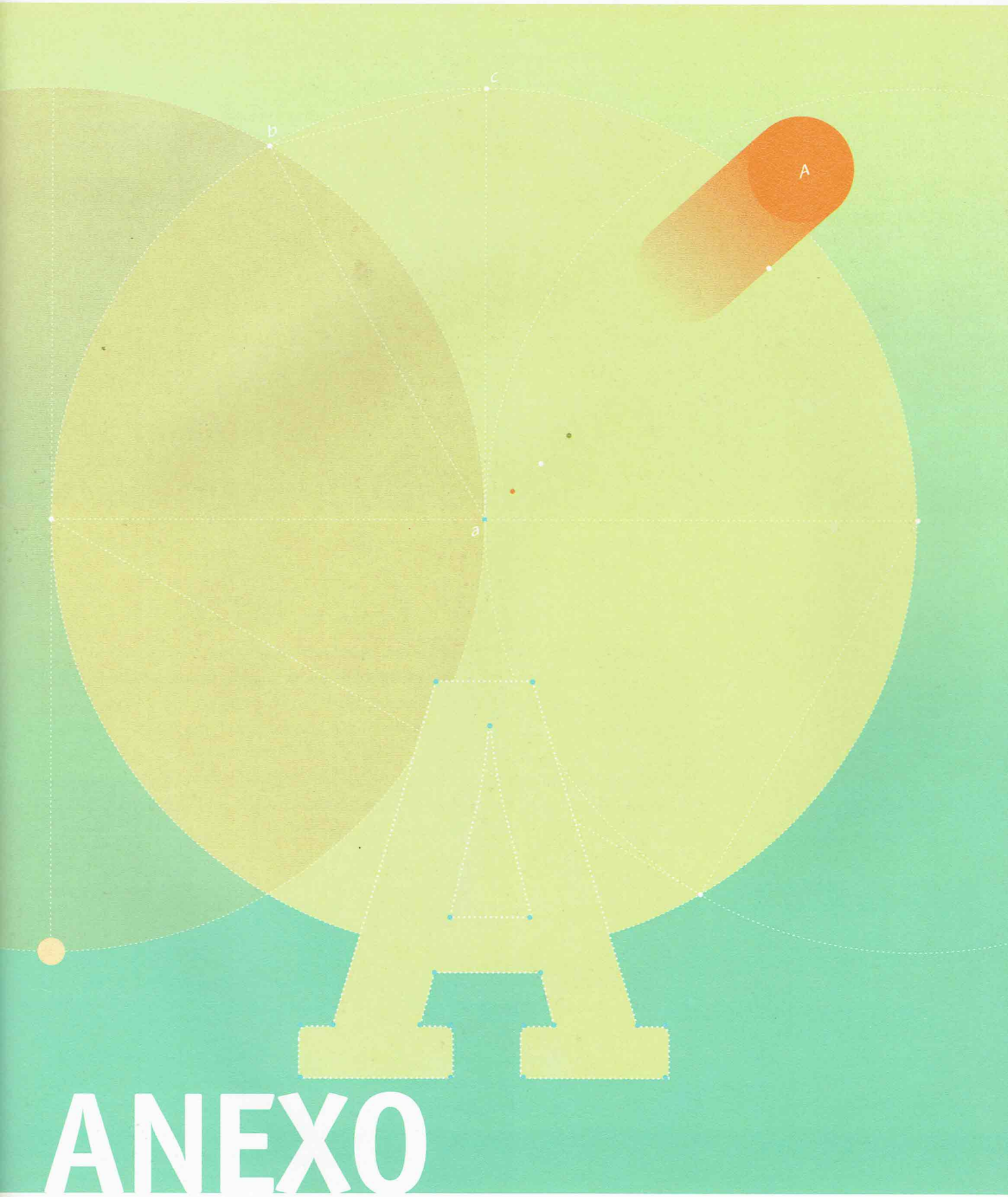
g_1



g_2



- **a** g_1 representa la función derivada de f_1.
- **b** g_1 representa la función derivada de f_2.
- **c** g_2 representa la función derivada de f_1.
- **d** g_2 representa la función derivada de f_2.



ANEXO

CONTENIDOS

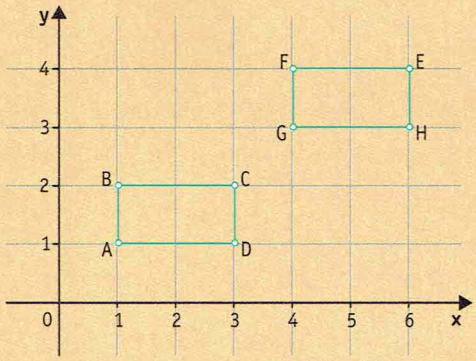
- Los vectores y las traslaciones
- Operaciones con vectores
- Módulo de un vector
- Vectores y rectas
- Relaciones entre la ecuación vectorial y la ecuación explícita de la recta
- Geometría y vectores

Los números naturales, enteros, racionales o reales son herramientas suficientes para dar cuenta de una cantidad cuando se trata con ciertas magnitudes como una longitud, una colección de discos compactos, el tiempo, etc. Por ejemplo, si se dice que en un paquete hay $\frac{3}{4}$ kg, el número $\frac{3}{4}$ indica la cantidad de kilogramos que hay en el paquete. Sin embargo hay otras situaciones que involucran desplazamientos, fuerzas, aceleraciones, que no pueden representarse usando solo algunos de los números ya conocidos. Para resolverlas se presentará una nueva herramienta que permitirá modelizar estas situaciones.

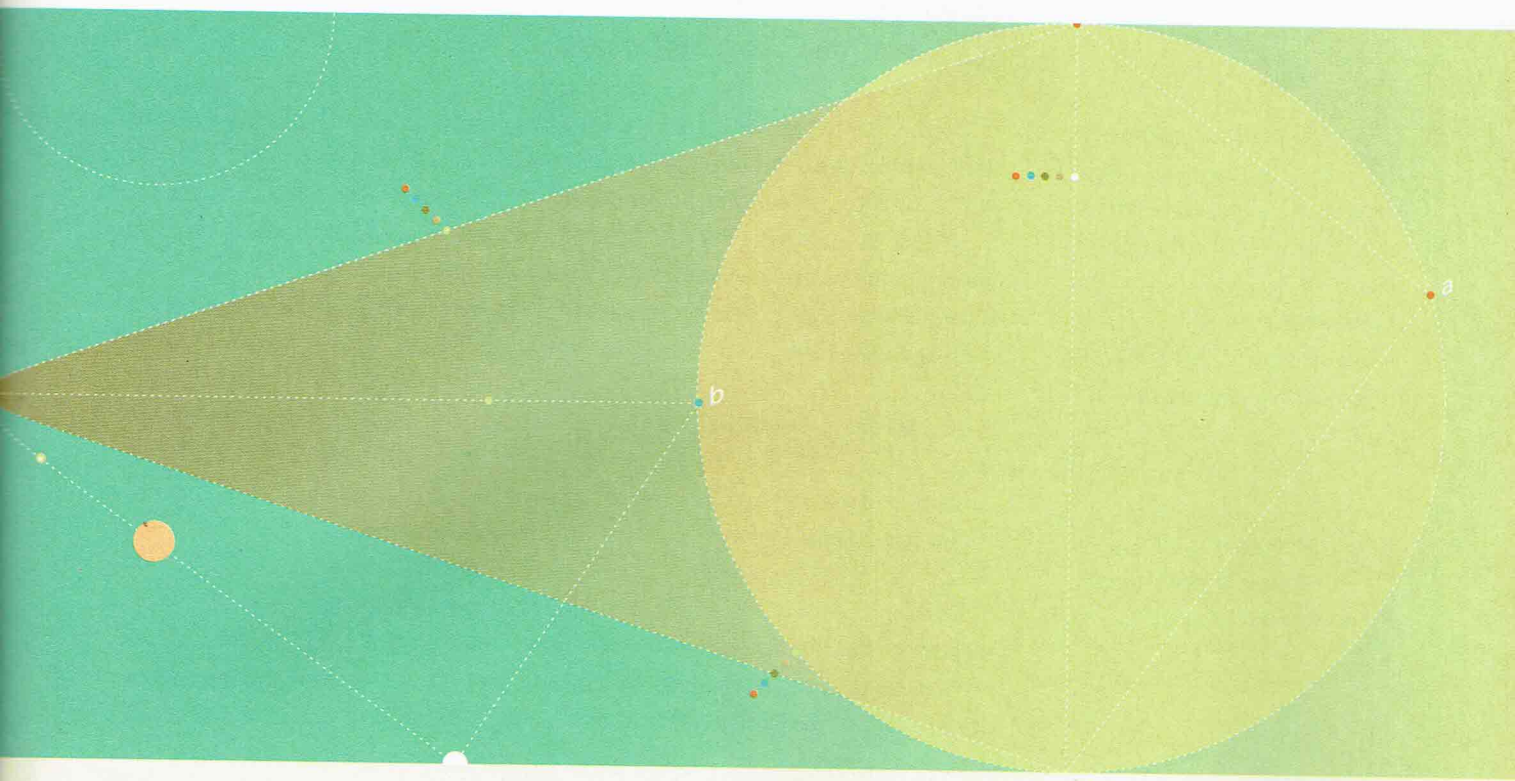
INICIACIÓN EN EL ESTUDIO DE VECTORES

Problema 1

En el siguiente gráfico se presenta el dibujo de dos rectángulos, indicados sus vértices:



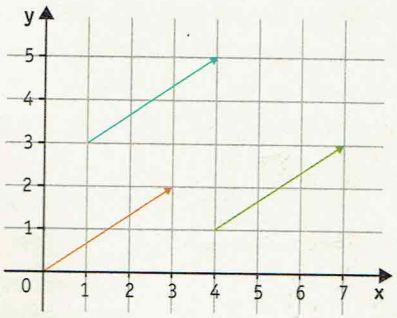
¿Qué instrucciones habría que darle a una computadora para que desplace el $\square ABCD$ de modo que se superponga con el $\square GFEH$?



Para que con la computadora se logre desplazar el $A\overset{\square}{B}CD$ se necesita saber hacia dónde y cuánto desplazarlo.

Por ejemplo, se le podría indicar que lo traslade 3 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia arriba. Es decir, es necesario informar la cantidad de unidades de traslado y la dirección.

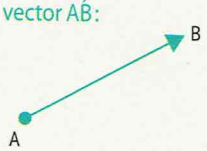
Una representación de este movimiento podría indicarse con un flecha que comienza en el punto (0 ; 0) y termina en el (3 ; 2), o cualquiera de las flechas que se dibujan a continuación.



Cada una de estas flechas representa el mismo movimiento y se denomina **vector**.

Por lo tanto, para indicar un desplazamiento es conveniente usar vectores pues en ellos se presenta una **dirección**, que está dada por la recta en la cual está apoyado el vector; un **sentido**, que está señalado por el origen y el extremo, es decir, desde dónde hacia dónde es el desplazamiento; y un **módulo o magnitud** que corresponde a la longitud del segmento.

Se llama **vector** a todo segmento que tiene una orientación, es decir, un segmento en el que se distingue su origen y su extremo. Por ejemplo, el siguiente es el vector $\overrightarrow{AB}$:



Los vectores y las traslaciones

Por lo visto en el problema anterior, para que con la computadora se logre desplazar el $\square ABCD$ se necesita saber hacia dónde y cuánto desplazarlo.

Por lo tanto, sería posible indicarle que desplace el rectángulo $\square ABCD$ en la dirección (3 ; 2), con el acuerdo de que el 3 indica cuánto debe moverlo hacia la derecha en tanto que el 2 indica cuánto hacia arriba. Para que no se confunda el vector (3 ; 2) con el punto del plano se lo escribirá $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ que significa un movimiento de 3 unidades en el sentido positivo de la *x* y 2 en el sentido positivo de la *y*.

Es claro que $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ es distinto que $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

En el caso del $\square ABCD$, el movimiento respecto de $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ lo traslada al $\square GFEH$. Para el movimiento respecto del vector $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ quedaría el rectángulo en otro lugar.

Otra forma de indicarle este movimiento a la computadora es que desplace $\square ABCD$ según el vector $\overrightarrow{AG}$ donde A = (1 ; 1) y G = (4 ; 3).

Es decir, el vector $\overrightarrow{AG}$ es igual al vector $\overrightarrow{OC}$ donde O = (0 ; 0) y C = (3 ; 2) ya que ambos tienen la misma dirección, el mismo sentido e igual módulo. Aunque estén dibujados en diferentes lugares del plano, el desplazamiento que provocan es el mismo.

¿Hay alguna relación entre los extremos de los vectores para que produzcan el mismo desplazamiento?

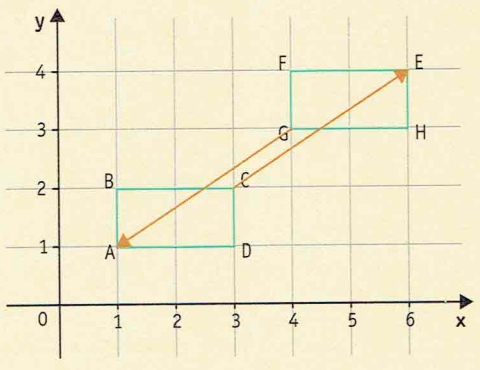
Si se observan las coordenadas de los extremos, puede notarse que para "ir" del punto A al G es necesario aumentar la abscisa en 3 unidades y la ordenada en 2, lo mismo que ocurre para pasar de (0 ; 0) a (3 ; 2).

Luego, (4 – 1 ; 3 – 1) = (3 – 0 ; 2 – 0), o dicho de otra manera, G – A = C – O.

¿Qué instrucciones habría que darle al rectángulo $\square EFGH$ *para que se desplace hasta superponerse con el* $\square ABCD$*?*

En este caso, la instrucción más conveniente es que se desplace según el vector $\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ es decir, tres unidades hacia la izquierda y dos hacia abajo.

Es claro que el vector $\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ tiene la misma dirección y el mismo módulo que el vector $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ pero su sentido es exactamente contrario, estos vectores se llaman *opuestos*.



El vector CE desplaza $\square ABCD$ sobre el $\square GFEH$.
El vector GA desplaza el $\square GFEH$ sobre el $\square ABCD$.
$\overrightarrow{GA}$ y $\overrightarrow{CE}$ son vectores opuestos.

Para designar un vector se suele escribir $\overrightarrow{AB}$ o, si el origen es el punto (0 ; 0), se puede escribir usando solo el extremo donde termina.
Para simbolizar un vector, muchas veces se escribe $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ para diferenciarlo del punto del plano (*a* ; *b*).

Dos vectores tienen la misma dirección cuando están sobre rectas paralelas.

El tamaño de un vector, que está dado por la longitud del segmento, se llama **módulo** o **magnitud** y se lo representa de la siguiente manera: $|\overrightarrow{AB}|$

Dos **vectores** son **iguales** si tienen el mismo sentido, la misma dirección y el mismo módulo.

Dos **vectores** son **opuestos** si tienen la misma dirección y módulo pero sentido contrario.
Si $\vec{V}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, el vector opuesto es $-\vec{V}=\begin{pmatrix}-a\\-b\end{pmatrix}$

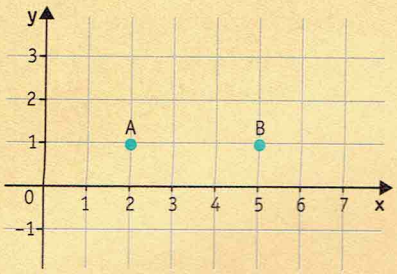
© Tinta fresca ediciones S.A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Operaciones con Vectores

Problema 2

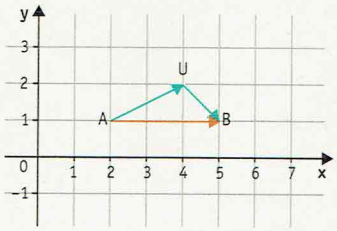
Encontrar al menos tres combinaciones de desplazamientos que permitan superponer el punto A = (2 ; 1) con el punto B = (5 ; 1).



El movimiento más evidente, es desplazar el punto A = (1 ; 2) según el vector $\vec{V} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

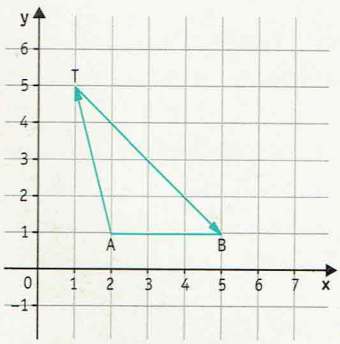
Pero, el mismo efecto se logrará si se desplaza primero el punto A al U según el vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ para luego desplazarlo según el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Así, el vector $\vec{AB}$ es el resultado de realizar las traslaciones de vector $\vec{AU}$ y la de vector $\vec{UB}$ una a continuación de la otra. Esto es, una suma de traslaciones.

El vector $\vec{AB}$ es la suma de los vectores $\vec{AU}$ y $\vec{UB}$. Entonces, $\vec{AB} = \vec{AU} + \vec{UB}$, o dicho de otra manera, para ir del punto A al B puede irse de A a U y luego de U a B.



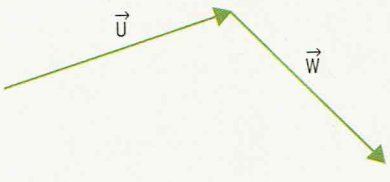
En este ejemplo puede verse que al realizar el primer desplazamiento se pasa del punto A = (2 ; 1) al punto (4 ; 2), moviéndolo 2 unidades hacia la derecha y una para arriba. Luego, para realizar el segundo desplazamiento hay que mover el nuevo punto 1 unidad para la derecha y 1 para abajo. Así se llega al punto (5 ; 1), que es B. En cada desplazamiento se suman las coordenadas de los puntos.

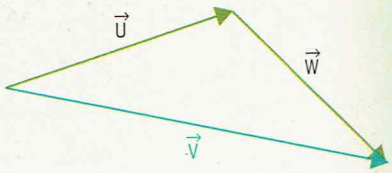
Otra combinación de movimientos podría ser aplicar primero la traslación de vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ que mueve A hacia T, y luego la traslación de vector $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ que mueve T a B.



De esta manera podrían hacerse infinitas combinaciones para conseguir un vector dado como suma de otros dos vectores.

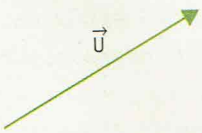
Es así como, para sumar dos vectores, es posible ubicar un vector a continuación del otro, conservando sus sentidos, direcciones y módulos, y la suma será el vector que se origina en el inicio del primer vector y termina en el extremo del segundo, tal como se muestra en el dibujo:



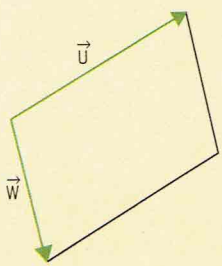


Es decir, $\vec{U} + \vec{W} = \vec{V}$

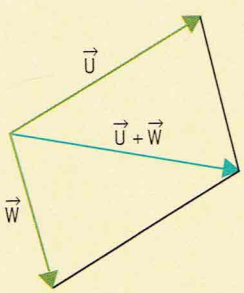
El mismo análisis permite establecer que, si se disponen dos vectores, por ejemplo $\vec{U}$ y $\vec{W}$ como los siguientes:



para sumarlos, es posible ubicar el vector $\vec{U}$ de manera paralela en el extremo de $\vec{W}$, como se muestra en el dibujo, y terminar de construir el paralelogramo, trasladando el vector $\vec{W}$ hasta el extremo del vector $\vec{U}$, de manera paralela:

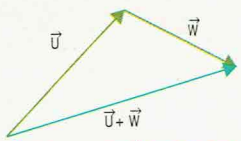


Terminado el paralelogramo, la diagonal que nace donde se junta $\vec{U}$ y $\vec{W}$ será su suma:



Si $\vec{U} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $\vec{W} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$,
$\vec{U} + \vec{W} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$.

Gráficamente, la suma se interpreta de la siguiente manera:



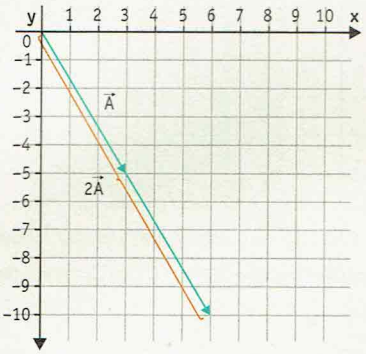
Hay infinitos pares de vectores que sumados dan el mismo resultado.

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Problema 3

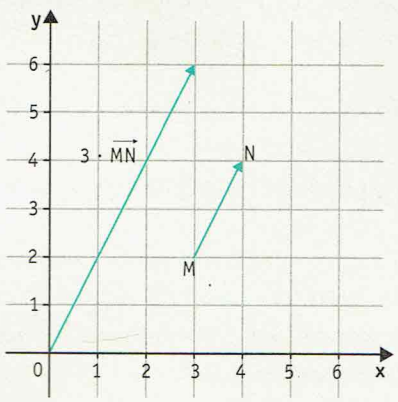
¿Cómo se podrá encontrar un vector que tenga la misma dirección y el mismo sentido que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ pero cuyo módulo sea el doble?

Si se llama A al vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, para que mida el doble que A, aunque no se sepa la magnitud de A, basta con sumar A con A. Se llega así al punto (6 ; −10), es decir que cada coordenada se duplicó para obtener un vector con la misma dirección y sentido y el doble en módulo:



En este caso, se ha multiplicado el vector por un número real, multiplicando cada coordenada del vector por dicho número.

Si se pretende conocer las coordenadas de un vector cuyo módulo sea el triple del vector de origen M = (3 ; 2) y extremo N = (4 ; 4); una posibilidad es realizar primero la resta N − M = (1 ; 2) para obtener un vector igual a $\vec{MN}$ pero con origen en (0 ; 0) y, a este vector triplicarlo, obteniendo el vector $3 \cdot \vec{MN} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$:



Otra forma consiste en dibujar el vector $\vec{MN}$ tres veces consecutivas, a partir del punto M. Se llega así al punto de coordenadas P = (6 ; 8). El vector $\vec{MP}$ también tiene el triple del módulo de $\vec{MN}$.

Lo mismo podría haberse hecho eligiendo cualquier otro punto como origen del vector buscado.

Vale aclarar que solo en el caso en que el vector tenga su origen en el origen de coordenadas se pueden multiplicar sus componentes por un número *k* para obtener otro vector cuya magnitud sea *k* veces la del primero.

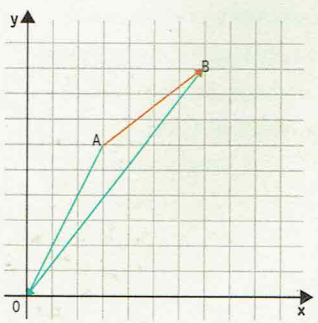
Pero como todo vector puede expresarse con origen en (0 ; 0), luego de hacerlo puede multiplicarse por el número correspondiente.

Si *k* es un número real positivo, para multiplicar el vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ por *k*:

$$k \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}.$$

El vector $\begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$ es un vector con la misma dirección y sentido que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, pero cuyo módulo es *k* veces el módulo del vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Dado el vector $\vec{AB}$, $\vec{OA}$ y $\vec{OB}$ son los vectores que se inician en el origen de coordenadas con extremos en A y B respectivamente.

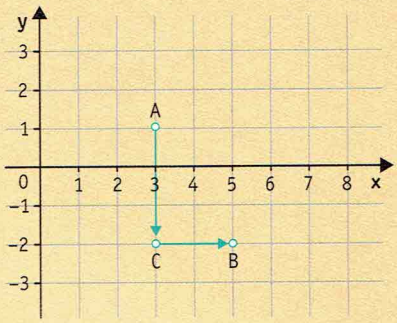


Como para ir del punto A al B puede irse de A a O y de O a B, es posible escribir esta relación como una suma de vectores: $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$.
Pero $\vec{AO}$ es el vector opuesto a $\vec{OA}$, luego $\vec{AO} = -\vec{OA}$.
Entonces, $\vec{AB} = -\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA}$
De esta manera se obtiene un vector equivalente a $\vec{AB}$ pero que se inicia en el origen de coordenadas.

Módulo de un vector

Problema 4

En el siguiente plano se representa, mediante dos vectores, el desplazamiento del punto A = (3 ; 1) hasta el punto B = (5 ; −2), pasando por C = (3 ; −2):



¿Cuál es la distancia que recorrió el punto A para llegar hasta el punto B?
Si el punto A se desplazara según el vector $\vec{AB}$, ¿cuánta distancia recorrería?

Para resolver este problema, es necesario determinar las longitudes de diferentes vectores. A la longitud de un vector se la llama *módulo* o *magnitud* del vector.

El módulo del vector $\vec{AC}$ se escribe $|\vec{AC}|$ y es $|\vec{AC}| = 3$, en tanto que el módulo del vector $\vec{CB}$ es: $|\vec{CB}| = 2$. Es decir, el punto A recorrió 5 unidades.

Para determinar la distancia entre A y B hay que calcular el módulo del vector $\vec{AB}$. *¿Cómo hacerlo?*

Puede observarse que A, B y C forman un triángulo rectángulo. De esta manera, y recurriendo al teorema de Pitágoras, se puede plantear lo siguiente:

$$|\vec{AB}|^2 = |\vec{CB}|^2 + |\vec{AC}|^2$$

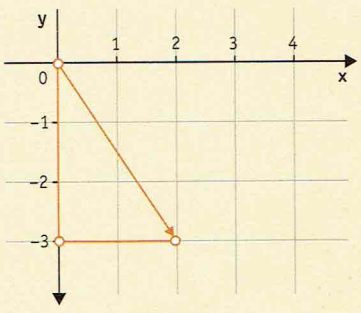
Es decir, $|\vec{AB}| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

¿Qué sucede si primero se busca el vector igual a $\vec{AB}$ con inicio en el origen y luego se calcula su magnitud?

Debería obtenerse el mismo resultado porque los vectores son iguales. En este caso, el vector es: $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Para hallar la magnitud del vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ también es posible utilizar el teorema de Pitágoras, como muestra el siguiente gráfico:

$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$



Si A = (a; b) y B = (c; d), el módulo del vector $\vec{AB}$ puede determinarse de la siguiente manera:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

A partir de esta expresión, puede observarse que el módulo de un vector será siempre un número real positivo, por tratarse de una distancia. Únicamente será 0 cuando coincidan el origen y extremo del vector.

Si $\vec{OA} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ es un vector con inicio en el origen de coordenadas, su módulo puede calcularse como:

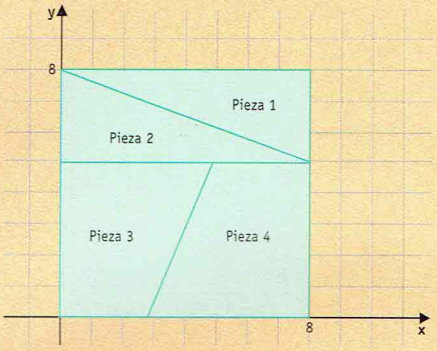
$$|\vec{OA}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

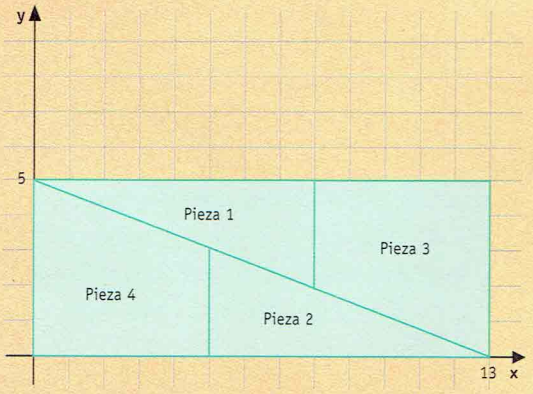
Vectores y Rectas

Problema 5

En un plano de ejes cartesianos se dibuja un cuadrado de 8 cuadraditos por 8 cuadraditos, al que se le efectúan los cortes que se indican en el dibujo:



Con esas mismas piezas se forma, en otro par de ejes cartesianos, un rectángulo, tal como se muestra en el siguiente dibujo:



El cuadrado está formado por 64 cuadraditos (8 x 8).
El rectángulo está formado por 65 cuadraditos (13 x 5).
¿Por qué el rectángulo tiene un cuadradito de más si no se agregó ninguna pieza?

Hay diferentes maneras de explicar la aparición de un cuadradito. Una de ellas es recurriendo a los vectores. Es decir, se puede pensar que la **Pieza 1**, en el cuadrado, es un triángulo rectángulo y que su hipotenusa es un vector. Dicho vector es $\vec{U} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Por otro lado, en el rectángulo se puede considerar la **Pieza 4** en la cual, el lado que limita con la pieza 1 también es un vector igual al vector $\vec{V} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Pero para que ambas piezas compartan el lado, los vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$ deberían tener la misma dirección, es decir, pertenecer a la misma recta.

Cada vector está incluido en una recta. La dirección de la hipotenusa de la **Pieza 1** es igual a la dirección del vector $\vec{U} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$. Este vector es parte de la recta que pasa por el origen y el punto (8 ; -3) . La pendiente de dicha recta es $m = \frac{-3-0}{8-0} = -\frac{3}{8}$.

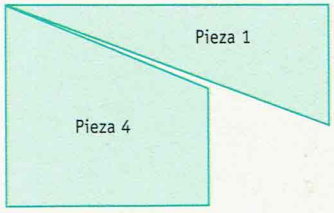
De la misma manera puede obtenerse la dirección del vector $\vec{V} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$: $m = \frac{-2-0}{5-0} = -\frac{2}{5}$.

La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x_1 ; y_1)$ y $(x_2 ; y_2)$ es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. siempre que $x_1 \neq x_2$.

La dirección del vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ está dada por la pendiente de la recta que pasa por el origen de coordenadas y el punto $(a ; b)$, es decir, $\frac{b-0}{a-0} = \frac{b}{a}$.

Los vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$ tienen direcciones diferentes, luego las piezas 1 y 4 no pueden compartir el lado.

Lo que ocurre es que al dibujar, o bien al recortar y armar el rectángulo, se comete un error que no es fácil de percibir a simple vista. Su dibujo ampliado se vería así:

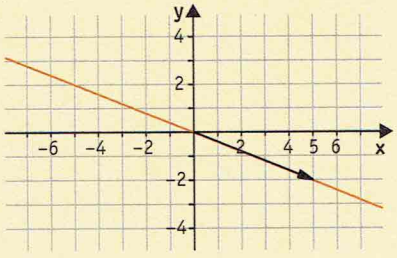


¿Cómo es la ecuación de la recta que incluye a cada uno de los vectores?

Si se analiza cómo se multiplica un vector por un número real k, se comprueba que el resultado es siempre un vector en la misma recta, cuya magnitud es k veces la magnitud del vector original. Es posible entonces pensar que si un vector se multiplica por un número real, se obtiene otro vector que tendrá la misma dirección que el original, pero podrá o no conservar su sentido, dependiendo del valor de *k*. Si *k* es positivo, se mantiene el sentido, mientras que si es negativo, el sentido cambia.

Por lo tanto, una expresión de la forma $k\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ permite obtener todos los vectores que tienen la misma dirección que el vector $\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$. En definitiva, a medida que varía el valor de *k*, se obtienen todos los puntos de la recta que pasa por el origen que determina la dirección del vector. Por este motivo la expresión $k \cdot \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ donde *k* se puede reemplazar por cualquier valor real, es la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos (0 ; 0) y (5 ; –2).

En el ejemplo, los vectores que resultan de hacer $k \cdot \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ están en la recta cuya dirección es igual a la del vector $\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$.



Si $\vec{V} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, se dice que $k \cdot \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ es la ecuación vectorial de la recta generada por el vector $\vec{V}$.
Cualquier punto de la recta se puede obtener como extremo de algún vector que resulta de asignar un cierto valor real a *k*.
Esta recta pasa por el origen de coordenadas y el punto V.
El vector $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ se llama **generador o director** de la recta.

A partir de la ecuación de la recta surge otra manera de determinar que los dos vectores dados no pertenecen a la misma recta. Si $\begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}$ pertenece a la recta de dirección $\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$, debería existir un número *k* para el cual se verifique:

$$\begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k \cdot 5\\k \cdot (-2)\end{pmatrix} \Leftrightarrow k \cdot 5 = 8 \quad \text{y} \quad k \cdot (-2) = -3$$

Por lo tanto: $k = \frac{8}{5}$ y $k = \frac{3}{2}$

Pero como $\frac{8}{5} \neq \frac{3}{2}$, ningún valor de *k* verifica las dos condiciones. Esto quiere decir que los vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$ no tienen la misma dirección, es decir, pertenecen a diferentes rectas.

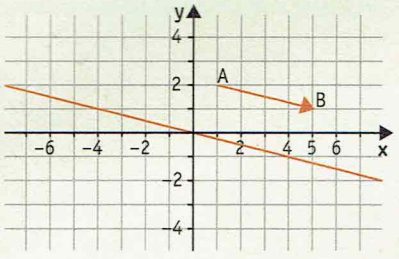
© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Problema 6

¿Cómo se puede obtener la ecuación de todos los puntos de la recta que tiene por dirección el vector $\vec{AB}$ donde A = (1 ; 2) y B = (5 ; 1)?

Para responder a esta cuestión, en primer lugar hay que determinar la dirección del vector $\vec{AB}$, $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$

Por lo tanto, la expresión $k \cdot \vec{AB} = k \cdot \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ es la ecuación vectorial de una recta generada por $\vec{AB}$. Tiene la misma dirección que el vector $\vec{AB}$ pero pasa por (0 ; 0), tal como se muestra en el siguiente gráfico:

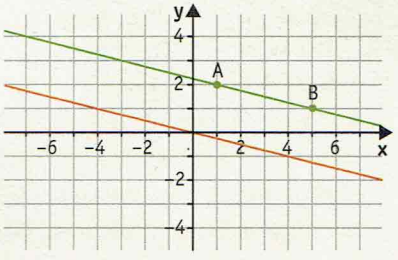


Para conseguir que la recta incluya al vector $\vec{AB}$, hay que desplazarla. Esto se logra, por ejemplo, sumando el vector $\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ a cada vector de la recta $k \cdot \vec{AB}$. Es decir, los puntos $(x ; y)$ de la recta cumplen que:

$$(x ; y) = k \cdot (4 ; -1) + (5 ; 1)$$

Desde aquí se toma en forma indistinta el vector $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ con origen en (0 ; 0) o el punto $(a ; b)$.

Por lo tanto, se desplaza la recta para que pase por A o por B; en este caso se ha elegido el vector $\vec{OB}$. Si pasa por B también pasará por A debido a que la dirección de la recta coincide con la dirección del vector $\vec{AB}$.



En este caso la ecuación obtenida es la ecuación vectorial de la recta que pasa por A y B.

Por lo tanto, dado cualquier vector $\vec{AB}$ en el plano, es posible encontrar la condición que cumplen los puntos $(x ; y)$ de la recta que contiene a $\vec{AB}$:

$$(x ; y) = k \cdot (B - A) + B \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

La **ecuación vectorial de la recta** que pasa por los puntos A y B tiene la forma $k \cdot (B - A) + B$. B – A es el vector que genera la recta, es decir, el que le da la dirección, y B un punto por donde pasa.

La recta de ecuación $y = 0$ puede pensarse como la recta generada por el vector $\vec{I} = (1\ ;\ 0)$. Del mismo modo, la recta $x = 0$ puede ser identificada con la ecuación vectorial de la recta generada por el vector $\vec{J} = (0\ ;\ 1)$.

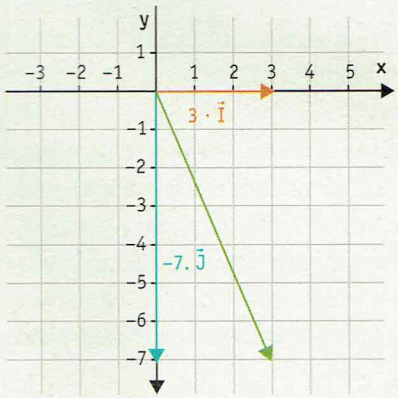
De esta manera:

$\alpha \cdot (1\,;0)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$	representa el eje de las x.
$\beta \cdot (0\,;1)$ con $\beta \in \mathbb{R}$	representa el eje de las y.

Desde aquí se tomará en forma indistinta el vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ con origen en $(0\,;0)$ o el punto $(a\,;b)$.

A partir de esto, es posible determinar que, cualquier punto del plano (pensado como un vector con comienzo en el origen de coordenadas) puede ser obtenido como una combinación de estos dos vectores.

Por ejemplo, para expresar al vector como $(3\ ;-7) = \alpha \cdot (1\ ;0) + \beta\ (0\ ;1)$ basta con considerar $\alpha = 3$ y $\beta = -7$, tal como se muestra en el siguiente dibujo:



Cualquier vector del plano $(a\,;b)$ puede expresarse como

$$a \cdot \vec{I} + b \cdot \vec{J},$$

donde $\vec{I}$ es el vector $(1\,;0)$ y $\vec{J}$ es el vector $(0\,;1)$.

Es decir, todos los vectores del plano con origen en el punto $(0\ ;0)$ pueden obtenerse a partir de los vectores $\vec{I}$ y $\vec{J}$.

ACTIVIDADES

1. Hallen un vector que sea paralelo a $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y cuyo módulo sea 1. ¿Cuántas soluciones hay?

2. Si $\vec{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\vec{OQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, encuentren $\vec{PQ}$ y $\vec{QP}$.

3. Si $\vec{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, hallen $\vec{OQ}$.

4. Determinen si el vector $\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ pertenece a la recta de ecuación $(x\,;y) = (3\,;-1) + \lambda\,.\,(-1\,;5)$, donde λ es un número real. Justifiquen.

5. Hallen el vector correspondiente al punto de intersección entre la recta de ecuación $(x\,;y) = (0{,}5\,;0) + k \cdot (1{,}5\,;1)$ y la recta de ecuación $(x\,;y) = (0\,;3) + t\,.\,(1\,;-1)$, donde k y t son números reales.

6. Determinen la ecuación vectorial y explícita de la recta que pasa por los puntos $(-3\,;4)$ y $(2\,;-2)$.

7. Decidan cuáles de las siguientes rectas son paralelas o perpendiculares:

a. $(x\,;y) = k \cdot (-2\,;-3) + (2\,;1)$ con $k \in \mathbb{R}$

b. $(x\,;y) = t \cdot (8\,;-12) + (1\,;1)$ con $t \in \mathbb{R}$

c. $(x\,;y) = h \cdot (-4\,;6)$ con $h \in \mathbb{R}$

d. $y = 1{,}5x + 15$

e. $y = -\frac{2}{3}x - 18$

8. Encuentren la ecuación de una recta paralela y una perpendicular a la recta $(x\,;y) = (4\,;-2) + k \cdot (1\,;-5)$ con k un número real.

9. Determinen si los siguientes puntos pertenecen a la recta $(x\,;y) = k \cdot (-2\,;5) + (1\,;1)$ con $k \in \mathbb{R}$. Justifiquen.

a. $(-2\,;5)$ **b.** $(3\,;-4)$ **c.** $(0\,;0)$ **d.** $(-3\,;-9)$

10. Determinen si la recta de ecuación $(x\,;y) = k\,(-6\,;\frac{5}{3}) + (18\,;-5)$ con $k \in \mathbb{R}$, pasa por el origen de coordenadas.

11. Encuentren el punto de intersección entre la recta de ecuación $(x\,;y) = k\,(4\,;-3)$ con $k \in \mathbb{R}$ y la recta perpendicular que pasa por el punto $(3\,;-2)$.

© Tinta fresca ediciones s. a. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Relaciones entre la ecuación vectorial y la ecuación explícita de la recta

Problema 7

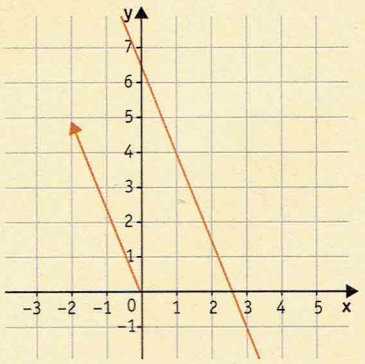
Si la ecuación vectorial de una recta es: $(x\,;y) = k \cdot (-2\,;5) + (1\,;4)$, ¿cuál es la ecuación explícita de esa misma recta?

La ecuación explícita tendrá la siguiente forma: $y = m \cdot x + b$.

En primer lugar, la pendiente deberá ser tal que la dirección de la recta que se busca sea la misma que la que genera el vector $(-2\,;5)$. Por lo tanto, dicha pendiente podría determinarse a partir de saber que este vector tiene origen en $(0\,;0)$ y extremo en $(-2\,;5)$:

Por lo tanto la pendiente es:

$$m = \frac{0-5}{0-(-2)} = -\frac{5}{2}$$



Para hallar la ordenada al origen puede plantearse lo siguiente.

Ecuación explícita de la recta.	$y = -\frac{5}{2}x + b$
Se reemplaza por el punto $(1\,;4)$ que está en esta recta.	$4 = -\frac{5}{2} \cdot 1 + b$
Se opera.	$b = \frac{13}{2}$
La ecuación de la recta es entonces:	$y = -\frac{5}{2}x + \frac{13}{2}$

Este problema muestra, una vez más, que la pendiente se obtiene mediante el cociente entre la segunda coordenada del vector dirección y su primera coordenada.

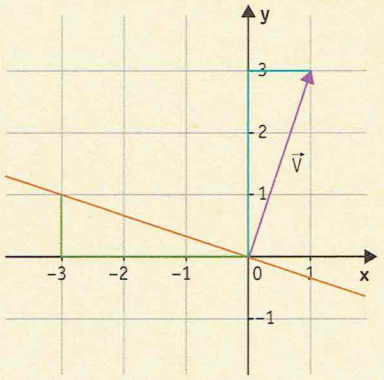
Problema 8

Encontrar la ecuación de una recta perpendicular a la recta cuya ecuación vectorial es $(x\,;y) = k \cdot (-3\,;1)$.

Una posibilidad es transformar esta ecuación en la ecuación explícita y recurrir a las relaciones entre las pendientes de dos rectas perpendiculares.

Otra posibilidad es intentar encontrar algún vector perpendicular al vector director de la recta conocida y usarlo como director de la recta que se necesita encontrar:

Un vector que es perpendicular a la recta podría ser el que está dibujado: $\vec{V} = (1\,;\,3)$.

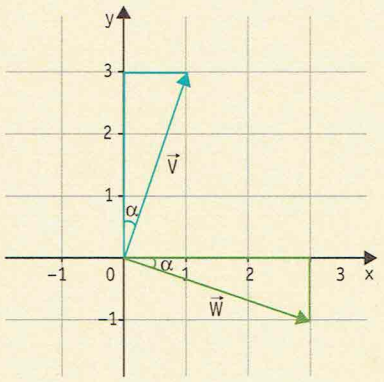


Producto escalar entre dos vectores

¿Cómo es posible estar seguros de que dos vectores $\vec{V}$ y $\vec{W}$ son perpendiculares?

Para saber si dos vectores $\vec{V}$ y $\vec{W}$ son perpendiculares, pueden analizarse los ángulos que forma el vector $\vec{V}$ y cualquier vector de la recta que tiene por dirección a $\vec{W}$. Por ejemplo, si se toma $\vec{W} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, el vector $\vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ determina un ángulo con el eje de las ordenadas que es igual al ángulo que determina el vector $\vec{W}$ con el eje de las abscisas, α. Esto sucede porque los triángulos que quedan formados son iguales.

Como los triángulos son rectángulos, el ángulo que determina el vector $\vec{V}$ con el eje *x* mide $90° - \alpha$; por lo tanto, el ángulo entre los dos vectores es $90° - \alpha + \alpha = 90°$. Esta explicación es cierta para cualquier par de vectores cuyas coordenadas sean de la forma $(b\,;\,a)$ y $(a\,;\,-b)$.



Si *a*, *b*, *t* y *k* son números reales no nulos, los siguientes pares de vectores son siempre perpendiculares entre sí:

- $(a;b), (b;-a)$
- $(a;b), k\cdot(b;-a)$
- $t\cdot(a;b), (b;-a)$
- $t\cdot(a;b), k\cdot(b;-a)$

Es interesante notar que como los vectores $\vec{V}$ y $\vec{W}$ son perpendiculares, el producto de sus pendientes es –1 y además se verifica:

$$\frac{3}{1}\cdot\frac{-1}{3} = -1 \Leftrightarrow \frac{3}{1} = -1\cdot\frac{3}{-1} \Leftrightarrow 3\cdot(-1) = (-1)\cdot 3$$

Por lo tanto $3(-1) + 3\cdot 1 = 0$

Es decir que, si dos vectores son perpendiculares, la suma del producto de las primeras coordenadas de cada vector y el producto de las segundas coordenadas es 0. Esta operación entre vectores se denomina producto escalar.

Si $(a;b)$ y $(c;d)$ son dos vectores, se define el **producto escalar** entre ellos como:

$$(a;b)\cdot(c;d) = a\cdot c + b\cdot d$$

¿Qué sucede si se calcula el producto escalar de un vector por sí mismo?

Si se considera un vector cualquiera $\vec{OA} = (a\,;\,b)$, resulta que:

$$\vec{OA}\cdot\vec{OA} = a\cdot a + b\cdot b = a^2 + b^2 = |\vec{OA}|^2$$

El producto escalar de un vector por sí mismo es el cuadrado de su módulo:

$$\vec{OA}\cdot\vec{OA} = |\vec{OA}|^2$$

© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

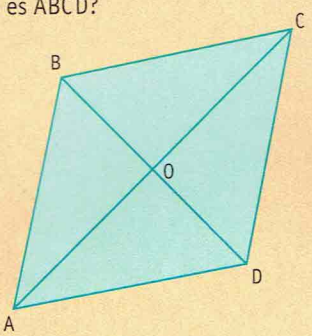
© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Geometría y vectores

A partir de los siguientes problemas se intentará demostrar algunas propiedades geométricas usando vectores.

Problema 9

En el $A\hat{B}\hat{C}D$ se verifica que $\overline{BD}$ es perpendicular a $\overline{AC}$ y que O es el punto medio de $\overline{BD}$ y de $\overline{AC}$. ¿Qué tipo de cuadrilátero es $A\hat{B}\hat{C}D$?



Los vectores son una herramienta útil para analizar la situación planteada. Si se considera el punto O como origen, entonces se tienen diferentes relaciones entre vectores: $\vec{OD} = -\vec{OB}$ y $\vec{OA} = -\vec{OC}$. Como O es el punto medio de $\overline{BD}$ y de $\overline{AC}$ los vectores $\vec{OB}$ y $\vec{OD}$ tienen la misma magnitud, lo mismo que los vectores $\vec{OA}$ y $\vec{OC}$.

Además, como los cuatro triángulos que quedan determinados son rectángulos, es posible aplicar en ellos el teorema de Pitágoras con el objetivo de hallar la medida de cada una de las hipotenusas. Si se llama *a* al módulo de $\vec{OB}$ y *b* al módulo de $\vec{OA}$, se tiene:

$$|\vec{AB}| = |\vec{BC}| = |\vec{CD}| = |\vec{AD}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Resulta entonces que los cuatro lados del $A\hat{B}\hat{C}D$ tienen la misma medida, lo cual implica que $A\hat{B}\hat{C}D$ es un rombo.

Un cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares y se cortan en el punto medio es un rombo.

Si además las diagonales de $A\hat{B}\hat{C}D$ fueran iguales, los cuatro triángulos serían isósceles rectángulos. Los otros dos ángulos medirían 45° cada uno, por lo tanto:
$B\hat{C}O = O\hat{C}D = C\hat{D}O = O\hat{D}A = O\hat{A}B = A\hat{B}O = O\hat{A}D = O\hat{B}C = 45°$, de donde resulta que los cuatro ángulos del cuadrilátero medirán, entonces, 90°, por estar formados por dos ángulos de 45°. Es decir, si las diagonales midieran lo mismo el rombo sería un cuadrado.

Esta es una propiedad que ya se ha trabajado en Geometría: *"Si en un cuadrilátero sus diagonales son perpendiculares y se cortan en el punto medio, el cuadrilátero es un rombo"*

La otra propiedad es: *"si en un rombo las diagonales son iguales, el cuadrilátero es un cuadrado"*.

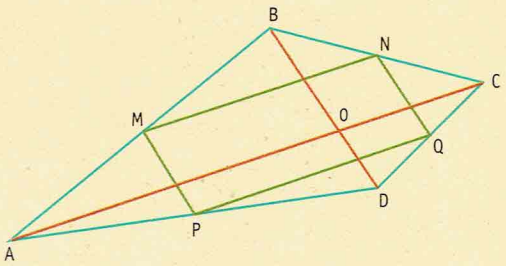
Un rombo cuyas diagonales son iguales es un cuadrado.

Estas propiedades se han demostrado aquí, utilizando como herramienta los vectores. Como ya se ha dicho en otras oportunidades, no hay una única manera de demostrar propiedades en Matemática. Lo importante es elegir la que uno considere más adecuada o más económica.

Problema 10

Se considera un cuadrilátero cualquiera ABCD. Si los puntos medios de sus lados son M, N, Q y P respectivamente, ¿qué figura determinan MNQP?

Lo primero que debe tenerse en cuenta es que el cuadrilatero ABCD no tiene por qué ser alguno en particular, por lo cual es posible dibujar uno cualquiera, sin ninguna propiedad específica. En él se marcan los puntos medios de sus lados.



Cada uno de los vértices del cuadrilatero ABCD determina un vector con origen en O:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b},\ \overrightarrow{OC} = \vec{c} \text{ y } \overrightarrow{OD} = \vec{d}.$$

A partir de ellos puede expresarse, como operaciones ente estos vectores, cada uno de los lados del cuadrilátero dado y del que se forma a partir de los puntos medios.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\vec{a} + \vec{b}$	$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = -\vec{b} + \vec{c}$
$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = -\vec{c} + \vec{d}$	$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = -\vec{a} + \vec{d}$

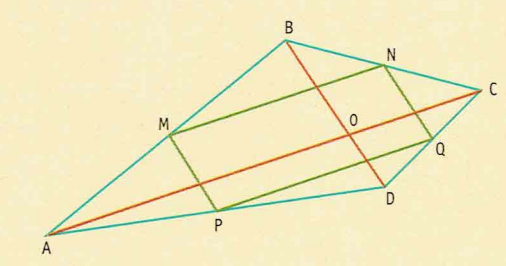
De la misma manera se obtiene:

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}$	$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b} - \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CQ}$	$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{c} - \vec{c} + \vec{d}) = \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{d}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$
$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DP}$	$\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}(-\vec{c} + \vec{d} - \vec{d} + \vec{a}) = \frac{1}{2}(-\vec{c} + \vec{a}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$
$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM}$	$\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(-\vec{d} + \vec{a} - \vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(-\vec{d} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

A partir de los resultados anteriores se puede observar que $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{QP}$ son paralelos entre sí por ser un múltiplo del mismo vector (solo cambian sus direcciones) y tienen además la misma magnitud porque en ambos casos se multiplica al mismo vector por $\frac{1}{2}$.

De la misma manera, resulta que $\overrightarrow{NQ}$ y $\overrightarrow{PM}$ son paralelos y de igual módulo.

Luego, el cuadrilátero MNQP es un paralelogramo cuyos lados miden la mitad de cada una de las diagonales del cuadrilátero original.



© Tinta fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

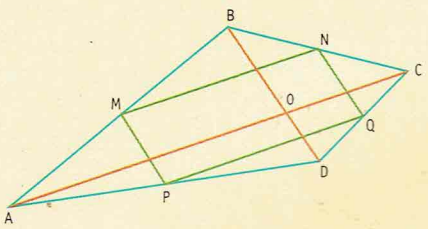
© Tinta fresca ediciones s. a. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Problema 11

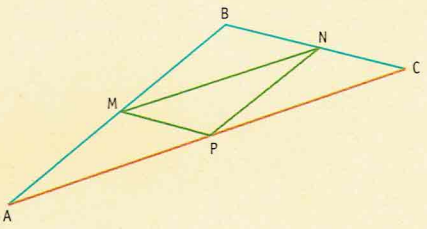
Si en un triángulo ABC se marcan los puntos medios de cada lado, M, N y P y se los une, ¿cuál es la relación entre ambos triángulos?

Si se analiza el problema anterior y solo se mira el $\triangle ABC$.

Problema anterior



Problema actual



El vector $\overrightarrow{MN}$ que une los puntos medios de los lados AB y BC es paralelo al tercer lado, AC, y su magnitud es la mitad del mismo.

El segmento MN recibe el nombre de base media del triángulo.

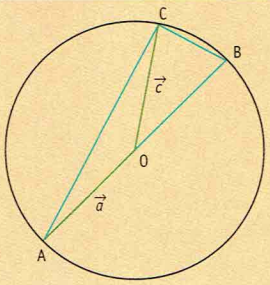
Además, $\overrightarrow{MN}$ es paralelo a $\overrightarrow{CA}$ y su magnitud es la mitad de $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{NP}$ es paralelo a $\overrightarrow{AB}$ y su magnitud es la mitad de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{MP}$ es paralelo a $\overrightarrow{BC}$ y su magnitud es la mitad de $\overrightarrow{BC}$.

Resulta que las medidas de los lados del $\triangle MNP$ son proporcionales a las medidas de los del $\triangle ABC$, por lo cual resulta que el $\triangle MNP$ es semejante al $\triangle ABC$ y la constante de proporcionalidad es 2 o $\frac{1}{2}$, según de cuál de los dos triángulos se parta.

En cualquier triángulo, la base media es paralela a la base y mide la mitad de la medida de dicha base. Cada triángulo tiene tres bases medias, una por cada lado.

Problema 12

Dada una circunferencia de centro O; si $\overline{AB}$ es un diámetro y C un punto cualquiera de la misma, ¿es cierto que el ángulo $\hat{ACB}$ es recto?



Los vectores permitirán decidir si el ángulo es recto o no, a través del producto escalar.

En este caso, habrá que calcular el producto escalar entre los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$.

Para ello, es posible suponer que el vector $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ y el vector $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, además como $\overline{AB}$ es un diámetro $\overrightarrow{OB} = -\vec{a}$. A partir de ellos será posible hallar una expresión para los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$:

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} = -\vec{c} + \vec{a} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} = -\vec{c} - \vec{a}$$

Entonces,

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (-\vec{c} + \vec{a}) \cdot (-\vec{c} - \vec{a}) = \vec{c} \cdot \vec{c} + \cancel{\vec{c} \cdot \vec{a}} - \cancel{\vec{a} \cdot \vec{c}} - \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2$$

Como $\vec{a}$ y $\vec{c}$ tienen igual magnitud por ser radios de la misma circunferencia, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$, lo que informa que $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ son perpendiculares, es decir que forman un ángulo de 90°.

El producto escalar entre dos vectores es:

- distributivo respecto de la suma y la resta, es decir si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ y $\vec{d}$ son vectores, se verifica que:

$$\vec{b} \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{d}$$

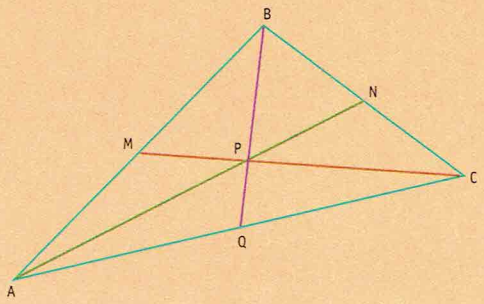
- conmutativo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Una mediana de un triángulo es un segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto a él. Cada triángulo tiene tres medianas, una por cada lado.

Problema 13

¿Qué puede decirse del punto donde se cortan las medianas de un triángulo?



Si se llama a los vectores $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ y $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, los demás vectores podrán escribirse en función de ellos. Es importante tener en cuenta que N, M y Q son los puntos medios de los lados BC, AB y AC, respectivamente.

Por ejemplo:

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\vec{a} + \vec{b}$	Debido a que $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$	Porque $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AQ} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$	Dado que $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$	Pues $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Como el punto P está en la misma recta que contiene a cada uno de los vectores, $\overrightarrow{AP}$ tiene que ser un múltiplo de $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BP}$ un múltiplo de $\overrightarrow{BQ}$ y $\overrightarrow{CP}$ un múltiplo de $\overrightarrow{CM}$, entonces resulta que:

$\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AN} = k \cdot (\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b})$	con k algún número real
$\overrightarrow{BP} = h \cdot \overrightarrow{BQ} = h \cdot (-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b})$	con h algún número real
$\overrightarrow{CP} = t \cdot \overrightarrow{CM} = t \cdot (-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a})$	con t algún número real

A partir del gráfico pueden encontrarse varias relaciones entre vectores:

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP}$	Porque $\overrightarrow{PC} = -\overrightarrow{CP}$
$-\vec{a} + \vec{b} = h \cdot (-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) - t \cdot (-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a})$	Se reemplaza con las relaciones previas.
$-\vec{a} + \vec{b} = -h \cdot \vec{a} + \frac{1}{2}h \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{b} - \frac{1}{2}t \cdot \vec{a}$	Se aplica la propiedad distributiva.
$-\vec{a} + \vec{b} = (-h - \frac{1}{2}t) \cdot \vec{a} + (\frac{1}{2}h + t) \cdot \vec{b}$	Se agrupa.

Para que se cumpla la última igualdad, los coeficientes de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ deben ser los mismos, luego

$$\begin{cases} -1 = -h - \frac{1}{2}t \\ 1 = \frac{1}{2}h + t \end{cases}$$

© Hoja fresca ediciones S. A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

© Tinta fresca ediciones s. a. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Si se despeja t en la segunda ecuación queda:

$$t = 1 - \frac{1}{2}h$$

Se reemplaza en la primera ecuación y se obtiene:

$$-1 = -h - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}h)$$

$$-1 = -h - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}h \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} = -\frac{3}{4}h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{2}{3}$$

Si se reemplaza el valor de h en cualquiera de las ecuaciones, se obtiene que $t = \frac{2}{3}$.

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene, entonces, que $h = \frac{2}{3}$ y $t = \frac{2}{3}$.

Esto significa que:

$\vec{CP} = k \cdot \vec{CM} = \frac{2}{3} \cdot \vec{CM}$	$\vec{BP} = h \cdot \vec{BQ} = \frac{2}{3} \cdot \vec{BQ}$

Las dos últimas igualdades indican que $\vec{CP}$ está sobre la misma recta que $\vec{CM}$ y su magnitud es $\frac{2}{3}$ de la de $\vec{CM}$, luego, el punto P está a $\frac{2}{3}$ de la mediana de AB desde C. De la misma manera, $\vec{BP}$ está sobre la misma recta que $\vec{BQ}$ y su magnitud es $\frac{2}{3}$ de la de $\vec{BQ}$, luego, el punto P está a $\frac{2}{3}$ de la mediana de AC desde B.

A partir de la igualdad $\vec{AP} + \vec{PC} = \vec{AC}$ se obtiene que:

$\vec{AP} + \vec{PC} = \vec{AC}$	Se plantea la igualdad.
$k \cdot (\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) - t \cdot (-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}) = \vec{b}$	Se reemplazan por las relaciones con $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
$k \cdot (\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) - \frac{2}{3} \cdot (-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}) = \vec{b}$	Se reesmplaza t por $\frac{2}{3}$.
$\frac{1}{2}k\vec{a} + \frac{1}{2}k\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a} = \vec{b}$	Se aplica la propiedad distributiva.
$(\frac{1}{2}k - \frac{1}{3})\vec{a} + (\frac{1}{2}k + \frac{2}{3})\vec{b} = 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b}$	Se agrupa convenientemente.

Se obtiene el sistema de dos ecuaciones con una incógnita:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}k - \frac{1}{3} = 0 \\ \frac{1}{2}k + \frac{2}{3} = 1 \end{cases}$$

Al despejar k de ambas ecuaciones se obtiene: $k = \frac{2}{3}$.

Por lo tanto, como $\vec{AP} = k \cdot \vec{AN}$, P está a $\frac{2}{3}$ de la medida de la mediana de $\overline{BC}$, desde A.

En conclusión, el punto de intersección de las tres medianas de un triángulo se encuentra a $\frac{2}{3}$ de la distancia de la mediana, desde cada vértice.

© Tinta fresca ediciones S.A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

Si se aplica la propiedad distributiva:

$$\frac{1}{2}k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b} = (1 - t) \cdot \vec{a} + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t) \cdot \vec{b}$$

Para que las expresiones anteriores sean iguales, los coeficientes de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ deben ser los mismos en ambos miembros, a partir de este hecho surgen dos igualdades:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}k = 1 - t \\ k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \end{cases}$$

La segunda ecuación muestra una relación entre k y t, que puede reemplazarse en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t\right) &= 1 - t \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}t &= 1 - t \\ \frac{1}{4}t + t &= 1 - \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4}t &= \frac{3}{4} \\ t &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

A partir del valor de t se puede hallar el de k:

$$k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

Los valores de k y t eran números tales que:

$$\vec{AP} = k \cdot \vec{AN} \text{ y } \vec{MP} = t \cdot \vec{MD}$$

Luego, $\vec{AP} = \frac{4}{5} \cdot \vec{AN}$ y $\vec{MP} = \frac{3}{5} \cdot \vec{MD}$.

A partir de las dos igualdades anteriores puede decirse que:

- P pertenece al segmento AN y se encuentra a $\frac{4}{5}$ de la medida de $\vec{AN}$ desde A y a $\frac{1}{5}$ desde N.
- P pertenece al segmento MD y se encuentra a $\frac{3}{5}$ de la medida de $\vec{MD}$ desde M y a $\frac{2}{5}$ desde D.

Estas afirmaciones son válidas para cualquier rectángulo construido según las instrucciones del enunciado. *¿A qué se debe esta afirmación?*

En la resolución de este problema no se usó ningún hecho particular del dibujo dado. Solo se han tenido en cuenta las relaciones dadas en el enunciado. No se ha tomado ninguna medida; por lo tanto, el resultado es válido para cualquier rectángulo que verifique las condiciones dadas por el problema.

ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN

12. Si $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$, hallen los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$.

13. Si $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$, hallen el vector $\overrightarrow{OQ}$.

14. Si $\overrightarrow{OA} = a \cdot \vec{I} + b \cdot \vec{J}$ y $\overrightarrow{OB} = b \cdot \vec{I} + a \cdot \vec{J}$:

a. Demuestren que los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ tienen la misma magnitud.

b. Si $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son dos lados consecutivos de un rombo, hallen los vectores que representan a las diagonales.

15. Si ABC es un triángulo donde $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ y D es el punto medio del lado BC, demuestren que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{AD}$.

16. Si $\overrightarrow{OA} = 2\vec{I} + 3\vec{J}$ y $\overrightarrow{OB} = -4\vec{I} + 2\vec{J}$, hallen el vector del punto P que divide al segmento AB de manera tal que $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$.

17. Demuestren que el vector (0 ; 11) pertenece a la recta de ecuación $(x ; y) = (-2 ; 5) + k \cdot (1 ; 3)$, con k un número real.

18. ¿Se cortan las rectas cuyas ecuaciones son:
$(x ; y) = 3\vec{I} - 4\vec{J} + k \cdot (-\vec{I} + 2\vec{J})$
$(x ; y) = -3\vec{I} + 2\vec{J} + t \cdot (2\vec{I} - 3\vec{J})$?
En caso afirmativo, indiquen en qué punto o puntos se cortan.

19. Hallen la ecuación vectorial de la recta que pasa por el vector $-2\vec{I} + 5\vec{J}$ y es perpendicular a la recta de ecuación $(x ; y) = 2\vec{I} - \vec{J} + k \cdot (-\vec{I} + 3\vec{J})$.

20. Hallen la distancia del punto A = (–2 ; 5) a la recta de ecuación $(x ; y) = (1 ; -1) + k \cdot (1 ; 2)$.

21. Si el vector (a ; 6) pertenece a la recta de ecuación $(x ; y) = (2 ; 5) + k \cdot (-1 ; 2)$, hallen el valor de a.

22. Hallen la ecuación de la recta paralela a $(x ; y) = 4\vec{I} + 2\vec{J} + k \cdot (3\vec{I} + 2\vec{J})$ que pasa por el punto (–2 ; 6).

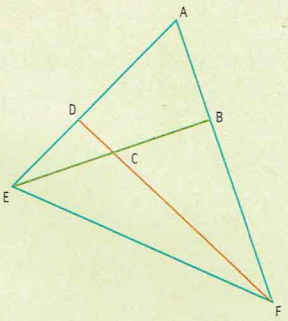
23. Hallen los vectores de magnitud $5\sqrt{5}$ que tienen la misma dirección que la recta $(x ; y) = (4 ; 3) + k \cdot (2 ; 4)$.

24. Hallen dos vectores de magnitud 5 perpendiculares a la recta de ecuación $(x, y) = (1 ; -1) + k \cdot (3 ; -3)$.

25. Demuestren que las rectas de ecuación
$(x ; y) = (5 ; -1) + k \cdot (1 ; 5)$
$(x ; y) = -\vec{I} + 3\vec{J} + t \cdot (-10\vec{I} + 2\vec{J})$
son perpendiculares y hallen su punto de intersección.

26. Hallen un vector de magnitud 1 con la misma dirección que el vector $-2\vec{I} + \vec{J}$.

27. Dados los puntos A = (1 ; 11), B = (2 ; 8), C = (–1 ; 7), D = (–2 ; 8) y E = (–4 ; 6). Las rectas AB y DC se intersecan en el punto F.



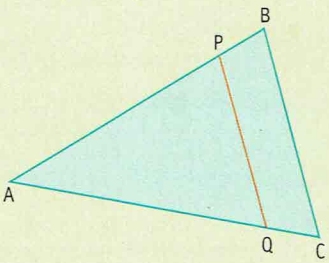
a. Determinen si $\overrightarrow{FD}$ es perpendicular a $\overrightarrow{AE}$.

b. Expliquen, con vectores, la decisión.

c. Expliquen, usando los conceptos de rectas, la decisión.

28. Las diagonales AC y BD de un cuadrilátero se cortan en su punto medio. Si $\overrightarrow{AC} = (3 ; 2)$ y $\overrightarrow{BD} = (2 ; -3)$, determinen de qué tipo de cuadrilátero se trata, sin graficarlo.

29. En el siguiente dibujo $\overline{PQ}$ es paralelo a $\overline{BC}$.



Demuestren que los lados del $\overset{\triangle}{APQ}$ están en la misma proporción respecto de los lados del $\overset{\triangle}{ABC}$.

30. Consideren los vectores $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ y $\overrightarrow{OC} = 3\vec{b} - 2\vec{a}$.
Demuestren que los puntos A, B y C están alineados.

© Tinta fresca ediciones S.A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

AUTOEVALUACIÓN

© Tinta fresca ediciones S.A. | Prohibida su fotocopia. Ley 11.723

En cada caso, marquen la o las respuestas correctas.

1. Si $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ y $\overrightarrow{CD} = 3\vec{a}$, entonces,

a $\overrightarrow{AB}$ es paralelo a $\overrightarrow{CD}$.

b $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

c $\overrightarrow{AB}$ mide el triple que $\overrightarrow{CD}$.

d $\overrightarrow{CD}$ mide el triple que $\overrightarrow{AB}$.

2. Un vector paralelo al vector $\vec{a} + 2\vec{b}$ es:

a $3\vec{a} + 6\vec{b}$ **b** $3\vec{a}$

c $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ **d** $\sqrt{3}\vec{a} + \sqrt{12}\vec{b}$

3. La expresión que representa una ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos (1 ; 1) y (3 ; 5) es :

a $(x;y) = k(1;2) + (3;5)$

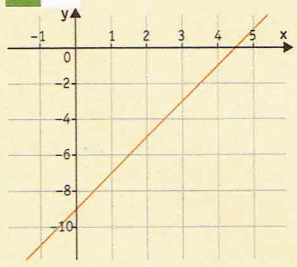
b $(x;y) = k(2;4) + (1;1)$

c $(x;y) = k(3;5) + (1;1)$

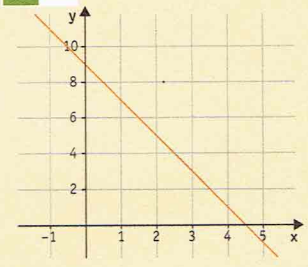
d Ninguna de las anteriores.

4. El gráfico que corresponde a la recta de ecuación $(x ; y) = k(1 ; -2) + (5 ; -1)$ es:

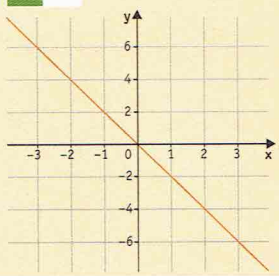
a



b



c



d Ninguno de los anteriores.

5. Marquen la o las afirmaciones que consideren correctas:

a Si el vector (3 ; 2) es diagonal de un rectángulo de base 3 y altura 2, entonces el vector (6 ; 4) es diagonal de un rectángulo de base 6 y altura 4.

b El vector (3 ; 2) es perpendicular al vector (– 3 ; –2)

c Dos vectores son perpendiculares si tienen los mismos valores absolutos en sus coordenadas pero una de ellas está cambiada de signo.

d Si un vector tiene módulo 3 y otro tiene módulo 4 y son perpendiculares, entonces la suma de esos vectores tendrá módulo 5.

6. Dados los vectores $A = (3;1)$; $B = (0;-\sqrt{10})$ y $C = (-1;-3)$, entonces dos vectores que tienen el mismo módulo son:

a A y C **b** B y C

c B y (A + C – B) **d** (B + C) y A

7. Una recta perpendicular al vector con origen en $A = (3;-7)$ y extremo en $B = \left(\frac{15}{2} ; -\frac{21}{2}\right)$ es:

a $k(3;-7)$ **b** $k(7;-3)$

c $k\left(-\frac{21}{2};\frac{15}{2}\right)$ **d** $k\left(\frac{9}{2};-\frac{7}{2}\right) + (3;-7)$

e Ninguna de las anteriores.

8. Las rectas de ecuaciones:
$(x;y) = (3;5) + k(-1;2)$ con $k \in \mathbb{R}$ y $(x;y) = (1;-1) + t(0{,}5;-6)$ con $h \in \mathbb{R}$, se cortan en el punto:

a (0 ; 0) **b** (0 ; 11)

c (11 ; 0) **d** (11 ; 11)

e Ninguno de los anteriores.

RESPUESTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1

(página 25)

1. c.
2. c.
3. a.
4. b.
5. b.
6. b.
7. d.
8. c.
9. c.
10. a. d.
11. b.

2

(página 55)

1. e.
2. c.
3. b.
4. a.
5. e.
6. b.
7. c.
8. a.
9. b.

3

(página 85)

1. d.
2. d.
3. c.
4. A. b.
B. d.
5. b.
6. d.
7. A. b.
B. d.
C. f.
D. c.
E. e.

4

(página 109)

1. b.
2. a.
3. c.
4. b.
5. b.
6. c.
7. c.

5

(página 134)

1. d.
2. a.
3. a.
4. d.
5. d.
6. d.
7. c.
8. b. c.

A

(página 157)

1. a. d.
2. a. c. d.
3. a. b.
4. b.
5. a. c. d.
6. a. b.
7. e.
8. b.

Esta obra se terminó de imprimir en el mes de febrero
de 2006 en **NEW PRESS GRUPO IMPRESOR S.A.**
Buenos Aires Argentina

ISBN 987-576-081-1

MAMTP306

tinta fresca

Clarín